ANALISIS DE PLACAS DE ESPESOR MODERADO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

Fernando G. Flores
Luis A. Godoy
Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
U.N. de Córdoba
Córdoba - Argentina

RESUMEN

Se presenta la formulación y estudios numéricos para un elemento de placas planas que incluye la influencia del corte transversal, inicialmente propuesto por otros autores. El elemento estudiado emplea distintos órdenes de interpolación para desplazamientos (funciones cuadráticas) y rotaciones (funciones lineales), y sólo requiere de continuidad C^o. Los resultados numéricos obtenidos son satisfactorios en placas de espesor moderado, pero las características de convergencia no son tan buenas en placas muy delgadas.

ABSTRACT

The formulation and numerical studies for a plate element including transverse shear, initially proposed by other authors, are presented. The element studied uses different orders of interpolation for displacements (quadratic functions) and rotations (linear functions), and only requires C° continuity. The numerical results obtained are satisfactory for moderately thick plates, but the convergence characteristics are not so good in very thin plates.

INTRODUCCION

La solución aproximada de placas planas en flexión fue una de las primeras aplicaciones del método de elementos finitos; sin embargo, la literatura en este tema es tan vasta que demuestra las dificultades encontradas por investigadores y usuarios con los elementos desarrollados. Si se emplea la teoría de Kirchhoff de placas delgadas conjuntamente con elementos de tipo de desplazamientos, es necesario preservar continuidad C^1 entre elementos, y la importancia de satisfacer conformidad radica en que se puede así asegurar convergencia de la solución. Una reseña reciente sobre elementos para flexión de placas [1] muestra un catálogo de 88 elementos; de los cuales ninguno en particular ha emergido como el "mejor" elemento. En muchos casos es dificil establecer comparaciones debido a que los elementos han sido sometidos sólo a algunas pruebas (en general, convergencia y en pocos casos, Patch test), o porque no fueron formulados para los mismos propósitos.

El objetivo fundamental que impulsó el presente trabajo fue el de encontrar un elemento que fuese adecuado tanto para problemas de láminas planas delgadas como de espesor intermedio, de modo que placas con espesores delgados en algunas zonas, e intermedios en otras, pudieran ser estudiados con el mismo elemento. Se ha dado atención a elementos triangulares, por su habilidad de aproximar contornos irregulares sin necesidad de transformar la geometría; y de tipo de desplazamiento, de modo de poder acoplarse fácilmente con elementos de otro tipo (vigas, cáscaras, etc.) que en su mayoría son de desplazamiento. Una revisión de elementos que puedan satisfacer esas condiciones ha sido realizada por los autores [2]; si se trabaja con la teoría de Reissner de placas de espesor intermedio, los desplazamientos y rotaciones se toman independientemente y sólo es necesario preservar continuidad C^0 entre elementos, con la ventaja que pueden emplearse las mismas funciones de interpolación que en elasticidad plana. Esta idea fue propuesta por Utku [3] en 1971, y varios elementos fueron presentados sobre esa línea de trabajo [4-9].

En el presente trabajo se efectúa una evaluación numérica del elemento propuesto por Feijóo y Tarocco [7] que usa funciones de interpolación cuadrática para desplazamientos y lineales para rotaciones. Una versión isoparamétrica de este elemento fue independientemente desarrollada por Krajnc [8]. La presente evaluación se basa en tres criterios: convergencia, Patch test y distorsionabilidad de los elementos.

TEORIA DE PLACAS CON CORTE TRANSVERSAL

La teoría de placas incluyendo la deformación transversal por corte, bajo las hipótesis de pequeños desplazamientos, ha sido formulada por Reissner, y resumida en varias publicaciones en el contexto de elementos finitos (ver por ej. Ref. [4] y [6]. En esta teoría las deformaciones de la superficie media de la placa se define en función de la rotación de la normal, β_i , y el desplazamiento transversal, u_3: que se suponen en forma independiente. Las deformaciones ε_{ij} y curvaturas χ_{ij} de la superficie media pueden expresarse como:

$$\varepsilon_{ij} = x_3 . \chi_{ij} \tag{1}$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} \right) \qquad i,j = 1,2 \tag{2}$$

mientras que las deformaciones de corte transversales, ε_{i3} (que se suponen constantes en el espesor), están dadas por:

$$\varepsilon_{i3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_i} + \beta_i \right) \tag{3}$$

Para un material isótropo con módulo de elasticidad E y módulo de Poisson ν , la energía de deformación $\mathcal{U}$ de una placa de espesor h , puede escribirse como sigue:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_b + \mathcal{U}_s \tag{4}$$

donde la energía de deformación de flexión, $\mathcal{U}_b$, y la energía de deformación de corte, $\mathcal{U}_s$, están definidas por:

$$\mathcal{U}_b = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \nu \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 \, dx_2 \tag{5}$$

$$\mathcal{U}_s = \frac{E h K}{4(1+\nu)} \iint \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \beta_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \beta_2 \right)^2 \right] dx_1 \, dx_2 \tag{6}$$

El factor de corrección, K , se toma igual a 5/6 en la teoría de Reissner, y las integrales se extienden sobre el área de la placa.

El término del potencial de cargas, Ω , es una función de la carga transversal distribuida q_3 , y de fuerzas p_3 y momentos m_i ; a lo largo del borde de la placa S :

$$\Omega = - \iint q_3 u_3 \, dx_1 \, dx_2 - \int (p_3 u_3 + m_i \beta_i) \, ds \tag{7}$$

La energía potencial π de la placa se obtiene en la forma usual

$$\pi = \mathcal{U} + \Omega \tag{8}$$

Las ecuaciones de equilibrio se obtienen a partir de la condición de estacionario de π

$$\delta \pi = 0 \tag{9}$$

con las condiciones geométricas de borde expresadas como:

$$u_3 = \bar{u}_3 \qquad , \qquad \beta_i = \bar{\beta}_i \tag{10}$$

en la parte del contorno donde los desplazamientos son conocidos.

Las tensiones se calculan en función de las deformaciones a partir de las ecuaciones constitutivas

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_{11} + \nu\,\varepsilon_{22}) \quad , \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_{22} + \nu\,\varepsilon_{11})$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{12} \quad , \quad \sigma_{13} = \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{13} \quad , \quad \sigma_{23} = \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{23} \tag{11}$$

los esfuerzos resultantes (momentos M_{ij} , y fuerzas N_{i3}) pueden obtenerse por integración de las tensiones en la forma

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}\, x_3 \, dx_3 \tag{12}$$

$$N_{i3} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{i3} \, dx_3 \tag{13}$$

ELEMENTO TRIANGULAR DE DOCE GRADOS DE LIBERTAD

En la Fig. 1 se muestra la configuración nodal del elemento implementado. Las incógnitas nodales son:

a) el desplazamiento transversal u_3 en los vértices y en los nudos a mitad de lado; b) las rotaciones de la normal β_i en nudos de vértice. El elemento resulta así con 12 grados de libertad

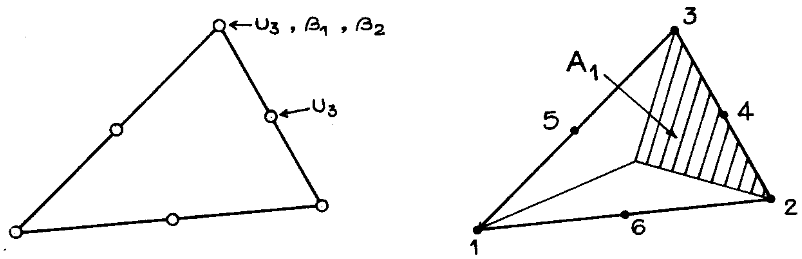


Fig. 1 Nudos, incógnitas y coordenadas de área para el elemento

Para simplificar la formación se han empleado coordenadas de área, de modo que la posición de un punto dentro de un elemento puede ser descripta como:

$$x_i = L_K \,.\, x_i^K \qquad i = 1,2 \quad ; \quad K = 1,3 \tag{14}$$

en donde x_i^k son las coordenadas de los nudos k de vérti-ces, y

$$L_k = \frac{A_k}{A} \tag{15}$$

son las funciones de interpolación lineales, escritas en términos del área total del triángulo, A , y del área nodal, A_k que se muestra en la Fig. 1.

Las rotaciones de la normal β_i se interpolan linealmente en función de rotaciones nodales β_i^k como

$$\beta_i = L_k . \beta_i^k \tag{16}$$

Los desplazamientos transversales u_3 se aproximan por funciones cuadráticas

$$u_3 = N_\ell . u_3^\ell \tag{17}$$

en donde:

$$\begin{aligned} N_1 &= (2\,L_1 - 1)L_1 & N_4 &= 4\,L_2\,L_3 \\ N_2 &= (2\,L_2 - 1)L_2 & N_5 &= 4\,L_1\,L_3 \\ N_3 &= (2\,L_3 - 1)L_3 & N_6 &= 4\,L_1\,L_2 \end{aligned} \tag{18}$$

Puede observarse que u_3 se aproxima por funciones cuadráticas mientras que β_i por funciones lineales, de modo que en el límite, a medida que el espesor tiende a cero, las rotaciones pueden converger a la condición de Kirchhoff

$$\beta_i = - \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \tag{19}$$

Las integraciones necesarias para evaluar la matriz de rigidez y el vector de cargas se han realizado en forma analítica, derivándose expresiones explícitas para los coeficientes de la matriz de rigidez y el vector de cargas consistentes [9].

ANALISIS NUMERICO DEL ELEMENTO

Se ha llevado a cabo una extensa evaluación del elemento discutido en las secciones previas. Se presentan a continuación algunos resultados sobre la convergencia y la capacidad de modelar placas delgadas y de espesor moderado. Cuando es posible los resultados se comparan con aquellos obtenidos usando otros elementos formulados previamente por otros autores.

Convergencia

Para estudiar la convergencia de la solución mediante el presente elemento, se ha analizado una placa cuadrada simplemente apoyada con carga uniformemente distribuída y con carga concentrada.

Debido a la simetría del problema, sólo se modela un cuarto de placa. En la Fig. 2 se muestran las característi cas de la placa y las dos orientaciones distintas de mallas utilizadas en el análisis.

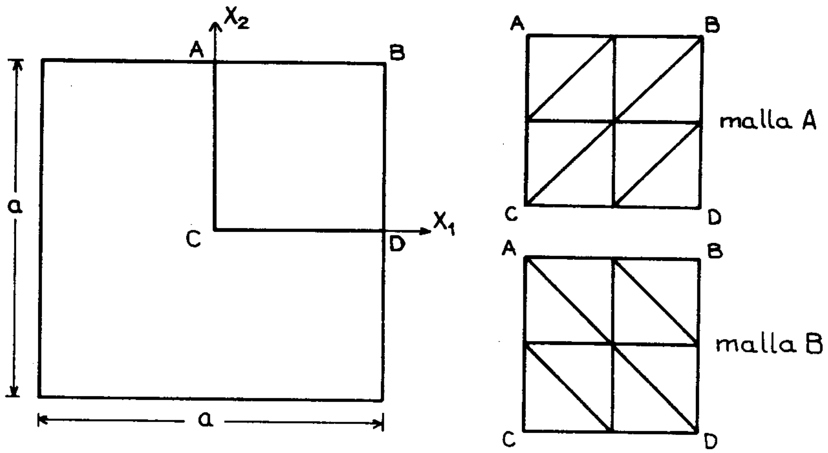


Fig. 2 Ejemplo usado para convergencia. N=2

Se consideran distintas finezas de mallas así como dis tintas esbelteces (relación h/a) para las dos orientaciones posibles. En las fig. 3 y 4 se han graficado los resultados (deflección del punto central). El elemento converge "desde abajo" (con desplazamientos inferiores a los exactos) y lo hace más rápidamente para placas de espesor moderado que para placas delgadas. Para completar el tema de conver gencia se ha graficado en las Fig. 5 y 6 los resultados obtenidos para la malla B y N = 8, en función de la relación h/a.

Satisfacción de las condiciones de equilibrio

Se ha considerado una placa rectangular con condiciones de borde y carga que producen un estado teórico de momentos flectores constantes en toda la placa ([10], Fig. 7). Con el nudo 5 ubicado en el centro de la misma se obtienen los valores correctos de momentos ($M_{11} = M_{22} = M_{12} = 1$), para toda la placa. En la Tabla I se presentan los resultados de los momentos flectores obtenidos en los centroides de los elementos con el nudo 5 ubicado en $x_1 = \frac{3}{4} a$, $x_2 = \frac{3}{2} b$

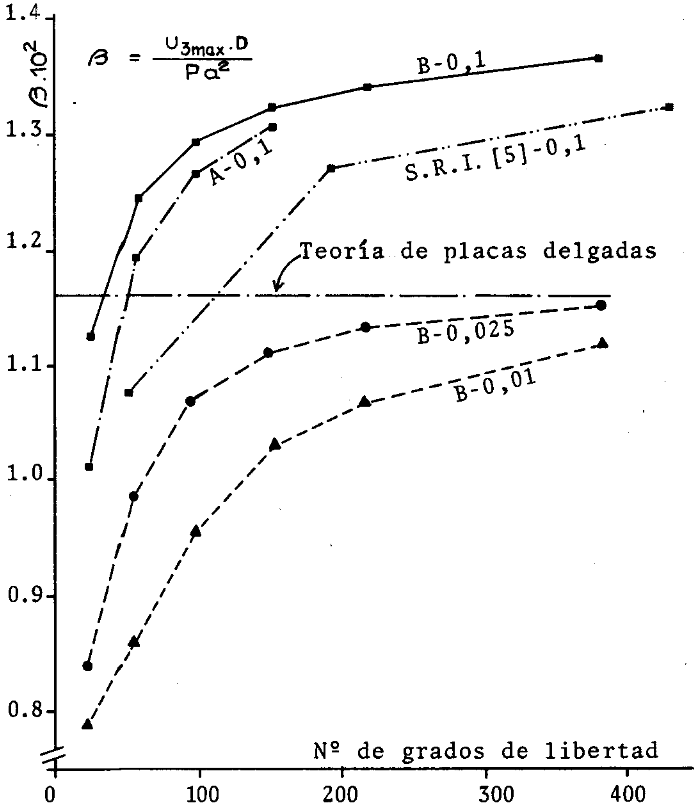


Fig. 3 Placa cuadrada simpl. apoyada con carga concentrada

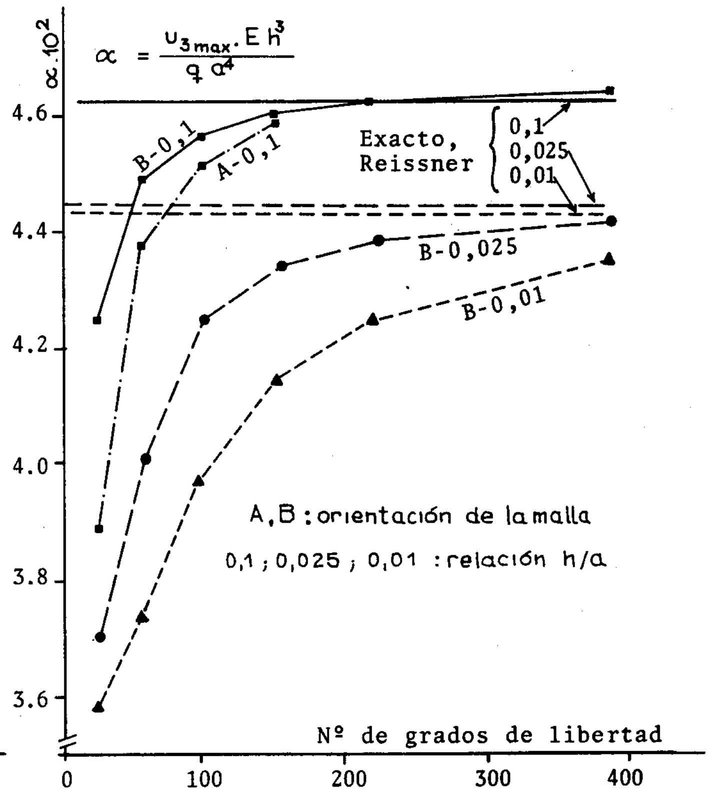


Fig. 4 Placa cuadrada simpl. apoyada con carga distribuída

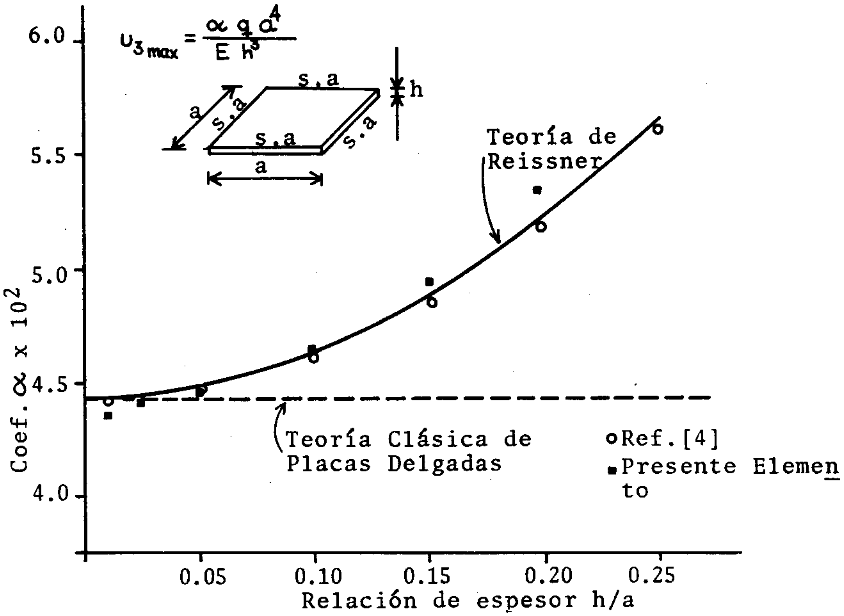


Fig. 5 Influencia del corte transversal en la deflección máxima de placas cuadradas simplemente apoyadas bajo carga uniforme

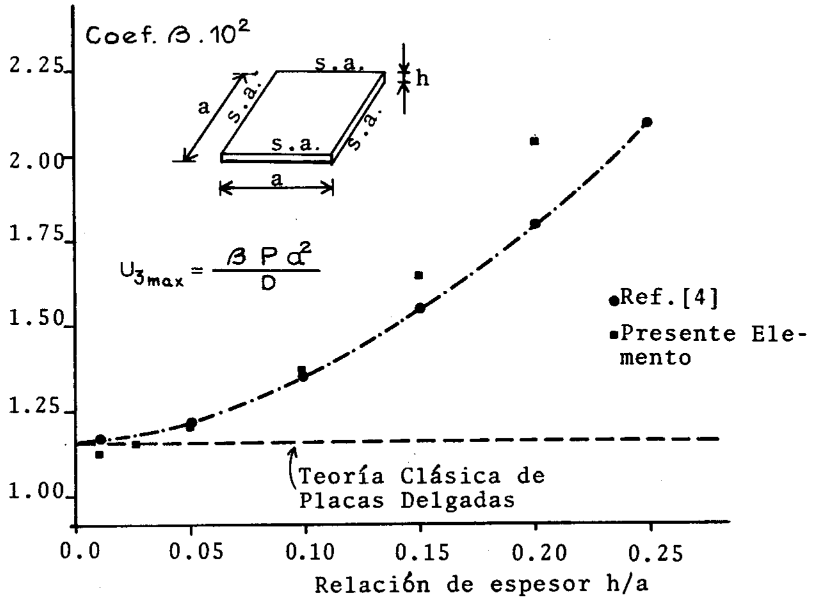
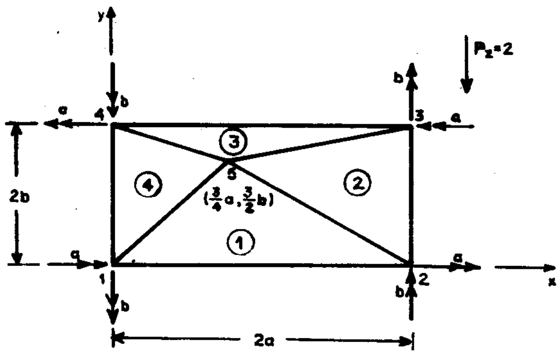


Fig. 6 Influencia del corte transversal en la deflección máxima de placas cuadradas simplemente apoyadas bajo carga concentrada



cond. de borde $U_3 = 0$ en nudos 1, 2, 4.

Fig. 7 Ejemplo de Patch test

	Elemento 1	Elemento 2	Elemento 3	Elemento 4
M_{11}	0,996	0,986	1,016	1,027
M_{22}	0,996	0,965	0,965	1,038
M_{12}	1,011	1,002	1,002	0,991

Tabla I Valores de M_{11}, M_{22}, M_{12} en los centroides de los elementos del ejemplo de "Patch Test" de la Fig. 7.

Distorsión de los elementos

El ensayo crítico para un elemento cuadrático o dos elementos triangulares es usualmente el caso de una placa bajo momentos torsores con un extremo empotrado. El momento torsor puede obtenerse usando cargas de sentido contrario (Fig. 8) o momentos torsores en las esquinas libres (Fig. 9). La placa se discretiza con dos elementos, habiendo dos orientaciones porsibles (A y B). Se grafican los valores de la deflección en un nudo libre en función de L para las dos orientaciones de malla posible y para los dos estados de carga. Se han comparado los resultados con los mostrados en [10] obtenidos usando 16 elementos rectangulares compatibles de 16 grados de libertad basado en la teoría clásica de placas delgadas. Los resultados obtenidos son adecuados para relaciones de forma menores que 2 ($L < 2$). El efecto de la orientación de la malla se elimina si los resultados (U_3 vs. L) se grafican para cuatro triángulos superpuestos, pero eso no es suficiente para aproximarse a valores correctos de desplazamiento cuando L es grande.

DISCUSION Y CONCLUSIONES

La búsqueda de un elemento triangular que permita modelar tanto placas elásticas delgadas como de espesor interme-

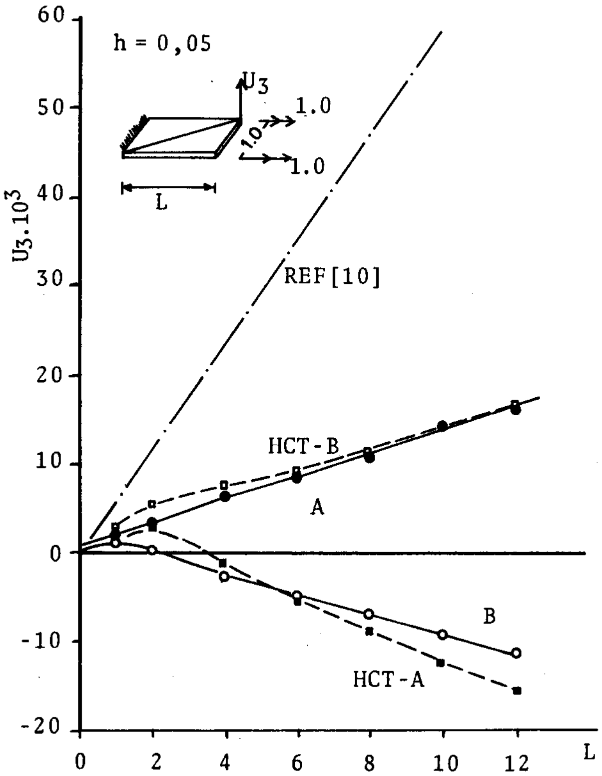


Fig. 8 Placa rectangular en voladizo bajo momentos torsores. U_3 vs. L. $E=10^7$ $\nu = 0,25$

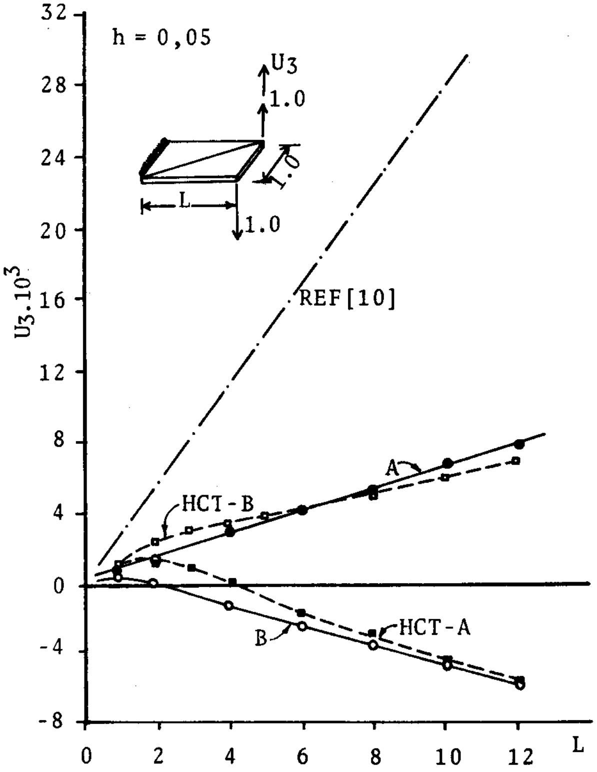


Fig. 9 Placa rectangular en voladizo bajo cargas opuestas. U_3 vs. L. $E=10^7$ $\nu = 0,25$

dio llevó al estudio del triángulo de 6 nudos y 12 grados de libertad, que sólo requiere de continuidad C° entre elementos. Los estudios numéricos llevados a cabo tienden a evaluar fundamentalmente tres aspectos:

a) Características de convergencia de la solución: para placas de espesor intermedio el elemento presenta convergencia satisfactoria, siendo ésta más rápida para cargas distribuídas que para concentradas (Fig. 3 y 4). Se observó además que el ritmo de convergencia disminuye con el espesor de la placa. En placas intermedias se ha comparado con resultados de Reissner exactos, pero con hipótesis ligeramente diferentes, resultando desplazamientos del elemento algo mayores a los exactos. En placas delgadas el elemento produce desplazamientos algo inferiores a los de la teoría de Kirchhoff.

b) Satisfacción de las condiciones de equilibrio: para un típico problema de Patch Test (Fig. 7) el elemento satisface equilibrio con errores inferiores al 5%.

c) Distorsión del elemento: si las dimensiones relativas entre lados del elemento son muy diferentes, los resultados se empobrecen apreciablemente (Fig. 8 y 9) llegando inclusive a cambiar el signo de desplazamientos con respecto a los exactos.

En base a los estudios numéricos presentados, se concluye que el uso del elemento presente debe ser realizado con algunas precauciones: en primer lugar, la relación entre lado mayor y menor no debe ser superior a 2; y en segundo lugar, la relación entre lado y espesor de la placa debe ser inferior a 40.

Se hace notar que los elementos de tipo desplazamiento basados en la teoría de Reissner presentan los problemas aquí mencionados, lo que limita su aplicabilidad en programas para propósitos generales.

REFERENCIAS

[1] Hrabok, M.M. y Hrudey, T.M. "A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements", Int. J. Comp. Struct., Vol. 19, 1984, págs. 479-495.

[2] Flores, F.G. y Godoy, L.A. "Evaluación de Elementos Triangulares para Flexión de Placas Incluyendo Deformación por corte", I Congreso Iberoamericano de Métodos Comp. en Ing., Madrid, 1-5 Julio, 1985.

[3] Utku, S., "On Derivation of Stiffnes Matrices with C° Rotation Fields for Plates and Shells", Proc. 3rd Conf. on Matrix Meth. on Structural Mechanics , Ohio, 1971, págs. 255-274.

[4] Pryor, C.W., Baker, R.M. y Frederick, D., "Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates", Proc. ASCE, J. Engng. Mech. Div., Vol. 96, 1970, págs. 967-983.

[5] Chiroleu, L., Micheletti, R. e Idelshon, S., "Estudio de Placas de Moderado Espesor por el Método de los Elementos Finitos", en: "Métodos Numéricos en la Mecánica del Continuo", Eudeba, 1978.

[6] Batoz, J.L., Bathe, K.J. y Ho, L.W., "A Study of Three Node Plate Bending Elements", Int. J. Num. Meth. Engn., Vol. 12, 1980, págs. 1771-1812.

[7] Feijóo, R.A. y Tarocco, E., "Principios Variacionales y el Método de Elementos Finitos en la Teoría de Placas y Cáscaras", en: "Teoría de Cáscaras y sus Aplicaciones en Ingeniería", Vol. II, Laboratorio de Computación Científica, Río de Janeiro, 1983.

[8] Krajnc Alves, M., "Desemvolvimiento de una Familia Simples de Elementos Finitos para Vigas, Placas e Cascas Incluindo o Efeito da Distorcao Transversal", Tesis de Maestrado, Departamento de Engenharia Mecánica, Pontifica Universidade Católica de Rio de Janeiro, 1983.

[9] Flores, F.G. y Godoy, L.A., "Análisis de Placas de Espesor Moderado por Elementos Finitos", Dpto. de Estructuras, U.N. Córdoba, Argentina, Reporte Técnico 01/84, 1984.

[10] Batoz, J.L., "An Explicit Formulation for an Efficient Triangular Plate Bending Element', Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 18, 1982, págs. 1077-1089.

APENDICE

Matriz de rigidez de un elemento

Las integrales necesarias para evaluar la matriz de rigidez del elemento, K , pueden realizarse en forma analítica de modo de disponer de los coeficiente en forma explícita llamando

$$a_1 = x_1^3 - x_1^2 \qquad b_1 = x_2^2 - x_2^3$$
$$a_2 = x_1^1 - x_1^3 \qquad b_2 = x_2^3 - x_2^1$$
$$a_3 = x_1^2 - x_1^1 \qquad b_3 = x_2^1 - x_2^2$$

el área del elemento es $A = (a_2 b_1 - a_1 b_2)/2$. Ordenando las incógnitas nodales de la siguiente forma:

$$\underset{\sim}{U}^T = [\beta_1^1, \beta_1^2, \beta_1^3, \beta_2^1, \beta_2^2, \beta_2^3, u_3^1, u_3^2, u_3^3, u_3^4, u_3^5, u_3^6]$$

Realizadas las integrales, la matriz K resulta simétrica y los coeficientes no nulos de la parte superior están listados a continuación, donde:

$$\alpha = (1-\nu)/2$$
$$\beta = \frac{E\, h^3}{48\, A(1-\nu^2)}$$

$$\gamma = \frac{5\ E\ h}{12\ (1+\nu)}$$

$K_{1,1} = \beta(b_1 b_1 + \alpha\, a_1 a_1) + \gamma A/6$

$K_{1,2} = \beta(b_1 b_2 + \alpha\, a_1 a_2) + \gamma A/12$

$K_{1,3} = \beta(b_1 b_3 + \alpha\, a_1 a_3) + \gamma A/12$

$K_{1,4} = \beta(\nu\, b_1 a_1 + \alpha\, a_1 b_1)$

$K_{1,5} = \beta(\nu\, b_1 a_2 + \alpha\, a_1 b_2)$

$K_{1,6} = \beta(\nu\, b_1 a_3 + \alpha\, a_1 b_3)$

$K_{1,7} = -K_{1,10} = \gamma\, b_1/6$

$K_{1,11} = -K_{1,12} = \gamma\,(b_3 - b_2)/6$

$K_{2,2} = \beta(b_2 b_2 + \alpha\, a_2 a_2) + \gamma A/6$

$K_{2,3} = \beta(b_2 b_3 + \alpha\, a_2 a_3) + \gamma A/12$

$K_{2,4} = \beta(\nu\, b_2 a_1 + \alpha\, a_2 b_1)$

$K_{2,5} = \beta(\nu\, b_2 a_2 + \alpha\, a_2 b_2)$

$K_{2,6} = \beta(\nu\, b_2 a_3 + \alpha\, a_2 b_3)$

$K_{2,8} = -K_{2,11} = \gamma\, b_2/6$

$K_{2,10} = -K_{2,12} = \gamma\,(b_3 - b_1)/6$

$K_{3,3} = \beta(b_3 b_3 + \alpha\, a_3 a_3) + \gamma A/6$

$K_{3,4} = \beta(\nu\, b_3 a_1 + \alpha\, a_3 b_1)$

$K_{3,5} = \beta(\nu\, b_3 a_2 + \alpha\, a_3 b_2)$

$K_{3,6} = \beta(\nu\, b_3 a_3 + \alpha\, a_3 b_3)$

$K_{3,9} = -K_{3,12} = \gamma\, b_3/6$

$K_{3,10} = -K_{3,11} = \gamma\,(b_2 - b_1)/6$

$K_{4,4} = \beta(a_1 a_1 + \alpha\, b_1 b_1) + \gamma A/6$

$K_{4,5} = \beta(a_1 a_2 + \alpha\, b_1 b_2) + \gamma A/12$

$K_{4,6} = \beta(a_1 a_3 + \alpha\, b_1 b_3) + \gamma A/12$

$K_{4,7} = -K_{4,10} = \gamma\, a_1/6$

$K_{4,11} = -K_{4,12} = \gamma\,(a_3 - a_2)/6$

$K_{5,5} = \beta(a_2 a_2 + \alpha\, b_2 b_2) + \gamma A/6$

$K_{5,6} = \beta(a_2 a_3 + \alpha\, b_2 b_3) + \gamma A/12$

$K_{6,6} = \beta(a_3 a_3 + \alpha\, b_3 b_3) + \gamma A/6$

$K_{6,9} = -K_{6,12} = \gamma\, a_3/6$

$K_{6,10} = -K_{6,11} = \gamma\,(a_2 - a_1)/6$

$K_{7,7} = \gamma\ 3\,(b_1 b_1 + a_1 a_1)/12A$

$K_{7,8} = -\gamma\,(b_1 b_2 + a_1 a_2)/12A$

$K_{7,9} = -\gamma\,(b_1 b_3 + a_1 a_3)/12A$

$K_{7,11} = K_{9,11} = \gamma\,(b_1 b_3 + a_1 a_3)/3A$

$K_{7,12} = K_{8,12} = \gamma\,(b_1 b_2 + a_1 a_2)/3A$

$K_{8,8} = \gamma\ 3\,(b_2 b_2 + a_2 a_2)/12A$

$K_{8,9} = -\gamma\,(b_2 b_3 + a_2 a_3)/12A$

$K_{8,10} = K_{9,10} = \gamma\,(b_3 b_2 + a_3 a_2)/3A$

$K_{10,10} = K_{11,11} = K_{12,12} =$

$= \gamma\ 2\,(b_1^2 - b_3 b_2 + a_1^2 - a_2 a_3)/3A$

$K_{10,11} = \gamma \cdot 2\,(b_1 b_2 + a_1 a_2)/3A$

$K_{10,12} = \gamma \cdot 2\,(b_1 b_3 + a_1 a_3)/3A$

$K_{11,12} = \gamma\ 2\,(b_2 b_3 + a_2 a_3)/3A$

$K_{5,8} = -K_{5,11} = \gamma\, a_2/6$

$K_{5,10} = -K_{5,12} = \gamma\,(a_3 - a_1)/6$

Vector de cargas de un elemento

Cargas transversales distribuidas sobre un elemento

Si sobre un elemento se tiene una carga transversal distribuída definida por:

$$q = N_i \, q_i \qquad i = 1.6$$

donde q_i es la presión en cada nudo y las N_i son las (18), el vector de cargas consistente resulta (sólo hay contribuciones a los grados de libertad U_3).

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \frac{A}{180} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ & 6 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ & & 6 & 0 & 0 & -4 \\ & \text{Simet.} & & 32 & 16 & 16 \\ & & & & 32 & 16 \\ & & & & & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

para el caso de fuerza másica $q = \rho \, h$ se tendrá

$$[P] = \frac{A \rho h}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Cargas transversales sobre bordes

- Fuerzas transversales P_3

Se supone una variación parabólica de las cargas en el borde de un elemento (3 nudos), nuevamente sólo hay contribución sobre los grados de libertad U_3. La expresión explícita obtenida realizando la integración en forma consistente es:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_6 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{L}{15} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ & 8 & 1 \\ & \text{Simet.} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3^1 \\ P_3^6 \\ P_3^2 \end{bmatrix}$$

donde L es la longitud del borde (ver Fig. 10)

- Momentos coordenados m_i

En este caso también se supone una variación parabólica de los momentos en el borde (3 nudos), la contribución resulta ahora sólo sobre los grados de libertad β_i que existen únicamente en los vértices de los triángulos, de esa forma resulta:

$$\begin{array}{l} \text{nudo 1} \longrightarrow \\ \text{nudo 2} \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} M_1^1 & M_2^1 \\ M_1^2 & M_2^2 \end{bmatrix} = \frac{L}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^6 & m_2^6 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{bmatrix}$$

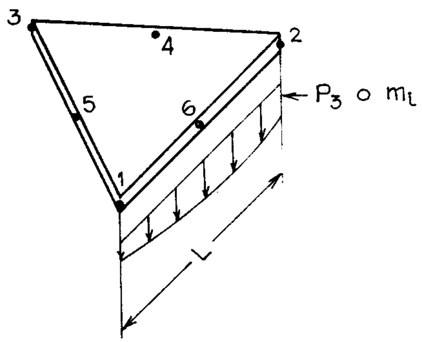


Fig 10