

MATRIZ DE CAPACIDAD DE INTERFASE  
EN PROBLEMAS TERMICOS CON CAMBIO DE FASE

Mario A. Storti

Luis A. Crivelli

Sergio R. Idelsohn

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria  
Química  
CONICET-Universidad Nacional del Litoral.  
Santa Fe - Argentina.

RESUMEN

La formulación débil por elementos finitos del problema de transmisión del calor con cambio de fase lleva a la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales en las temperaturas en cada paso de tiempo. Cuando el calor latente es comparativamente alto la elección de una buena aproximación a la matriz tangente es crítica. En este trabajo se deriva una expresión para la matriz tangente exacta. Se desarrolla un método para calcularla y se analiza el comportamiento de los términos que la componen para los diferentes rangos de valores que pueden tomar los parámetros físicos del sistema. Finalmente, se presentan ejemplos numéricos.

ABSTRACT

Using weak formulations and finite elements to solve heat conduction problems with phase change requires the resolution of a non-linear system of equations in the nodal temperatures at each time step. The choice of a good approximation to the tangent matrix is critical when the latent heat is comparatively large. In this work we derive an exact expression for the tangent matrix. We develop a method to calculate this matrix and analyze the behaviour of its terms for different values of the physical parameters of the system. Finally, several numerical examples are shown.

1.0 INTRODUCCION

Sea el problema de conducción del calor con cambio de fase [1], [2] y [3]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \nabla \cdot \underline{q} + Q \quad (1)$$

donde:

$$h = \left\{ \int_{T_0}^T \rho \cdot Cp(T) dT + h_0 \right\} + L \epsilon (T - T_m) = h^{SCF} + h^{CF} \quad (2.a)$$

$$\epsilon (T - T_m) = \begin{cases} 0 & ; \text{ si } T < T_m \\ 1 & ; \text{ si } T > T_m \end{cases} \quad (2.b)$$

$\underline{q} = -k\nabla T =$  flujo calórico.

$k =$  conductibilidad térmica.

$Q =$  generación de calor por unidad de volumen, unidad de tiempo. (3)

Aplicando el método de Galerkin hacemos:

$$T = \sum_{\mu=1}^N T_{\mu} N_{\mu}(\underline{x})$$

$N =$  número de nodos

Obtenemos las  $N$  ecuaciones pesando la ecuación (1) con las  $N$  funciones de forma  $N_{\mu}(\underline{x})$

$$\int_{\Omega} N_{\mu}(\underline{x}) \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{q} - Q \right\} d\Omega = 0 \quad ; \quad \mu = 1, 2, \dots, N$$

Integrando por partes obtenemos, cuando no hay cambio de fase, la formulación débil del problema [4], [5]:

$$\dot{h}_{\mu} = f_{\mu} + g_{\mu} \quad (5)$$

Donde:

$$h_{\mu} = \int_{\Omega} N_{\mu}(\underline{x}) h(T(\underline{x})) d\Omega \quad (6)$$

$$f_{\mu} = \int_{\Omega} \nabla N_{\mu}(\underline{x}) \cdot \underline{q} d\Omega \quad (7)$$

$$g_{\mu} = \int_{\Omega} N_{\mu}(\underline{x}) \underline{q} d\Omega + \int_{\Gamma} N_{\mu} \underline{q} \cdot \hat{n} db \quad (8)$$

$h_\mu$ ,  $f_\mu$  y  $g_\mu$  representan físicamente la entalpía nodal del nodo  $\mu$ , el flujo de conducción al nodo  $\mu$  y el flujo externo aplicado al nodo  $\mu$ . Esta misma formulación sigue siendo válida en presencia de un cambio de fase. Basta con agregar a la ecuación 4 el balance de energía en la interfase pesado convenientemente con la función  $N_\mu(x)$ . La expresión para la entalpía nodal se convierte entonces en una integral de una función discontinua sobre el elemento, en aquellos elementos por los cuales pasa la interfase. Para efectuar esta integral en forma numérica deben aplicarse técnicas especiales de integración [6], [7] y [8].

Una de las formas más comunes de integrar temporalmente la ecuación anterior es poner:

$$\dot{h}_\mu = \frac{h_\mu(t + \Delta t) - h_\mu(t)}{\Delta t} \quad (9)$$

$$g_\mu = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} g_\mu(t') dt' \quad (10)$$

$$f_\mu = f_\mu(t + \alpha \Delta t) = (1 - \alpha) f_\mu(t) + \alpha f_\mu(t + \Delta t) \quad (11)$$

Estos son los llamados métodos  $\alpha$ .

Reordenando y reemplazando en la ecuación (5) obtenemos:

$$\left\{ \frac{h_\mu(t + \Delta t)}{\Delta t} - \alpha f_\mu(t + \Delta t) \right\} = g_\mu + (1 - \alpha) f_\mu(t) + \frac{h_\mu(t)}{\Delta t} \quad (12)$$

Si conocemos el valor de las temperaturas nodales en  $t$ , la ecuación (12) representa un conjunto de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas que son las temperaturas nodales en  $t + \Delta t$ , que se puede representar en la forma:

$$\underline{C}(\underline{T}(t + \Delta t)) = \underline{G}(\underline{T}(t)) \quad (13)$$

Donde  $\underline{T}$  es el vector de temperaturas nodales de dimensión  $n$ , y  $\underline{C}$ ,  $\underline{G}$  son mapeos:

$$\underline{C}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad ; \quad \underline{G}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (14)$$

La solución habitual a este problema no lineal es: conociendo una aproximación  $\underline{x}^i$  al vector  $\underline{T}(t + \Delta t)$  buscar una solución más aproximada  $\underline{x}^{i+1}$  como:

$$\underline{x}^{i+1} = \underline{x}^i + \Delta \underline{x}^i \quad (15)$$

$$\underline{C}(\underline{x}^i) + \underline{K}_{\underline{T}} \Delta \underline{x}^i = \underline{G}(\underline{T}(t))$$

$$[\underline{K}_{\underline{T}}]_{\mu\nu} = \frac{\partial C_\mu}{\partial T_\nu}$$

que representa un sistema lineal de ecuaciones de  $n \times n$  que se puede resolver si la matriz  $K_T$  es inversible.

Si bien la parte de la matriz tangente que corresponde a los flujos de conducción no presenta ninguna dificultad, la parte de las entalpías nodales encierra una irregularidad al ser  $h(T)$  discontinua en  $T = T_m$  la temperatura de cambio de fase. Más todavía separando las entalpías nodales en dos términos:

$$h_\mu = h_\mu^{SCF} + h_\mu^{CF} = \int N_\mu h^{SCF} d\Omega + \int N_\mu h^{CF} d\Omega \quad (16)$$

Vemos que  $h^{SCF}$  corresponde a la entalpía nodal de un problema, eventualmente no lineal, pero sin cambio de fase y por lo tanto no hay problemas en el cálculo de las derivadas:  $\partial h_\mu^{SCF} / \partial T_v$ . Por lo tanto el problema reside en el cálculo, si es que existe, de  $\partial h_\mu^{CF} / \partial T_v$ .

## 2.0 ENTALPIA NODAL DEBIDA AL CAMBIO DE FASE

Poniendo:

$$h_\mu^{CF} = \int N_\mu(\underline{x}) L \epsilon (T - T_m) d\Omega \quad (17)$$

y derivando con respecto a  $T_v$  en el sentido de las distribuciones:

$$\frac{\partial h_\mu^{CF}}{\partial T_v} = \int N_\mu(\underline{x}) L \frac{d\epsilon}{dT} \frac{\partial T(\underline{x})}{\partial T_v} d\Omega = \int N_\mu L \delta(T - T_m) N_{v_j}(\underline{x}) d\Omega \quad (18)$$

donde  $\delta(T - T_m)$  es la función impulso de Dirac:

$$\int_T^{T_2} \delta(T - T_m) dT = \begin{cases} 1 & ; \text{ si } T_m \in [T_1, T_2] \\ 0 & ; \text{ si } T_m \notin [T_1, T_2] \end{cases} \quad (19)$$

Ahora usamos la relación (Courant, [9]):

$$\int f(\underline{x}) \delta(T - T_m) d\Omega = \int_{T=T_m} \frac{f(\underline{x})}{|\nabla T|} dS \quad (20)$$

Llegando a:

$$\frac{\partial h_\mu^{CF}}{\partial T_v} = \int_{T=T_m} N_\mu(\underline{x}) N_{v_j}(\underline{x}) L \frac{db}{|\nabla T|} \quad (21)$$

Veamos que la influencia de la interfase en la matriz de masa es equivalente al de una inercia concentrada de magnitud  $L/|\nabla T|$  por unidad de longitud de la interfase  $dS$ . La interpretación física de este resultado se puede interpretar a la luz de la aproximación "pastosa"

(mushy) es decir, suponiendo que el cambio de fase se hace en un intervalor de temperatura  $\Delta T$  (ver figura 1).

Obtenemos una variación de  $cp$  con la temperatura como en la figura 2. La matriz  $\partial h_{\mu}^{\Delta T} / \partial T_{\nu}$  será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{\mu}^{\Delta T}}{\partial T_{\nu}} &= \int cp^{\Delta T} N_{\mu}(\underline{x}) N_{\nu}(\underline{x}) d\Omega \\ &= \int cp N_{\mu}(\underline{x}) N_{\nu}(\underline{x}) d\Omega + \int (cp^{\Delta T} - cp) N_{\mu}(\underline{x}) N_{\nu}(\underline{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (22)$$

$$cp^{\Delta T} - cp = \begin{cases} \left[ h(T_m + \frac{\Delta T}{2}) - h(T_m - \frac{\Delta T}{2}) \right] \frac{1}{\Delta T} - cp & ; \quad |T - T_m| < \frac{\Delta T}{2} \\ 0 & ; \quad \text{si} \quad |T - T_m| > \frac{\Delta T}{2} \end{cases} \quad (23)$$

El 1er. término es la matriz  $\partial h_{\mu}^{SCF} / \partial T_{\nu}$ . La segunda es una contribución que sólo proviene de la región  $\Omega_{\Delta T}^{\mu}$  cuya temperatura está comprendida en el intervalo:  $|T - T_m| < \Delta T/2$ .

$$\left( \frac{\partial h_{\mu}^{\Delta T}}{\partial T_{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu}^{SCF}}{\partial T_{\mu}} \right) = \int_{\Omega_{\Delta T}^{\mu}} (cp^{\Delta T} - cp) N_{\mu} N_{\nu} d\Omega \quad (24)$$

En la figura 3 vemos que, cuando hacemos el límite  $\Delta T \rightarrow 0$ , tenemos:

$$d\Omega \rightarrow \frac{\Delta T}{|\nabla T|} dS \quad \text{y} \quad (cp^{\Delta T} - cp) \rightarrow \frac{L}{\Delta T} \quad (25)$$

de forma que:

$$\left( \frac{\partial h_{\mu}^{\Delta T}}{\partial T_{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu}^{SCF}}{\partial T_{\nu}} \right) \xrightarrow{\Delta T \rightarrow 0} \int_{T=T_m} N_{\mu} N_{\nu} \frac{L}{\Delta T} \frac{\Delta T dS}{|\nabla T|} \quad (26)$$

Los resultados numéricos demuestran que la inclusión de este término no incrementa notablemente la convergencia a la solución de la ecuación (13). Además el cálculo debe hacerse sólo en aquellos elementos por los cuales pasa la interfase, lo que implica que para un problema de grandes dimensiones ( $N \gg 1$ ) el cálculo de este término es despreciable con respecto al cálculo de toda la matriz.

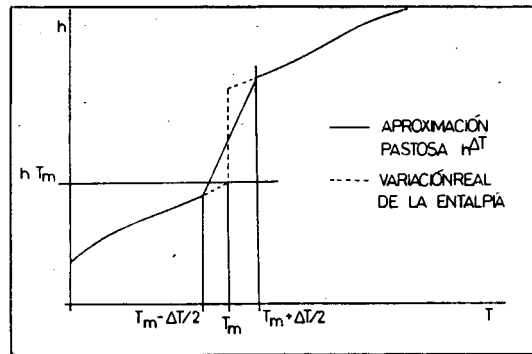


Figura 1: Variación de la Entalpía

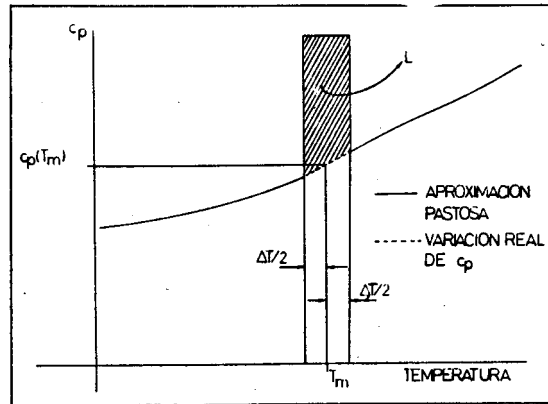


Figura 2: Variación de  $c_p$

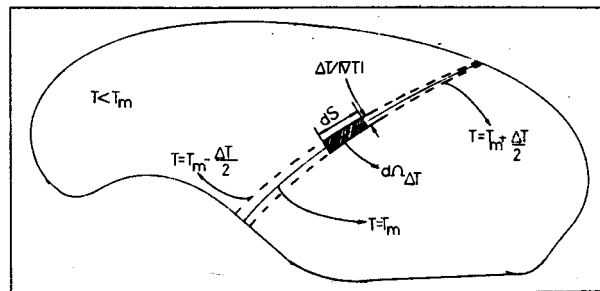


Figura 3: Aproximación Pastosa

### 3.0 CONVERGENCIA DEL SISTEMA ITERATIVO

Consideremos, por ejemplo una estructura muy simple de dos elementos lineales y tres nodos, estando las temperaturas de los extremos fijos a  $T_1 > 0$  y  $T_3 < 0$ . El sistema tiene por lo tanto un solo grado de libertad, la temperatura nodal  $T_2$  (ver figura 4).

En este caso la contribución  $h_2^{CF}$  es:

$$\int_{-1}^1 h_2^{CF} N_2 dx = \int_{-1}^{x_i} L N_2 dx = L \left\{ \frac{1}{2} + x_i \left[ 1 - \frac{|x_i|}{2} \right] \right\} 1 \quad (27)$$

Donde  $x_i$  es la posición de la interfase:

$$x_i = \begin{cases} T_2 / (T_2 - T_3) & \text{si } T_2 > 0 \\ T_1 / (T_1 - T_2) & \text{si } T_2 < 0 \end{cases} \quad (28)$$

Vemos que  $h_2^{CF}$  tiene dos pendientes, según por que lado se haga tender  $T_2 = 0$ . Esto se puede entender fácilmente a la luz de la expresión para la matriz tangente en la ecuación (21) ya que en este caso en que las temperaturas nodales son  $T_1, 0, T_3$  esta expresión se transforma en:

$$\frac{\partial h_2^{CF}}{\partial T_2} = \frac{N_2(x_i) N_2(x_i) L}{|VT|} \quad (30)$$

Haciendo  $T_2 \rightarrow 0$  entonces  $x_i \rightarrow 0$ ,  $N_2 \rightarrow 1$  y

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \begin{cases} \frac{L1}{-T_3} ; & T_2 > 0 \\ \frac{L1}{T_1} ; & T_2 < 0 \end{cases} \quad (31)$$

de donde:

$$\frac{\partial h_2^{CF}}{\partial T_2} = \begin{cases} \frac{L1}{-T_3} ; & T_2 > 0 \\ \frac{L1}{T_1} ; & T_2 < 0 \end{cases} \quad (32)$$

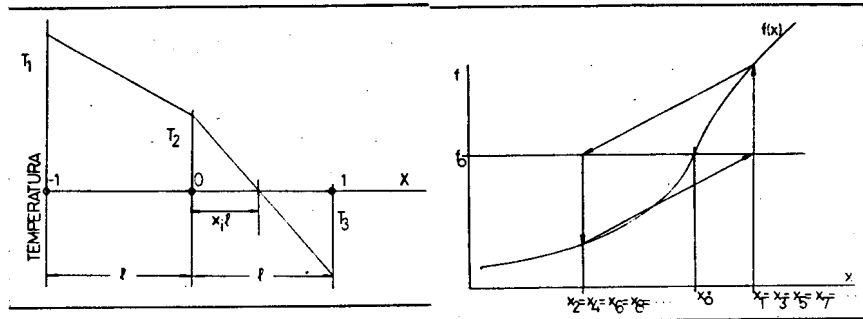


Figura 4: Estructura Analizada

Figura 6: Trampa Numérica  $\alpha = 1$

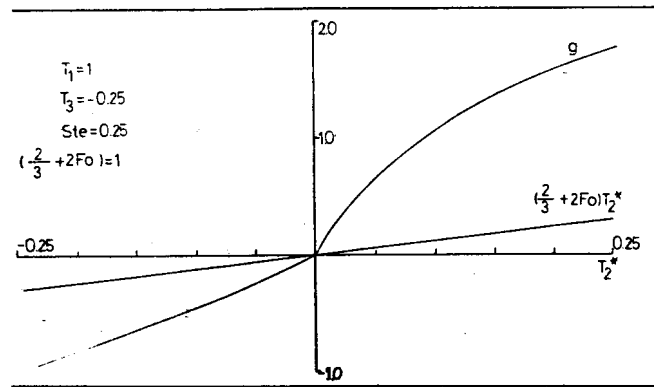


Figura 5: Entalpía Nodal

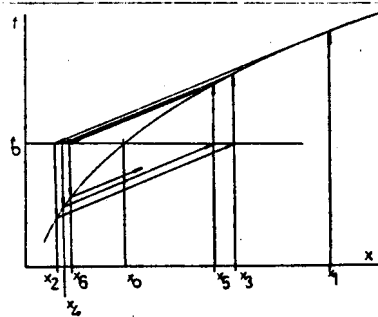


Figura 7:  $\alpha \approx 1$

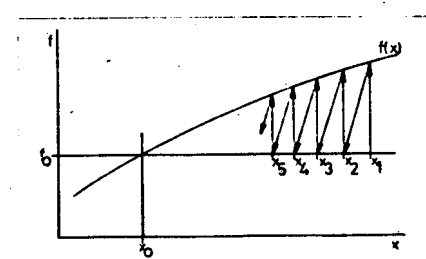


Figura 8:  $\gamma \approx 1$



La contribución  $h_2^{SCF}$  a la entalpía y el flujo de conducción al nodo  $f_2$  son:

$$h_2^{SCF} = \rho \text{ cp } l \left[ \frac{2}{3} T_2 + \frac{1}{6} (T_1 + T_3) \right]$$

$$f_2 = [T_1 + T_3 - 2T_2] k_2/l$$

de forma que la ecuación de equilibrio para el nodo 2 se escribe:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ \rho \text{ cp } \frac{2}{3} T_2 + h_2^{CF} \right] + 2 \frac{T_2 k}{\rho} = - \frac{\rho \text{ cp } l}{\Delta t} \frac{1}{6} (T_1 + T_3) + (T_1 + T_3) k_2 + g_2$$

Donde se ha supuesto  $\alpha = 1$  (método implícito puro para simplificar).

Adimensionalizando:

$$g(T_2^*) = \frac{2}{3} T_2^* + \text{Ste}^{-1} x_i \left( 1 - \frac{|x_i|}{2} \right) + 2 \text{Fo} T_2^* = A \quad (34)$$

$$T_2^* = T_2 / (T_1 - T_3) \quad ; \quad \text{Fo} = \frac{k \Delta T}{\rho \text{ cp } l^2} \quad ; \quad \text{Ste} = \frac{\rho \text{ cp } (T_1 - T_3)}{L}$$

Fo y Ste son los números adimensionales de Fourier y Stefan respectivamente. Si  $\text{Ste} \gg 1$  la resolución de la ecuación está gobernada por los dos términos restantes lineales. Por otra parte si  $\text{Fo} \gg \text{Ste}^{-1}$  la resolución está gobernada por el último término de conducción, debido a que, por ejemplo, se ha elegido un paso de tiempo muy grande.

En la figura 5 se observa el valor que toma g para un dado valor de Ste y Fo.

Los resultados obtenidos en el ejemplo precedente permiten explicar el comportamiento del algoritmo de resolución de la ecuación 15, cuando el sistema tiene muchos más grados de libertad. Efectivamente, cuando no se incluye en la matriz de masa el término debido al cambio de fase el residuo  $R_i = C_{ii} - G_{ii}$  baja rápidamente a 0 en aquellos nodos que no están conectados a un elemento por donde pasa la interfase, mientras que en aquellos nodos que si están conectados a un tal elemento, el residuo se mantiene comparativamente alto y va bajando en forma típica de un proceso secante, es decir  $\|R^{i+1}\| = C \|R^i\|$ , a diferencia de un proceso tangente donde  $\|R^{i+1}\| = C \|R^i\|^2$ .

Esto es un claro indicio de que no se cuenta con la matriz tangente sino con una aproximación a ésta. El comportamiento del residuo en los nodos cercanos a la interfase es similar al del nodo 2 de la estructura simple analizada anteriormente.

Es bien conocido el hecho de que dada una función  $f(x)$  monótona creciente:

$$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow [f(a), f(b)] \subset \mathbb{R} \quad (35)$$

$$f(x_1) < f(x_2) \leftrightarrow x_1 < x_2$$

es posible resolver la ecuación  $f(x) = f_0$  para todo  $f(a) < f_0 < f(b)$  mediante el esquema iterativo (Atkinson, [10]):

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x_i) - f_0}{k} \quad (36)$$

si y sólo si:

$$|f(x_2) - f(x_1)| > (1 - \gamma) k |x_2 - x_1| \quad ; \quad 0 < \gamma < 1 \quad (37)$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| < (1 + \alpha) k |x_2 - x_1| \quad ; \quad 0 < \alpha < 1$$

Además en este caso la aproximación está acotada:

$$|x^{i+1} - x_0| < \max(\gamma, \alpha) |x^i - x_0|$$

Si  $\alpha = 1$  para algún par de valores  $x_1, x_2$  entonces el esquema puede caer en una "trampa" (ver figura 6) o si la pendiente cerca de la solución es caso  $2k$  entonces la convergencia puede ser muy pobre, como en el caso de la figura 7. Esto también puede pasar si la pendiente es muy chica comparada con  $k$  (ver figura 8) o sea  $\gamma$  casi igual a 1.

En nuestro caso, si no incluimos la matriz debido al cambio de fase  $\partial h_2^{CF} / \partial T_2$  estamos iterando con un  $k = 2(1/3 + F_0)$ . El valor máximo de la derivada en el intervalo será:

$$2(1/3 + F_0) + St_e^{-1} \max \left\{ \left. \frac{dx_i}{dT_2} \right|_{x_i \rightarrow 0^+}, \left. \frac{dx_i}{dT_2} \right|_{x_i \rightarrow 0^-} \right\} (T_1 - T_3) =$$

$$2(1/3 + F_0) + St_2^{-1} (T_1 - T_3) / \min \left\{ |T_1|, |T_3| \right\} \quad (38)$$

Como el término debido al cambio de fase es monótono creciente  $\gamma = 0$  es decir que no puede haber problemas del tipo de la figura 8.

Entonces la condición para que el esquema sea convergente para este problema simple es:

$$2(1/3 + F_0) > St_e^{-1} (T_1 - T_3) / \min \left\{ |T_1|, |T_3| \right\} > St_e^{-1} / 2 \quad (39)$$

A pesar de la simplicidad con que fue derivada esta condición de convergencia, expresa los inconvenientes generales de problemas con muchos más nodos. Si  $Ste < Ste_{crit}$  (en este caso  $Ste_{crit} = 3/4$ ) el esquema será convergente sólo en el caso  $F_0 > F_{0,min}$  que implica una cota mínima para el paso de tiempo  $t$  o un tamaño máximo para la malla. Además el sistema se puede hacer inestable cuando la interfase pasa muy cerca de un nodo y el gradiente de temperatura de un lado de la interfase es muy diferente que del otro lado, debido al factor que contiene las temperaturas en el denominador.

Todo esto ha llevado a implementar métodos Quasi-Newton o de line-search para mejorar la convergencia. Sin embargo la inclusión del término no propuesto en este trabajo a la matriz de masa es relativamente poco costoso, ya que sólo exige la evaluación de una matriz en aquellos elementos por donde pasa la interfase, e induce una convergencia cuadrática. Es de notar que, para obtener una convergencia cuadrática, la corrección a la matriz tangente debe hacerse en cada iteración. Debe tenerse especial cuidado al implementar estrategias que actualizan la matriz tangente sólo si el residuo es mayor que una cota dada ya que si bien el vector  $h_{CF}$  es continuo, sus derivadas son discontinuas en aquellos puntos en que algún nodo cambia de fase, como el punto  $T_2 = 0$  en la figura 5. Entonces si una vez que se redujo al residuo por debajo de esta cota algún nodo cambia de fase, la matriz con la que se itera puede pasar a ser sensiblemente diferente a la matriz tangente. Una estrategia mejor sería actualizar la matriz tangente mientras el residuo es mayor que una cota dada o cuando algún nodo cambia de fase, hecho que es bastante simple y rápido de verificar ya que sólo hay que comparar los signos de las temperaturas nodales en dos iteraciones sucesivas al actualizar el vector de temperaturas.

#### 4.0 EJEMPLOS

Se ha comprobado la efectividad de esta modificación en un gran número de casos. En la figura 9 puede observarse un histograma donde se compara la convergencia con y sin matriz de interfase para una estructura simple que consiste en una barra de longitud  $l$ ,  $\rho c_p = k = 1$ ,  $T_m = -1$ . La barra está inicialmente a  $T(X, 0) = 0$  y a  $t = 0$  impone mos en un extremo  $T(0, t) = -2$ . Se han hecho experiencias numéricas para diferentes  $L(=Ste^{-1})$  y  $\Delta t(=F_0)$ . En la figura cada histograma representa una experiencia para un dado  $\Delta t$  y  $L$ . Para cada paso de tiempo se dibuja una columna vacía cuya altura representa el número de iteraciones necesarias para hacer converger ese paso de tiempo a un residuo  $R < 10^{-6}$ , donde el residuo normalizado  $R$  se define por:

$$R = \frac{\| \underline{R} \|}{\| \underline{f} \|} \quad (40)$$

Las sucesivas columnas en cada histograma corresponden a sucesivos pasos de tiempo dentro de la misma experiencia. Las columnas truncadas son pasos de tiempo en los cuales la convergencia no se alcanzó dentro de las primeras 30 iteraciones. Cuando el comportamiento del residuo fue tal que permitía predecir que la convergencia no se iba a producir ni siquiera para un número de iteraciones mayor que 30 (como en la figura 10.b) se le colocó un símbolo  $\infty$ .

En los histogramas se observa que el comportamiento del esquema mejora drásticamente con la adición de la matriz de capacidad de la interfase. En las figuras 10 y 11 se observa un gráfico logarítmico del residuo para cada paso de tiempo. Allí se puede observar claramente la convergencia cuadrática del residuo con matriz de interfase.

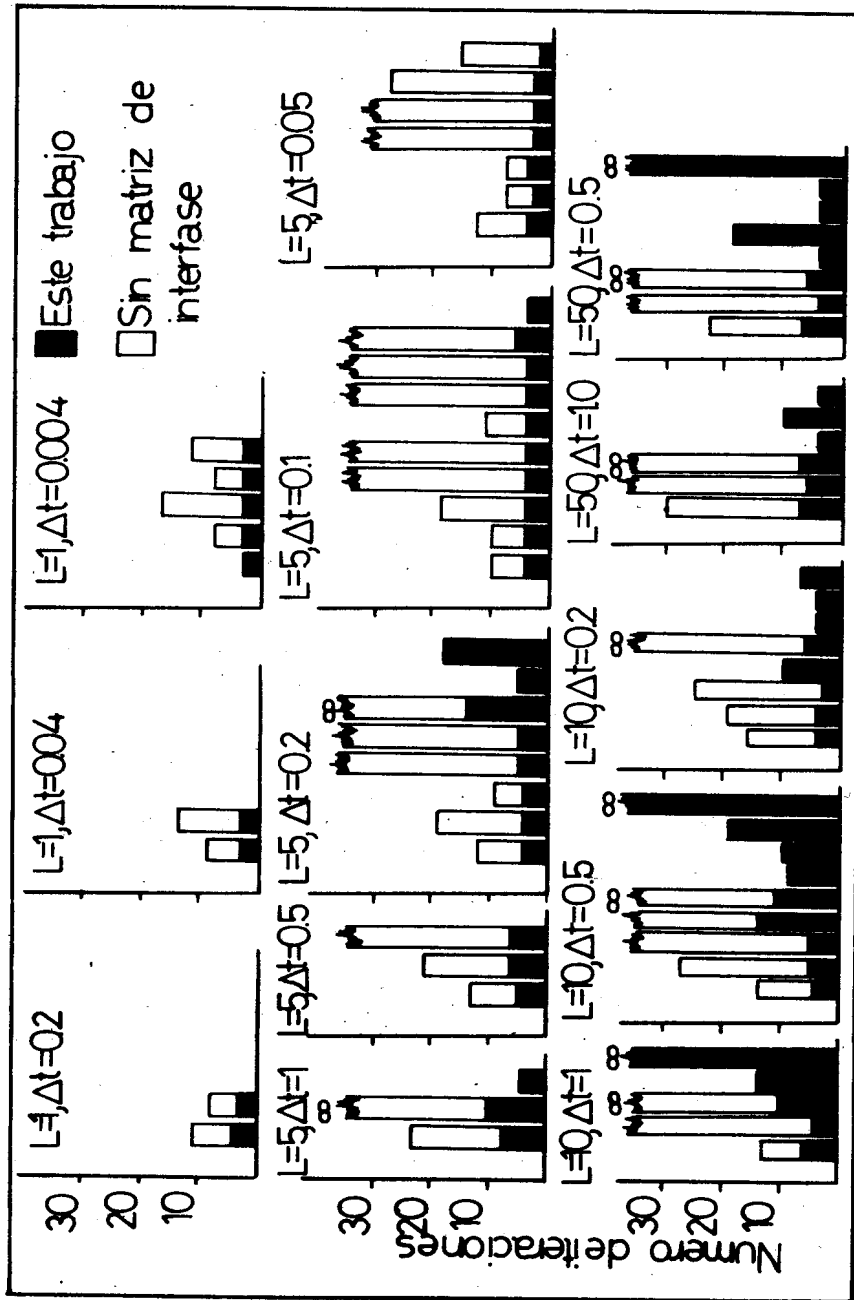


Figura 9: Histograma Comparativo del Comportamiento con y sin Matriz de Interfase.

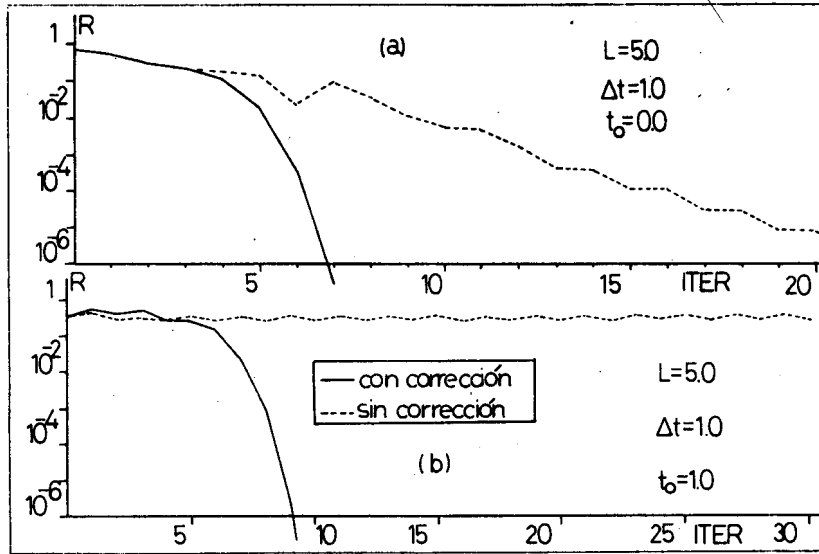


Figura 10: Convergencia con y sin Matriz de Interfase

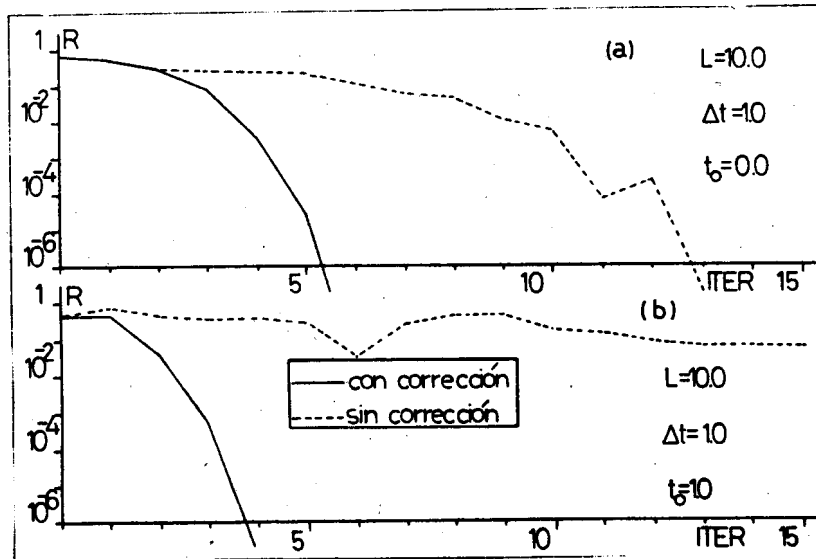


Figura 11: Convergencia con y sin Matriz de Interfase

Concentrémonos en el comportamiento del esquema iterativo sin matriz de interfase, para  $L = 5$  en la figura 9. Allí vemos que para  $t = 1, 0.5, 0.2, 0.1$  y  $0.05$  el esquema se detiene en  $t = 2.0, 1.5, 0.8, 0.4$  y  $0.2$ . (consideramos que el esquema se detiene después de efectuar 30 iteraciones. Para obtener las columnas del histograma siguiente se inhabilitó la detención automática del programa). Vemos que al disminuir el paso de tiempo no mejoramos la convergencia sino que por el contrario el proceso se detiene cada vez más prematuramente. Es to es sencillo de explicar a la luz de lo discutido anteriormente para la estructura simple de 3 nodos cuando no se incluye la matriz de interfase, ya que ahí, se demostró que la reducción del paso de tiempo no aumenta la convergencia sino que la empeora.

En cuando al costo adicional de la evaluación, este es mínimo, ya que sólo necesita una integración sobre los elementos por donde pasa la interfase. Por ejemplo para una estructura bidimensional de 100 elementos, 121 nodos la evaluación de la matriz requiere un tiempo de CPU de 1/2 segundo cuando la interfase pasa por 18 elementos, frente a un tiempo de evaluación del residuo de 9 y 1/2 segundos, en promedio. Esto significa el 5% del costo de la evaluación sin tener en cuenta la resolución del sistema lineal. Estos datos del costo son para una estructura con  $k$  y  $\rho_{cp}$  constantes para la cual no hace falta recalcular la matriz de capacidad y de la matriz tangente en cada iteración ni modificarla como en los métodos quasi-Newton. Para los casos en que no son constantes es de esperar una incidencia menor en el costo de evaluación. Por otra parte la reducción en el número de iteraciones necesarias para resolver un dado problema fue de un 70% menos de iteraciones para lograr la convergencia cuando se requería un residuo normalizado menor que  $10^{-6}$ . Esta reducción aumenta a medida que se requiere más precisión debido a la convergencia cuadrática del método tangente. Además la inclusión de este término amplió sensiblemente la gama de problemas donde el proceso iterativo convergió sin recurrir a algoritmos más potentes, pero mas costosos, para obtener convergencia como el método de carga incremental. Todos los datos sobre estadística de tiempo de CPU son tomados de ejemplos corridos en una VAX 11-780.

## 5.0 REFERENCIAS

- [1] Rubinstein, ; "The Stefan Problem", Trans. American Mathematical Society, Providence 1971.
- [2] Fasano, A.; Primicerio, M.; "Free Boundary Problems: Theory and Applications", Pitman Advanced Publishing Program, London, 1983.
- [3] Ockendon, J.R.; Hodgkins, W.R.; "Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion", Oxford Univ. Press, Oxford, 1975.
- [4] Elliott, C.M.; Ockendon, J.R.; "Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems", Pitman, Boston, 1982.
- [5] Wilson, D.G.; Solomon, A.D.; Boggs, D.T.; "Moving Boundary Problems", Academic Press, New York, 1978.
- [6] Crivelli, L.; Idelsohn, S.; "A Temperature Based Finite Element Solution for Phase Change Problems" a ser publicado en Int. J. Num. Meth. Engng.

- [7] Storti, M.; Crivelli, L.; Idelsohn, S.; "Making Curved Interphases Straight in Phase Change Problems", a ser publicado en Int. J. Num. Meth. Engeng.
- [8] Storti, M.; Crivelli, L.; Idelsohn, S.; "Numerical Implementation of a Discontinuous Finite Element for Phase Change Problems", a ser publicado en Adv. Eng. Software.
- [9] Courant, Hilbert; "Methods of Mathematical Physics", Vol. II, New York, London, Interscience, 1953-62.
- [10] Atkinson; "An Introduction to Numerical Analysis", New York, London Wiley, C. 1978.