

EL SISTEMA AUTOR : UNA APLICACION DE LA OPTIMIZACION  
ESTRUCTURAL AL PROYECTO DE TORRES  
RETICULADAS

**José Herskovits**

Programa de Pos-graduação em Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Rio de Janeiro  
Rio de Janeiro - Brasil

**Nestor Zouain**

Departamento de Engenharia Mecânica  
Pontificia Universidad Católica de Rio de Janeiro  
Rio de Janeiro - Brasil

#### RESUMEN

En este trabajo se describe el Sistema AUTOR para proyecto Automático de Torres metálicas, destinado a la determinación de la geometría y dimensiones óptimas de estructuras reticulares. El sistema se basa en el "Método de Direcciones Viabiles en Dos Etapas", que para una estructura inicial factible, define una sucesión de proyectos, también factibles.

#### ABSTRACT

This work presents the AUTOR System for Automatic design of metallic Towers, for the optimal geometry and dimension, of pin-jointed bar elements. It's based on the "Two-Step Feasible Direction Algorithm" which starting at a feasible initial structure, generates a succession of feasible designs.

## INTRODUCCION

Cuando se habla de proyecto o diseño, generalmente se piensa en la finalidad de lo que se va a proyectar. Sin embargo, los conceptos de economía y eficiencia siempre existen en la mente del ingeniero.

El mejor diseño será aquel que cumpla sus funciones del modo mas económico [1].

Se debe distinguir entre la concepción de un diseño, y su dimensionamiento. Los elementos utilizados, materiales y procedimientos de un proyecto forman parte de su concepción.

El problema de optimización a ser tratado aquí consiste en, una vez establecida la concepción del diseño, dimensionarlo de manera que el proyecto sea "el mejor", utilizando un cierto criterio de evaluación. A la realización de un proyecto, siempre están asociados los factores humanos de conocimientos, creatividad, experiencia, intuición, etc., y estos son preponderantes en todo buen diseño. Sin embargo estos mismos factores no son suficientes por sí solos para establecer las dimensiones de un proyecto óptimo, siendo necesaria la utilización de herramientas matemáticas específicas.

En la gran mayoría de las ramas de la ingeniería, estas herramientas de optimización no están suficientemente desarrolladas o difundidas. Esto origina la utilización de pseudo criterios de optimalidad, siendo el mas extendido, asumir que un buen proyecto es aquel en que todos los elementos están exigidos al máximo de su capacidad. La utilización de este criterio, generalmente dará proyectos no óptimos, aunque de buena calidad. Sin embargo, no siempre existe un diseño que lo verifique y cuando existe no es fácil de obtener.

En el caso de estructuras reticulares metálicas, una vez definida la topología estructural y los materiales utilizados, el acto de proyectar consiste en determinar magnitudes geométricas y secciones transversales de los elementos de manera de satisfacer requisitos mecánicos, funcionales o estéticos. Para obtener un proyecto óptimo, es también necesario minimizar una función objetivo, que puede ser costo de fabricación, peso estructural u otras a ser definida por el proyectista [2,3,4,5,6].

El desarrollo reciente de nuevos métodos para la Programación no Lineal Restrita, eficientes y robustos en problemas de gran dimensión, permite la creación de sistemas computacionales para la optimización de estructuras de porte real, basados en algoritmos de Programación Matemática.

En este trabajo será descrito el Sistema AUTOR para proyecto AUTomático de TORres metálicas y estructuras reticuladas en general. El mismo, cuya segunda versión esta

en proceso de elaboración, se destina a la determinación de la geometría y dimensiones óptimas de torres reticuladas (admitiendo cables) y autoportantes, y de estructura reticulares con juntas articuladas en general.

Las variables de proyecto, a ser determinadas por el sistema, están constituidas por las áreas de las secciones transversales de los elementos y las coordenadas de los puntos nodales. La función de costo, a ser minimizada, puede ser proporcional al peso de la estructura y también incluir otros costos, como el de las fundaciones, que dependen de las reacciones de las mismas. Los proyectos obtenidos deben satisfacer restricciones sobre las tensiones, en los elementos, y desplazamientos en los puntos nodales, evaluados mediante análisis lineal elástico o no lineal elástico, en el caso de grandes deformaciones.

El sistema se basa en el "Método de Direcciones Viabiles en Dos Etapas", desarrollado por J. Herskovits, que para una estructura real factible, define una sucesión de proyectos, también factibles, que converge a la solución óptima. El mismo requiere de la ejecución de un análisis estructural en cada iteración, y el cálculo de las derivadas de las restricciones en relación a las variables de proyecto.

La optimización con geometría fija de varios ejemplos de la literatura muestra que los métodos adoptados son muy eficientes. También serán expuestos los resultados de la utilización del Sistema AUTOR en el proyecto de una serie de torres autoportantes para las antenas parabólica de microonda, con alturas variando de 60 a 130 metros, realizado para la "EMPRESA BRASILEIRA DE COMUNICACIONES".

## MODELO

Definiremos el problema expresando que:

Dada una estructura, modelada mediante elementos finitos y sometida a múltiples estados de carga, se hallará una configuración:

$$x = (x_1, x_2, \dots, \dots, x_m) \quad (1)$$

para la cual la función objetivo

$$f(x) \quad (2)$$

es mínima, verificandose las restricciones sobre las variables expresadas como:

$$x_{inf_i} < x_i < x_{sup_i} \quad i = 1, 2, \dots, \dots, m \quad (3)$$

y las llamadas restricciones de respuesta:

$$g_j(x) < 0 \quad j = 1, 2, \dots, \dots, l \quad (4)$$

En nuestro caso las variables de diseño definen las coordenadas de los puntos nodales de la estructura, y las secciones transversales de cada elemento.

Las restricciones de respuesta  $g_i(x)$  serán las tensiones en los elementos y los desplazamientos de los nodos.

Siendo el número de variables una limitación importante, es útil introducir el concepto de grupo de variables, para las variables de área y distinguir entre variables dependientes e independientes en el caso de variables geométricas. Este abordaje permite reducir la dimension del espacio de diseño introduciendo implícitamente algunas restricciones constructivas como simetría e igualdad de áreas en los elementos y restricciones geométricas como simetría, colinealidad y espaciamiento entre nodos.

#### VARIABLES DE AREA

Se escogió cada conjunto de elementos con área igual, como un grupo de área:

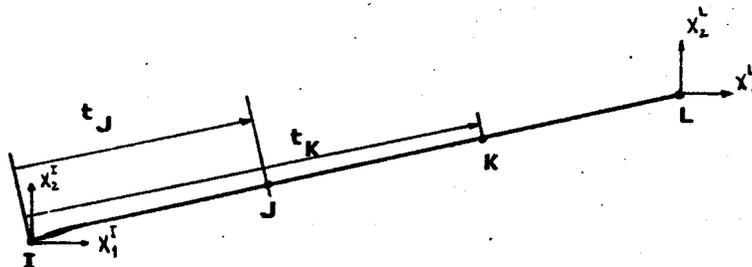
$$G_A^i = \{ J / A_j = A_i, J \in NE \}, i = 1, 2, \dots, NED \quad (5)$$

donde: NE número total de elementos de la estructura  
NED número de elementos diferentes

$G_A^i$  es el conjunto del número de miembros en el cual sus componentes tienen un área  $A_i$ . Así, el número de variables independientes de área se reduce al de áreas diferentes.

#### VARIABLES GEOMETRICAS

Se escogió como unidad estructural básica, un elemento formado por cada grupo de barras colineales, que pasaremos a llamar "elemento compuesto".



UNIDAD BASICA ESTRUCTURAL: "ELEMENTO COMPUESTO"  
FIGURA N 1

Para el elemento compuesto, de la figura N 1, tenemos que en cada nudo extremo estaría asociado a dos, o tres, variables independientes extremas y sus nudos intermedios a una única variable independiente interna:  $t_i$ .

Para cubrir los casos prácticos es necesario considerar, además, elementos compuestos en que sus nudos extremos sean variables dependientes, tanto de otras variables independientes extremas, como de una variable independiente interna.

Para relacionar, las coordenadas nodales a las variables independientes, definiremos la matriz de topología:

$$X = T * Y \quad (6)$$

donde: X coordenadas nodales  
T matriz de topología  
Y variables nodales independientes extremas

La matriz de topología incluirá las variables independientes internas y asumiremos que en los problemas considerados tiene la forma:

$$T = T_0 + t_1 * T_1 + t_2 * T_2 + \dots + t_{NIN} * T_{NIN} \quad (7)$$

donde:  $t_i$  variables nodales independientes internas.  
 $T_i$  matrices de topología asociada a la variable  $t_i$ ,  
constantes con relación a  $Y_i$ .  
NIN número de variables internas independientes

Recapitulando, el vector de variables, de diseño, tendrá: áreas, coordenadas extremas y coordenadas internas independientes, de la forma:

$$x = (A_1, A_2, \dots, A_{NED}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{NCI}, t_1, t_2, \dots, t_{NIN}) \quad (8)$$

#### SISTEMA AUTOR

El problema de programación matemática definido anteriormente es resuelto en el sistema AUTOR mediante el método de Direcciones Viabiles en Dos Etapas. El mismo utiliza un proceso iterativo que, dado un punto que satisface las restricciones, define a cada iteración, un nuevo punto que también satisface las restricciones a un costo menor. La sucesión definida por el método converge a un punto de costo mínimo.

En cada iteración se requiere calcular:  $f$ ,  $g$ , y sus derivadas. Las restricciones  $g$ , son obtenidas mediante un análisis estructural. Las derivadas son calculadas por el propio sistema, utilizando una formulación expuesta más adelante.

El proceso iterativo, del sistema autor, se esquematiza en la figura N 2.

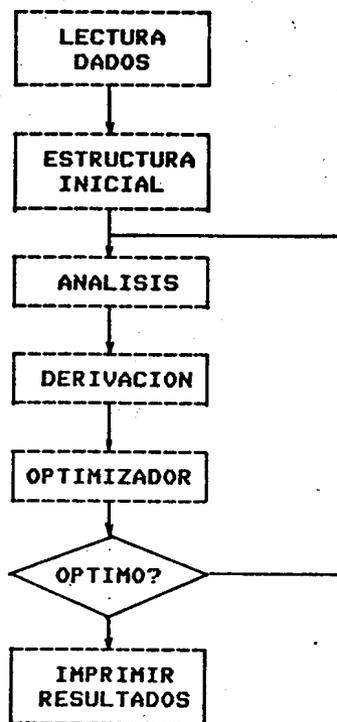


FIGURA N 2 ESTRUCTURA GENERAL DEL SISTEMA AUTOR

### CALCULO DE LAS DERIVADAS

-Derivadas del vector de desplazamientos.

La matriz de rigidez elemental, para un análisis bidimensional, tiene la forma:

$$K_i = E_i \cdot A_i / L_i^3 \begin{bmatrix} K_o & -K_o \\ -K_o & K_o \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$K_o = \begin{bmatrix} L_x^2 & L_x \cdot L_y \\ L_x \cdot L_y & L_y^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde:  $E$  El módulo de Young  
 $A$  Área transversal del elemento  
 $L$  Largo total del elemento  
 $L_x, L_y$  largos proyectados en los ejes coordenados de referencia.

Se puede observar que la matriz de rigidez es una combinación lineal de las variables de proyecto de área de la forma:

$$K = A_1 * K_1 + A_2 * K_2 + \dots + A_{NED} * K_{NED} \quad (11)$$

donde:  $K$  matriz de rigidez global  
 $A_i$  área del elemento  
 $K_i$  matriz de rigidez asociada al área  $A_i$ , unitaria

Derivando con respecto a la variable  $x_i$ , el sistema:

$$K * U = F \quad (12)$$

donde:  $U$  vector de desplazamientos  
 $F$  vector de carga

se obtiene:

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} U + K \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (13)$$

de donde

$$K \frac{\partial U}{\partial x_i} = - \frac{\partial K}{\partial x_i} U + \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (14)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, hallamos:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = K^{-1} \left( - \frac{\partial K}{\partial x_i} U + \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \quad (15)$$

La derivada de la matriz de rigidez, respecto a la variable de área  $A_i$ , es directamente:

$$\frac{\partial K}{\partial A_i} = K_i \quad (16)$$

La matriz de rigidez derivada con respecto a las coordenadas nodales independientes se obtiene derivando a nivel de elemento, usando la matriz de topología, y luego montando esta en la matriz global:

$$\frac{\partial K}{\partial y_i} = \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_i} \quad (17)$$

Habr  por tanto, que resolver n sistemas de ecuaciones, para cada estado de carga.

-Derivada del vector de tensiones.

La derivada de las tensiones se obtiene también a partir de las relaciones a nivel de elemento:

$$\sigma_i = U^e S_i \quad (18)$$

donde:  $\sigma_i$  tension en el elemento i  
 $U^e$  vector de desplazamientos del elemento  
 $S_i$  vector geométrico

Derivando con respecto al área:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} = \frac{\partial U^e}{\partial A_j} S_i + U^e \frac{\partial S_i}{\partial A_j} \quad (19)$$

como el vector geométrico depende solo de las coordenadas, y no del área

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} = \frac{\partial U^e}{\partial A_j} S_i \quad (20)$$

Conocido  $\frac{\partial U^e}{\partial A_j}$  se obtiene directamente la derivada.

Derivando con respecto a las coordenadas geométricas independientes, se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial y_j} = \frac{\partial U^e}{\partial y_j} S_i + U^e \frac{\partial S_i}{\partial y_j} \quad (21)$$

como los vectores son conocidos, se calcula directamente la derivada para cada estado de carga.

## EJEMPLOS NUMERICOS

### EJEMPLO N 1

La estructura considerada, mostrada en la figura N 3, está formada por 25 elementos birrotulados. Sus elementos se agruparon en 8 grupos de igual  rea. Esta estructura ha sido estudiada, usando algoritmos de optimización diferentes, por Kirsck [5] y por Haug y Arora [7]. A continuación se presentan sus caracteristicas principales. Detalles completos son presentados por Herskovits [8].

Descripción:

- La geometría se muestra en la figura N 3.
- 25 elementos.
- 6 nodos

- 8 variables de diseño.
- 2 estados de carga.

**Restricciones:**

- Tensiones máximas limitada en todos los elementos.
- Límite mínimo para todas las variables.

**Configuración inicial:**

- $x_i$  = 2.00 in<sup>2</sup>.
- peso = 826.80 lbs.

**Configuración final:**

- peso = 545.17 lbs.
- iteraciones = 13.

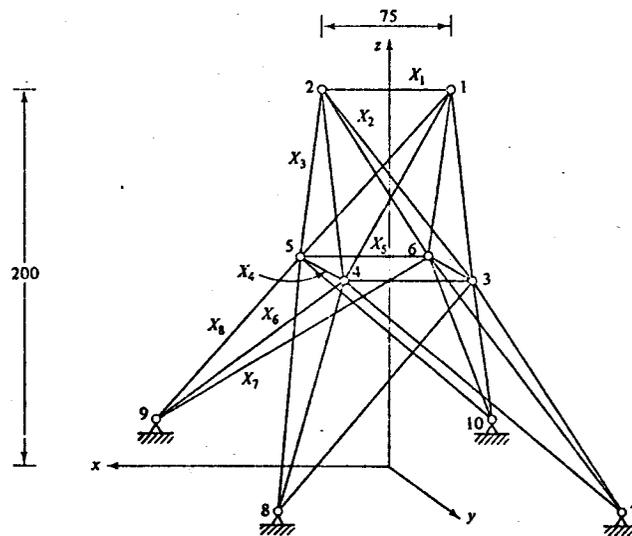


FIGURA N 3 TORRE DE 25 BARRAS

**EJEMPLO N 2**

La estructura considerada, mostrada en la figura N 4, está formada por 72 elementos birrotulados, agrupados en 16 grupos de igual área.

**Descripción:**

- La geometría se muestra en la figura N 4
- 72 elementos
- 20 nodos
- 16 variables de diseño
- 2 estados de carga

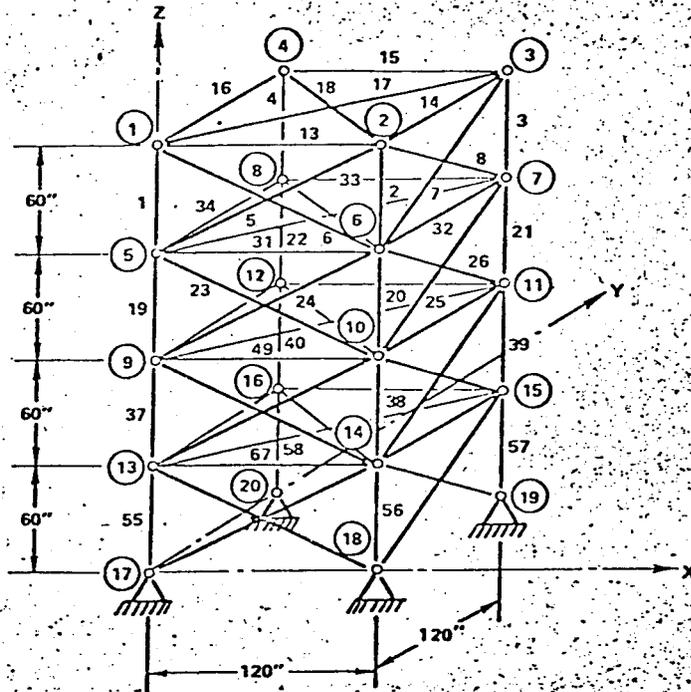


FIGURA N 4 TORRE DE 72 ELEMENTOS

**Restricciones:**

- Tension máxima limitada en todos los elementos.
- Límite mínimo para todas las variables.
- Desplazamiento máximo limitado en todos

los nodos.

**Configuración Inicial:**

-  $x_1$  = 1.00 in<sup>2</sup>  
- peso = 853.08 lb

**Configuración final:**

- peso = 379.61 lb  
- iteraciones = 15.

**EJEMPLO N 3**

Se muestran algunos resultados prácticos. Las estructuras consideradas, una torre de base cuadrada y otra de base triangular, ambas de planta simétrica forman parte de un proyecto realizado para la "EMPRESA BRASILEIRA DE TELECOMUNICACIONES". Fue analizada, con la finalidad de comparar torres de base cuadrada y triangular, cubriendo una faja de 60 a 130 mts de altura, con 2 o 4 antenas. A continuación se entregan algunas características básicas de las torres y de los resultados. Mas detalles pueden ser obtenidos de la referencia [9].

Los datos presentados, son para la torre mayor: 130 mts de altura.

**Descripción:**

- 800 elementos.
- 341 nodos.
- 41 variables de proyecto.
- Varios estados de carga considerando:  
Peso propio, Accesorios y Antenas,  
Viento sobre torre y antena.

**Restricciones:**

- Tensión máxima limitada en todos los elementos, compresión y pandeo.
- Rotación máxima, en el extremo superior de la torre, vertical y horizontal limitada.

**Resultados:**

- Los pesos finales, de las torres, con las variables de área supuesta continua, se muestran como "OPTIMO", en la tabla siguiente.
- Los pesos finales, con áreas tomadas de los perfiles comerciales, a partir de las soluciones anteriores, se muestran como "PROYECTO FINAL".

PESO FINAL (KG)

ALTURA [CM]	OPTIMO		PROYECTO FINAL	
	TRIANG.	CUADRADO	TRIANG.	CUADRADO
60.00	11 080.	11 760.	11 637.	11 174.
95.00	28 600.	31 600.	32 933.	34 009.
130.00	56 000.	66 060.	61 570.	72 576.

REFERENCIAS

- [1] Fox, R. L., "Optimization Methods for Engineering Design", Addison-Wesley, 1971
- [2] Schmut, L. A., "Structural Design by Systematic Sintesis", Proc. of the Second National Conference on Electronic Computation, ASCE, 1960, pp. 105-132.
- [3] Vanderplaats, G. and Moses, F., "Structural Optimization by Methods of Feasible Directions", Computers and Structures Vol. 3, N 4, July 1973.
- [4] Venkayya, V. B., "An Iterative Method for the Analysis of large Structural Systems", AFFDL-TR-67-194, April 1968.
- [5] Kirsch, U., "Optimum Structural Design" MacGraw-Hill, 1981.
- [6] Imai, K., "Configuration Optimization of Trusses by the Multiplier Method" Thesis P. H. D. Univ. California, 1978.
- [7] Haug, E. and Arora, J., "Applied Optimal Design", J. Wiley&Sons, 1979.
- [8] Herskovits, J. "Développement d'une Méthode Numérique pour l'Optimisation Non-linéaire" Thèse D. I. Univ. Paris, 1982.
- [9] COPPETEC "Projeto Otimo de Torres Auto-Portantes para Antenas de Telecomunicações" 1984.