

FORMULAÇÃO DE UM ELEMENTO FINITO PARA ANÁLISE ELÁSTICA
DE PLACAS E CASCAS

Boris K. Alves

José Herskovits

Programa de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ

Brasil

Edgardo Taroco

Raúl A. Feijóo

Laboratório Nacional de Computação Científica, CNPq

Brasil

RESUMO

Neste trabalho se apresenta a formulação de um elemento finito de 8 nós e 32 graus de liberdade para análise de cascas, empregando a teoria de Kirchhoff-Love, resultante da discretização do domínio seguindo as direções principais de curvatura da superfície média.

Posteriormente são mostrados resultados obtidos com este elemento na análise elastoestática de placas e cascas.

ABSTRACT

A Finite Element formulation for shell analysis based on Kirchhoff-Love theory is presented, employing an 8 node, 32 d.o.f. conforming element, derived assuming a discretization of the domain following the principal directions of the curvature of the middle surface.

Results of elastostatic analysis of plates and shells, using the derived element are also presented.

INTRODUÇÃO

Casca é um sólido tri-dimensional que se caracteriza por possuir uma de suas dimensões muito menor que as demais. Por conveniência definiremos a configuração Σ da casca a partir da superfície média Σ_m e de sua espessura h mediante uma relação entre os pontos X e Σ e os pontos correspondentes X_0 e Σ_m da superfície média:

$$\Sigma = \{X | X = X_0 + \zeta N, X_0 \in \Sigma_m, 2\zeta \leq |h|\}$$

onde:

$h=h(X_0)$ é a espessura da casca

$\zeta=\zeta(X, X_0)$ a distância entre X e X_0

$N=N(X_0)$ a normal unitária à superfície média no ponto X_0

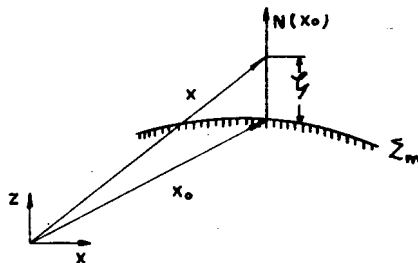


Fig. 1. Representação dos pontos da casca

Admitiremos que a superfície média é suficientemente regular de maneira que N está unívocamente definida em todo ponto de Σ_m e escolheremos o plano tangente e sua correspondente normal como base intrínseca em cada ponto X_0 e Σ_m [1].

Componentes na Base Intrínseca

Definindo v como o espaço vetorial euclidiano tridimensional e introduzindo os tensores projeção π e $n \otimes n$:

$$\pi: v \rightarrow v_t \quad ; \quad n \otimes n: v \rightarrow v_N$$

onde v_t é o "espaço tangente" e v_N o "espaço normal" à casca em X_0 .

As componentes de um campo vetorial $v \in v$ segundo o plano tangente e segundo a normal N resultam:

$$v_t = \pi v \quad \text{componente tangente de } v$$

$$v_N = (n \otimes n)v = (v \cdot N)N \quad \text{componente normal de } v$$

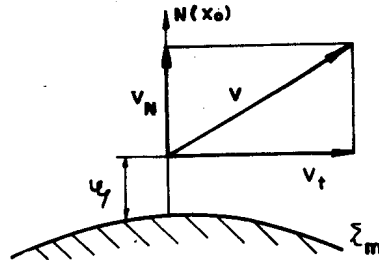


Fig. 2. Componentes vetoriais tangente e normal

Campo de Kirchhoff-Love

Um campo de ações de movimento sobre uma configuração de uma casca se denomina de Kirchhoff-Love, quando as normais à superfície média se mantêm normais a esta superfície sem experimentarem deformações. É possível mostrar [2,3] que um campo deste tipo pode ser expresso mediante:

$$v = v(X_0, \zeta) = v_{ot} + v_N N + \zeta (\nabla N v_{ot} - \nabla v_N) = v_0 + \zeta \theta$$

onde:

$\nabla(\cdot)$ representa o gradiente superficial

v_0 deslocamento de X_0

$v_{ot} = v_{ot}(X_0)$ componente tangente de v_0

$v_N = v_N(X_0)$ componente normal de v_0

$\theta = \nabla N v_{ot} - \nabla v_N$ giro da normal N

Dentro da teoria de Kirchhoff-Love [4], as integrais sobre a configuração Σ da casca, presentes quando analisamos seu equilíbrio global, podem se transformar em integrais sobre a superfície média Σ_m o que permite reduzir o problema a um problema bidimensional.

PROBLEMA DO EQUILÍBRIO ELASTO-ESTÁTICO

Dentro da primeira aproximação de Love [3] em que $I + \zeta \nabla N \approx I$ (onde I é o tensor identidade sobre o plano tangente) e para o caso de deformações infinitesimais ($E = (\nabla v)^S$), o problema do equilíbrio com condições homogêneas de contorno pode ser analisado mediante o seguinte problema variacional:

Determinar (v_{ot}, v_N) e W tal que:

$$\iint_{\Sigma_m} (N \cdot \epsilon + M \cdot \chi) d\Sigma_m = \iint_{\Sigma_m} (f_t \cdot v_{ot} + f_N v_N) d\Sigma_m \quad \text{para qualquer } (v_{ot}, v_N) \text{ e } W$$

donde:

N e M são os tensores esforço plano e momento (tensões generalizadas) dados pelas expressões:

$$N = \int_h T_t d\zeta \quad ; \quad M = \int_h T_t \zeta d\zeta$$

$T_t = \pi T \Pi$ é a parte plana do tensor de tensões T

ϵ, χ são os tensores deformação plana e mudança de curvatura da superfície média (deformações generalizadas), dados em função das componentes (v_{ot}, v_N) do deslocamento pelas relações:

$$\epsilon = (\pi \nabla v_{ot})^S + v_N \nabla N$$

$$\chi = (\pi [\nabla (\nabla N v_{ot} - \nabla v_N)])^S$$

com $(\cdot)^S$ estamos representando a parte simétrica do tensor (\cdot) .

f_t, f_N são as componentes intrínsecas da força externa uniformemente distribuída na superfície média Σ_m .

W é o espaço tal que seus elementos (v_{ot}, v_N) satisfaçam condições de contorno homogêneas e as integrais do princípio variacional possuem sentido.

No caso de materiais elásticos isotrópicos a relação constitutiva entre tensões generalizadas (N,M) e deformações generalizadas (ϵ, χ) es tá dada por:

$$N = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} [(1-\nu)\epsilon + \nu(\epsilon \cdot I)I]$$

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu)\chi + \nu(\chi \cdot I)I]$$

donde:

E, ν são o módulo de Young e o coeficiente de Poisson

$(\epsilon \cdot I)$ é o produto escalar dos tensores ϵ e I

COMPONENTES FÍSICAS DA DEFORMAÇÃO

Parametrizando-se a superfície média segundo as direções principais de curvatura (θ^1, θ^2) podemos definir uma base ortonormal para o espaço vetorial euclidiano v ao qual denominamos de base física. Denotando-se nesta base física por:

R_α , $\alpha=1,2$ os raios de curvatura principais da superfície média

$a_{\alpha\beta}$ tensor métrico associado à superfície média

$v_{ot}^{<\alpha>}$; $\alpha=1,2$ componentes físicas dos deslocamentos

e introduzindo as notações:

$$U = v_{ot<1>} \quad ; \quad V = v_{ot<2>} \quad ; \quad W = v_N$$

$$A = \sqrt{a_{11}} \quad ; \quad B = \sqrt{a_{22}}$$

as componentes físicas das deformações generalizadas (ϵ, χ) poderão ser expressas por:

$$\epsilon_{<11>} = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta^1}\right) \frac{1}{A} + \frac{V}{AB} \frac{\partial}{\partial \theta^2} (A) - \frac{W}{R_1}$$

$$\epsilon_{<22>} = \left(\frac{\partial V}{\partial \theta^2}\right) \frac{1}{B} + \frac{U}{AB} \frac{\partial}{\partial \theta^1} (B) - \frac{W}{R_2}$$

$$\epsilon_{<21>} = \epsilon_{<12>} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \theta^2}\right) \frac{1}{B} - \frac{V}{AB} \frac{\partial}{\partial \theta^1} (B) - \frac{U}{AB} \frac{\partial}{\partial \theta^2} (A) + \left(\frac{\partial V}{\partial \theta^1}\right) \frac{1}{A} \right\}$$

$$\chi_{<11>} = - \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta^1} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \theta^1} + \frac{U}{R_1} \right) + \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \theta^2} + \frac{V}{R_2} \right) \frac{\partial A}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$\chi_{<22>} = - \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta^1} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \theta^2} + \frac{V}{R_2} \right) + \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \theta^1} + \frac{U}{R_1} \right) \frac{\partial B}{\partial \theta^1} \right\}$$

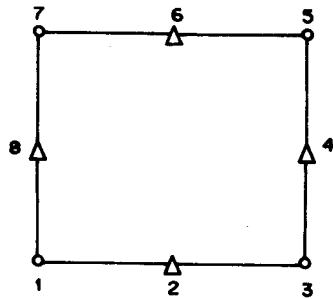
$$\begin{aligned} \chi_{<12>} = \chi_{<21>} = & - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \theta^1} + \frac{U}{R_1} \right) - \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \theta^2} + \frac{V}{R_2} \right) \frac{\partial B}{\partial \theta^1} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \theta^1} + \frac{U}{R_1} \right) \frac{\partial A}{\partial \theta^2} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta^1} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \theta^2} + \frac{V}{R_2} \right) \right\} \end{aligned}$$

ELEMENTO FINITO DESENVOLVIDO

Nos casos em que os raios de curvatura principais da superfície média da casca sejam suficientemente contínuos, para assegurar que as integrais da formulação variacional tenham sentido será necessário exigir que os deslocamentos nos planos tangentes U e V sejam contínuos (classe C^0) e que os deslocamentos normais W tenham derivadas contínuas (classe C^1) [5,6].

Como a geometria da casca está sendo dada em forma exata, adotou-se uma interpolação polinomial quadrática para os deslocamentos U e V (polinômios serendípticos, classe C^0) e cúbica para o deslocamento transversal W (polinômios de Hermite, classe C^1). Construiu-se um elemento retangular de 8 nós e 32 graus de liberdade (Fig. 3).

Na definição dos polinômios interpolantes, os elementos foram referidos a um domínio padrão como ilustra a Figura 4. Os polinômios interpolantes são fornecidos nas Tabelas I e II.



Graus de Liberdade:

$$(O): U, V, W, \frac{\partial W}{\partial \theta^1}, \frac{\partial W}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^1 \partial \theta^2}$$

$$(\Delta): U, V$$

Fig. 3. O elemento desenvolvido

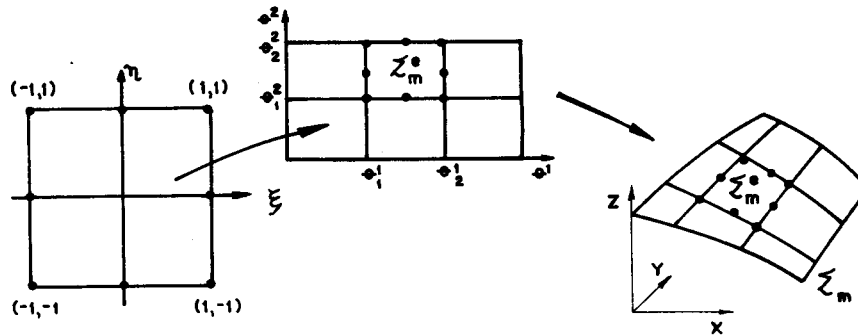


Fig. 4. Elemento de referência / discretização utilizada

POLINÔMIOS SERENDÍPTICOS

$$\psi_1(\xi, \eta) = (\xi - 1)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)/4$$

$$\psi_2(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = (1 + \xi)(\eta - 1)(1 - \xi + \eta)/4$$

$$\psi_4(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 + \eta^2)/2$$

$$\psi_5(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)/4$$

$$\psi_6(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2$$

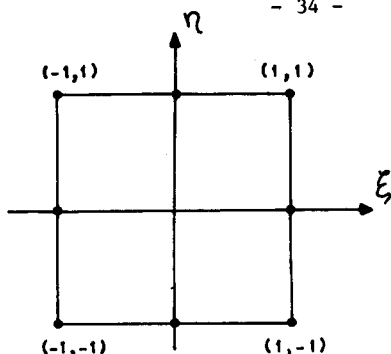
$$\psi_7(\xi, \eta) = (\xi - 1)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta)/4$$

$$\psi_8(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta^2)/2$$

Domínio de referência: $[-1, 1] \times [-1, 1]$

Graus de liberdade nodais: $\{(U^i, V^i); i = 1, 8\}$

TABELA I - Interpolação dos deslocamentos no plano tangente



Domínio de referência: $[-1, 1] \times [-1, 1]$

Graus de liberdade nodais: $\{(w^i, \frac{\partial w^i}{\partial \xi}, \frac{\partial w^i}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 w^i}{\partial \xi \partial \eta}), i = 1, 4\}$

Graus de liberdade nodais (nó i)	Polinômios interpolantes [Φ_i : Polinômios de Hermite]							
	nó 1		nó 3		nó 5		nó 7	
w^i	$\Phi_1(\xi)$	$\Phi_1(\eta)$	$\Phi_3(\xi)$	$\Phi_4(\eta)$	$\Phi_3(\xi)$	$\Phi_3(\eta)$	$\Phi_1(\xi)$	$\Phi_3(\eta)$
$\frac{\partial w^i}{\partial \xi}$	$\Phi_2(\xi)$	$\Phi_1(\eta)$	$\Phi_4(\xi)$	$\Phi_1(\eta)$	$\Phi_4(\xi)$	$\Phi_3(\eta)$	$\Phi_2(\xi)$	$\Phi_3(\eta)$
$\frac{\partial w^i}{\partial \eta}$	$\Phi_1(\xi)$	$\Phi_2(\eta)$	$\Phi_3(\xi)$	$\Phi_2(\eta)$	$\Phi_3(\xi)$	$\Phi_4(\eta)$	$\Phi_1(\xi)$	$\Phi_4(\eta)$
$\frac{\partial^2 w^i}{\partial \xi \partial \eta}$	$\Phi_2(\xi)$	$\Phi_2(\eta)$	$\Phi_4(\xi)$	$\Phi_2(\eta)$	$\Phi_4(\xi)$	$\Phi_4(\eta)$	$\Phi_2(\xi)$	$\Phi_4(\eta)$

Polinômios de Hermite

$$\Phi_1(s) = (1 - s)^2 (2 + s)/4$$

$$\Phi_2(s) = (1 - s)^2 (1 + s)/4$$

$$\Phi_3(s) = (1 + s)^2 (2 - s)/4$$

$$\Phi_4(s) = (s^2 - 1) (1 + s)/4$$

TABELA II - Interpolação do deslocamento ortogonal ao plano tangente

Na obtenção das matrizes de rigidez e do vetor de solicitações distribuídas elementares utilizou-se de integração numérica de Gauss. Embora o número de pontos de integração a serem utilizados na integração exata das matrizes de rigidez é dependente da superfície média analisada, evidenciou-se que 3×3 pontos de integração foram suficientes para garantir a boa convergência dos exemplos apresentados [7].

RESULTADOS

Descrevemos a seguir alguns exemplos comparando os resultados numéricos obtidos com os fornecidos por outros autores.

Analisamos inicialmente uma placa retangular engastada sob carregamento diferencial. Têm-se como objetivo testar o comportamento do elemento (malha 1×1) quanto à torção sob mudança da relação de aspecto (veja gráfico I). Uma análise comparativa com outros elementos existentes na literatura pode ser realizada através dos resultados apresentados em [8].

Um exemplo de placa circular com orifício foi analisado e comparado com soluções analíticas fornecidas em [9]. Ótimos resultados foram obtidos conforme se pode verificar nos gráficos II e III.

Efetou-se uma análise de convergência com o refinamento da malha estudando-se uma casca cilíndrica sob carregamento concentrado ("Pinched Cylinder"). Evidenciou-se uma convergência monótona dos resultados numéricos à solução de G. Cantin, fornecida em [10], como ilustra a tabela III.

Um exemplo de casca cilíndrica sob peso próprio ("barrel vault") foi analisado e os resultados numéricos foram comparados com os fornecidos em [11]. Bons resultados foram obtidos conforme ilustra os gráficos IV-VI.

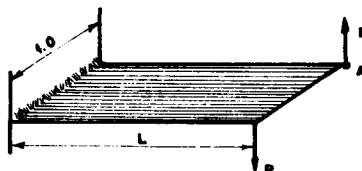
Conforme Ashwell [10], estes dois últimos exemplos são considerados padrões para testes de elementos de cascas. Os resultados obtidos certamente confirmam o bom desempenho do elemento desenvolvido.

Terminando esta análise, apresentamos um exemplo de uma casca toroidal sob pressão interna constante. Uma solução analítica, mediante a teoria de membrana, é apresentada em [9]. Apesar da simplicidade do exemplo, pudemos testar o comportamento do elemento em um caso típico de cascas de dupla curvatura, variável ao longo dos elementos (veja gráfico VII).

REFERÊNCIAS

- [1] Valid, R., "Mechanics of Continuous Media and Analysis of Structures". North-Holland, 1981.
- [2] Destuynder, P., "Introduction à la theorie des coques minces elastiques, Analyse numérique des problèmes de coques minces, Description des Resultats et Exemples". INRIA, 1981.
- [3] Taroco, E. e Feijóo, R.A., "Teoria de Placas e Cascas", Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Teoria das Cascas e suas Aplicações na Engenharia, Módulo II, LCC, 1983.
- [4] Alves, B.K., "Um Elemento Finito para Placas e Cascas Usando a Teoria de Kirchhoff-Love", Tese de M.Sc. em Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ, Julho 1985.
- [5] Oden, J.T., "Finite Elements of Nonlinear Continua", Mc Graw-Hill, 1972.

PLACA RETANGULAR SOB CARREGAMENTO DIFERENCIAL



PROPRIEDADES:

módulo de Young = $10^7 \cdot \text{lb}_f / \text{in}^2$

coeficiente de Poisson = 0,25

espessura = 0,05 in

$P = 1,0 \text{ lb}_f$

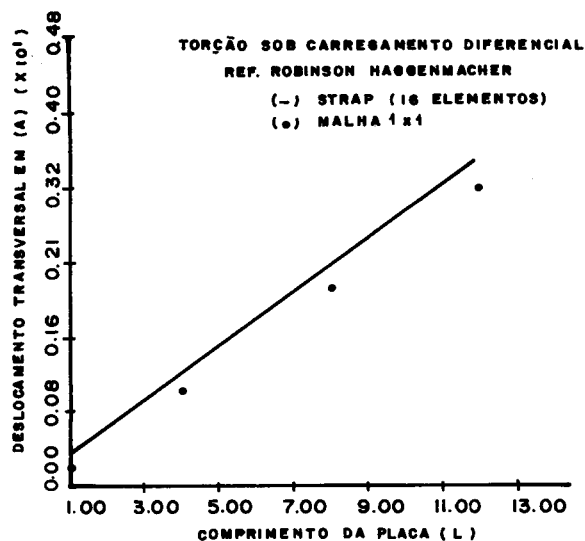
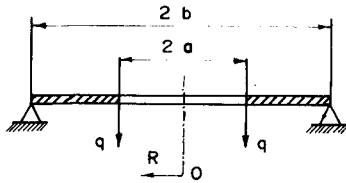


GRÁFICO I: COMPORTAMENTO DO ELEMENTO QUANTO À TORÇÃO (carregamento diferencial). COMPRIMENTO DA PLACA (L) x DESLOCAMENTO TRANSVERSAL EM (A).



Propriedades:
 Módulo de Young $E = 21,000 \text{ kgt/cm}^2$
 Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$
 Espessura $h = 0,25 \text{ cm}$
 Raio externo $b = 20 \text{ cm}$
 Raio interno $a = 10 \text{ cm}$
 Carregamento $q = 6/\pi \text{ kgt/cm}$

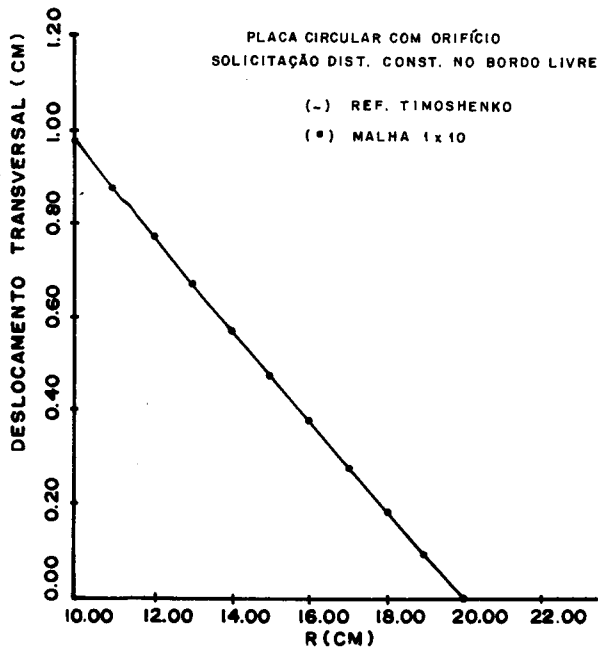


GRÁFICO II: DESLOCAMENTO TRANSVERSAL W (cm)

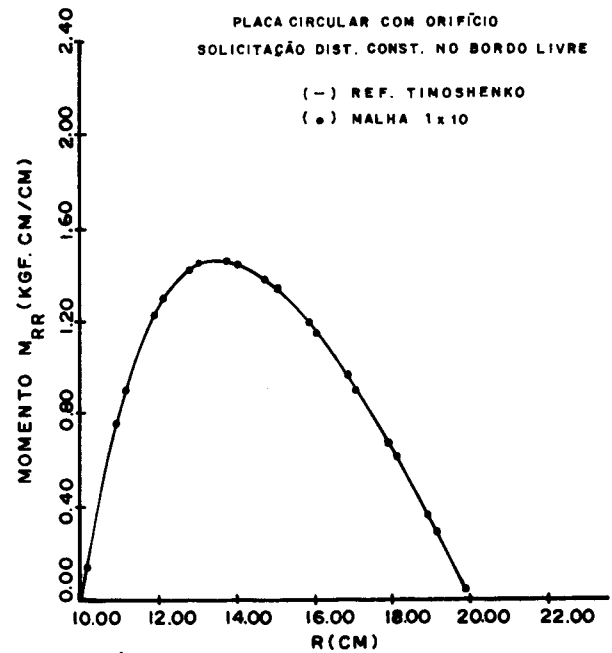
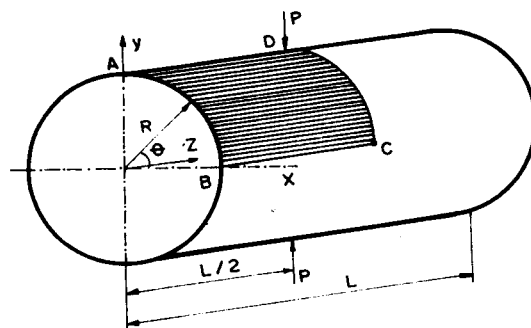


GRÁFICO III: MOMENTO GENERALIZADO M_{RR}

CILINDRO SOB CARREGAMENTO CONCENTRADO ("PINCHED CYLINDER")



Propriedades:

Longitude	$L = 10,35$ in
Raio	$R = 4,953$ in
Módulo de Young	$E = 10,5 \times 10^6$ lbf. in ⁻²
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3125$
Espessura	$t = 0,094$ in
Carregamento	$P = 100$ lbf

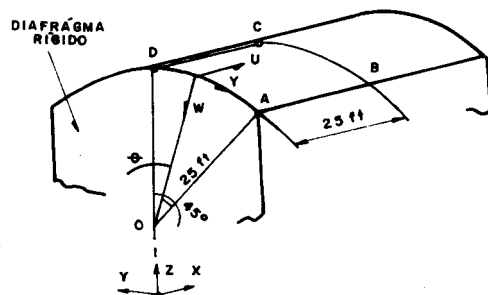
TABELA III - Cilindro sob carregamento concentrado ("Pinched Cylinder"). Malha de elementos finitos, número de graus de liberdade, deslocamento transversal sob a solicitação concentrada (W(D)) e erro em relação à solução de G. CANTIN [10] (W(D) = 0,1139 in).

Malha (1/8 cilindro)*	W(D)	Erro
1x4 (55 G.L.)	$4,3008 \times 10^{-2}$	62,2 %
4x4 (175 G.L.)	$4,4307 \times 10^{-2}$	61,6 %
8x8 (671 G.L.)	$1,0175 \times 10^{-1}$	10,7 %
3x20 (679 G.L.)	$1,1270 \times 10^{-1}$	1,05%
3x30 (1019 G.L.)	$1,1297 \times 10^{-1}$	0,81%

(*) malha axb (1/8 cilindro):

$(0,0 \leq z \leq 5,175$ in ; $0 \leq \theta \leq 90^\circ$), elementos iguais

CASCA CILINDRICA SOB PESO PRÓPRIO (BARREL VAULT)



PROPRIEDADES

módulo de Young = $3,0 \times 10^6 \text{ lb}_f / \text{in}^2$
 coeficiente de Poisson = 0,0
 peso específico = $90 \text{ lb}_f \cdot \text{ft}^{-2}$

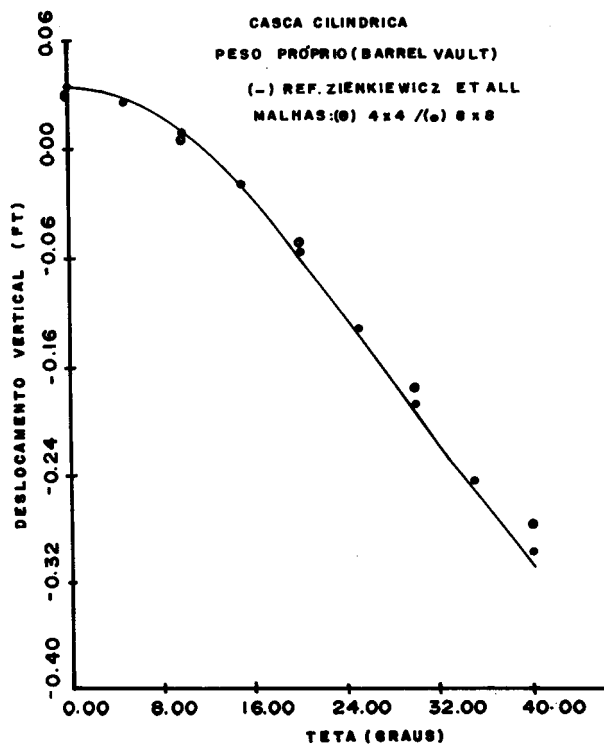


GRÁFICO IV: DESLOCAMENTO VERTICAL (ft)
 SOB A SESSÃO CENTRAL \overline{BC}

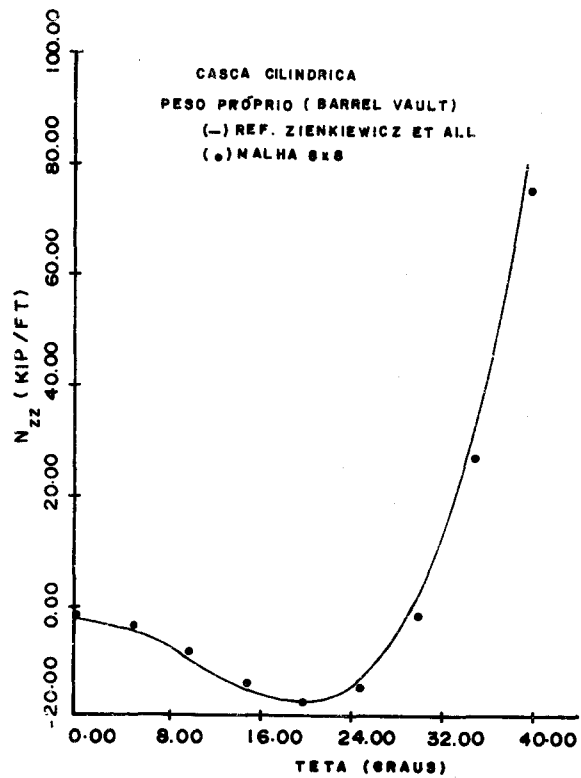


GRÁFICO V: TENSÃO GENERALIZADA N_{zz}
SOB A SESSÃO CENTRAL BC

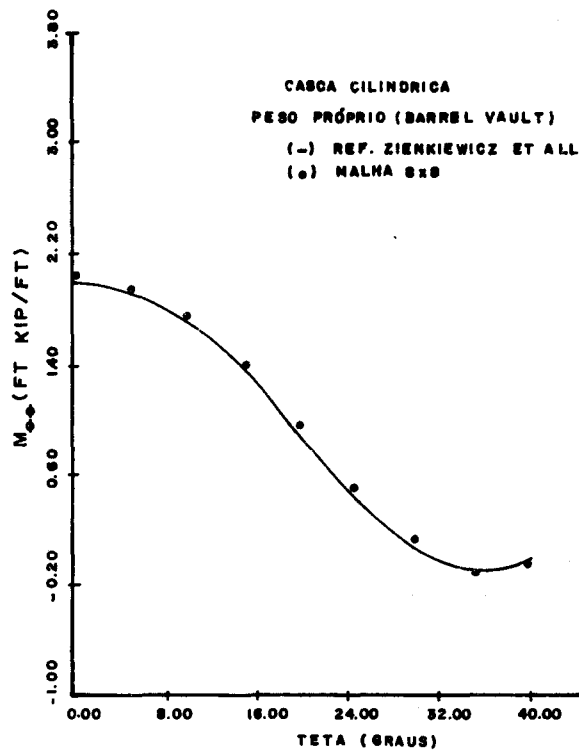
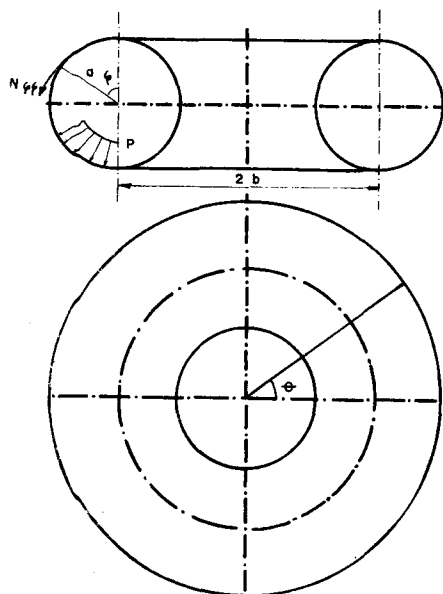


GRÁFICO VI: MOMENTO GENERALIZADO $M_{\theta\theta}$
SOB A SESSÃO CENTRAL BC.

CASCA TOROIDAL. PRESSÃO INTERNA CONSTANTE



PROPRIEDADES:

módulo de Young = 21.000 Kgf/cm²
 coeficiente de Poisson = 0,3
 raio (a) = 5,0 cm. raio (b) = 20,0 cm
 espessura (H) = 0,1 cm
 pressão interna (P) = 1,0 Kgf/cm²

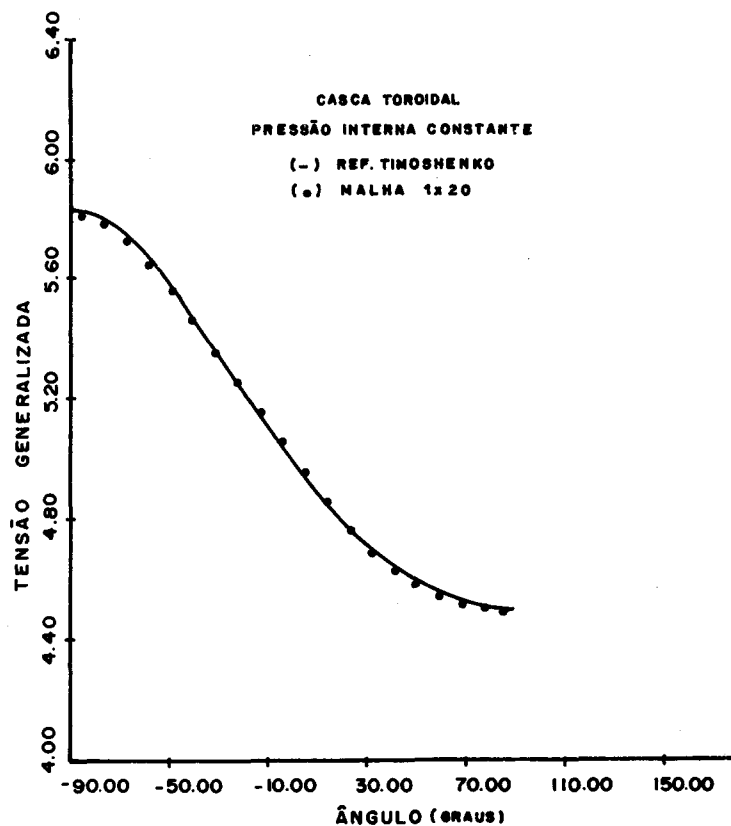


GRÁFICO VII: TENSÃO GENERALIZADA N_{φφ} (Kgf. cm/cm²)

- [6] Feijóo, R.A. e Taroco, E., "Principios Variacionales y el Método de los Elementos Finitos en la Teoría de Placas y Cáscaras", Curso de Mecánica Teórica e Aplicada, Teoría das Cascas e suas Aplicações na Engenharia, Módulo II, LCC, 1983.
- [7] Dhatt, G. e Touzhot, G., "Une présentation de la méthode des éléments finits", Maloine-Presses de l'Université Laval, 1981.
- [8] Robinson, J. e Haggemacher, G., "Lora, an accurate four nodes stress plate bending element", Int. Num. Meth. Engng., 14(2), 1979, págs. 296-306.
- [9] Timoshenko, S.P. e Woinowsky-Krieger, S., "Theory of plates and shells", Mc Graw-Hill, 1959.
- [10] Ashwell, D.G., "Strain Elements, with Applications to Arches, Rings and Cylindrical Shells, Chap. 6, Finite Elements for Thin Shells and Curved Members", ed. Ashwell, D.G. & Gallagher, R.H., John Wiley, 1976.
- [11] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. e Too, J.M., "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells", Int. Jor. for Num. Meth. in Eng., vol. 3, 1971, págs. 275-290.