

ANÁLISE UNIDIMENSIONAL DO MOVIMENTO DE UM FLUÍDO EM UM MEIO POROSO
LIMITADO POR DUAS SUPERFÍCIES IMPERMEÁVEIS

Rogério Martins Saldanha da Gama

Departamento de Pesquisa e Desenvolvimento.
Laboratório Nacional de Computação Científica.
Rio de Janeiro - Brasil.

Rubens Sampaio

Departamento de Engenharia Mecânica.
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
Rio de Janeiro - Brasil.

RESUMEN

Se realiza un análisis unidimensional del movimiento de un fluido Newtoniano através de una placa porosa, limitada por dos superficies paralelas e impermeables. Inicialmente, el fluido está distribuido heterogéneamente en el medio poroso y, por efecto de gradientes de concentración, surge un movimiento cuya tendencia es la uniformización de la distribución del fluido. Este fenómeno es modelado basándose en la Teoría Continua de Mezclas, donde el sólido (que compone la matriz porosa) y el fluido se tratan como constituyentes continuos de una cierta mezcla. El movimiento está gobernado por un sistema no lineal y no homogéneo de ecuaciones diferenciales hiperbólicas, y necesita de métodos numéricos para su solución aproximada. Utilizamos en este trabajo el método de Glimm-Chorin, asociado a una factorización para la parte no homogénea del sistema.

ABSTRACT

It is modelled the unidimensional motion of a Newtonian fluid through a porous slab bounded by two impermeable walls. Initially at time zero, is given an initial distribution of fluid at rest in the slab, one wants to determine the motion of the fluid for subsequent times due to concentration gradients. A model based on Mixture theory is used. The two constituents being a rigid solid (porous slab) and a newtonian fluid. The motion of the mixture is described by a nonlinear hyperbolic non-homogeneous system of equations. The system is solved numerically using a factorization of the operator into two parts, one of which is solved by the Glimm-Chorin method and the other by a standard method of finite-differences. Some typical results are presented and the transient solution approach the known equilibrium solution.

1. INTRODUÇÃO

Suponhamos uma placa porosa infinita, limitada por duas superfícies impermeáveis paralelas, como mostra a figura 1

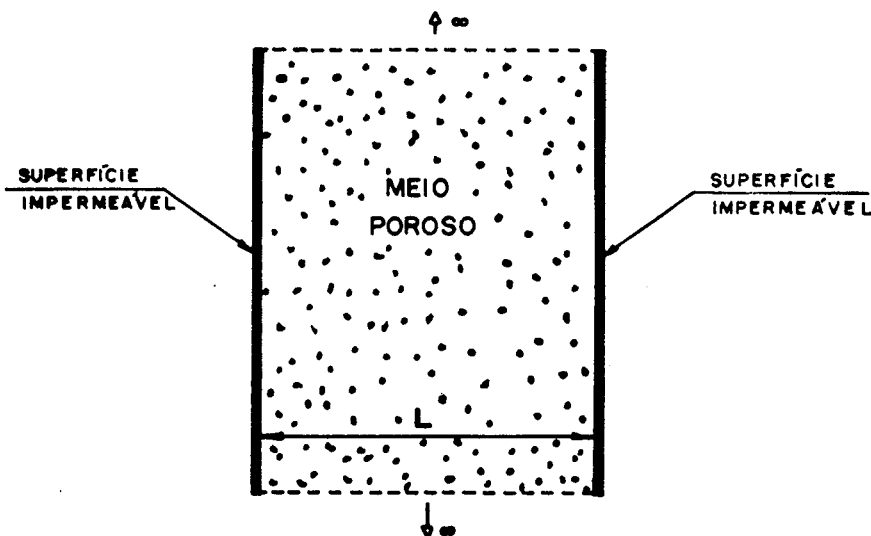


Figura 1 - Esquema do Problema em Estudo

Se, em um certo instante, o fluido no interior desta placa não estiver em equilíbrio, esperamos que surjam forças, cuja tendência seria levar o fluido ao estado de equilíbrio.

No caso do meio poroso ser homogêneo e isotrópico e não existirem forças de corpo externas, o equilíbrio é atingido quando a distribuição de fluido não depender da posição e a velocidade for nula. Assim sendo, se num certo instante existir uma distribuição de fluido não constante, esperamos que apareçam forças as quais atuarão no sentido de busca do equilíbrio.

Neste trabalho desejamos simular o movimento de um fluido Newtoniano através de um arranjo como o da figura 1, supondo que este possui, no instante inicial, velocidade nula e distribuição não constante.

Neste movimento serão considerados dois tipos de força de interação, sendo o primeiro uma força de atrito e o segundo uma força por efeito de gradientes de concentração de fluido.

Serão considerados também os termos de inércia, na equação da quantidade de movimento, sendo com isto possível a simulação de fenômenos que não poderiam ser descritos pela equação da difusão clássica. No caso do termo que representa a força de atrito ser muito grande, pode ser constatado que a solução se aproximará daquela que seria obtida com a equação da difusão clássica.

A análise do fenômeno se restringirá às equações da continuidade

e do momentum linear. As equações do momento angular e da energia serão supostas satisfeitas através de certas hipóteses, impostas por conveniência. Estas hipóteses são a simetria dos tensores parciais de tensão e a existência de uma fonte externa de calor que equilibre a equação da energia.

O fluido e o sólido (que compõe a matriz porosa) serão tratados como constituintes contínuos de uma mistura binária. Estes constituintes, dotados de cinemática independente, ocuparão simultaneamente toda a região de mistura, tendo sua interação levada em conta nas equações da dinâmica.

Por simplicidade suporemos a placa porosa em repouso e formada por um material poroso homogêneo, isotrópico e rígido. Com estas hipóteses fixaremos nossa atenção nas equações da continuidade e da quantidade de movimento apenas para o fluido.

2. EQUAÇÕES DE BALANÇO E EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Admitindo que temos uma mistura contínua binária, vamos postular as equações da continuidade e da quantidade de movimento como abaixo [1]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\rho_i \underline{v}_i) = 0 \quad i=1,2 \quad (1)$$

$$\rho_i \left[\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}_i) \underline{v}_i \right] = \text{div } \underline{T}_i + \underline{m}_i + \rho_i \underline{b} \quad i=1,2 \quad (2)$$

onde o índice "i" se refere ao i-ésimo constituinte. Nas equações (1) e (2), " ρ_i " é a densidade do constituinte "i" na mistura (relação local entre a massa do constituinte "i" e o respectivo volume de mistura), " \underline{v}_i " é a velocidade do constituinte "i", " \underline{m}_i " a força, por unidade de volume, exercida pelos demais constituintes da mistura sobre "i", " \underline{T}_i " o tensor parcial de tensão referente a "i" e " \underline{b} " uma força de campo externa por unidade de massa.

Nas equações acima supôs-se a ausência total de reações químicas. Com isto a massa de cada constituinte é preservada, o que garante que a massa da mistura também o é. Para que o balanço de quantidade de movimento seja satisfeito para a mistura é preciso que (no caso de misturas binárias)

$$\underline{m}_1 = -\underline{m}_2 \quad (3)$$

já que " \underline{m}_i " representa uma força interna à mistura.

Supondo o constituinte sólido rígido, precisamos nos preocupar apenas com as equações para o constituinte fluido. Estas podem ser expressas na seguinte notação

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \underline{v}_f) = 0 \quad (4)$$

$$\rho_f \left[\frac{\partial \underline{v}_f}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}_f) \underline{v}_f \right] = \text{div } \underline{T}_f + \underline{m}_f + \rho_f \underline{b} \quad (5)$$

onde o índice "f" se refere ao fluido.

Antes de discutirmos as equações constitutivas, vamos definir a função "ξ", da seguinte forma

$$\xi = \frac{\rho_f}{\rho_f^*} \quad (6)$$

sendo " ρ_f^* " o maior valor que " ρ_f " pode atingir num certo meio poroso homogêneo.

Por simplicidade suporemos que não existem forças de campo externas e que o tensor " T_f " é um múltiplo de identidade, proporcional ao quadrado de "ξ". Assim [2]

$$T_f = -c_2 \xi^2 I \quad (7)$$

A razão do surgimento do termo "ξ²" é fato de que, quando integrado sobre uma certa superfície de mistura, a aplicação de " T_f " sobre a normal a esta superfície fornece a sollicitação devida ao fluido, que "ocupa" apenas uma parcela, proporcional a "ξ", desta superfície. Além disso, por efeito dos poros, uma camada de fluido não interage diretamente com a camada vizinha, tendo com esta um contato proporcional à concentração de fluido.

Para a força de interação " m_f ", consideraremos a seguinte relação constitutiva

$$m_f = -c_1^* \xi^2 v_f - c_3 \xi \text{grad} \xi \quad (8)$$

Esta relação é sugerida pelas leis de Darcy (1ª termo) e de Fick (2ª termo) e é uma primeira aproximação, linear em " v_f " e em "grad ξ".

Supondo " c_1^* ", " c_2 " e " c_3 " constantes e combinando as equações acima, ficamos com

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \text{div}(\xi v_f) = 0 \quad (9)$$

$$\xi \left[\frac{\partial v_f}{\partial t} + (\text{grad} v_f) v_f \right] = -c \text{grad}(\xi^2) - c_1 \xi^2 v_f \quad (10)$$

onde

$$c = \frac{2c_2 + c_3}{2\rho_f^*} \quad (11)$$

$$c_1 = \frac{c_1^*}{\rho_f^*} \quad (12)$$

3. MODELO UNIDIMENSIONAL

Suponhamos agora que as funções "ξ" e " v_f " dependem apenas da variável espacial "x" e do tempo "t" e que " v_f " possui componente não nula na direção "x". Assim sendo, o nosso sistema de equações pode ser escrito como

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\xi v) = 0 \quad (13)$$

$$\xi \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right] = -c \frac{\partial (\xi^2)}{\partial x} - c_1 \xi^2 v \quad (14)$$

onde "v" é a componente "x" de "v_f". Este sistema pode ainda ser reescrito como

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\xi v) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\xi v) + \frac{\partial}{\partial x} (\xi v^2 + c \xi^2) = -c_1 \xi^2 v \quad (16)$$

onde as funções incógnitas são o campo de velocidades "v(x,t)" e a concentração de fluido "ξ(x,t)".

Desejamos resolver este sistema de equações diferenciais sujeito às seguintes condições iniciais

$$\xi(x,0) = \xi_0(x) \quad 0 < x < L \quad (17)$$

$$v(x,0) = v_0(x) \quad 0 < x < L \quad (18)$$

e às seguintes condições de contorno

$$v(0,t) = 0 \quad t > 0 \quad (19)$$

$$v(L,t) = 0 \quad t > 0 \quad (20)$$

que representam o efeito das superfícies impermeáveis.

Vamos passar agora a buscar uma aproximação para a solução do sistema de equações, sujeito às condições impostas.

4. SOLUÇÃO APROXIMADA DO PROBLEMA

Buscaremos agora uma aproximação para a solução de (15)/(16) sujeitas a (17),(18),(19) e (20).

Neste trabalho optamos por tratar o problema segundo as seguintes etapas:

4.1. O Problema de Riemann Associado

O Problema de Riemann associado pode ser dado por

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\xi v) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\xi v) + \frac{\partial}{\partial x} (\xi v^2 + c \xi^2) = 0 \quad (22)$$

sujeito a

$$\xi(x,0) = \xi_L \quad x < 0 \quad (23) \quad \xi(x,0) = \xi_R \quad x > 0 \quad (24)$$

$$v(x,0) = v_L \quad x < 0 \quad (25) \quad v(x,0) = v_R \quad x > 0 \quad (26)$$

A solução de (21)/(22) sujeitas a (23), (24), (25) e (26), será o passo inicial para montarmos uma aproximação para o nosso problema original.

Por conveniência, seja o fluxo "G" definido como

$$G = \xi v \quad (27)$$

Podemos então reescrever o sistema de equações da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \xi \\ G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2c\xi - \frac{G^2}{\xi^2} & \frac{2G}{\xi} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \xi \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Pode ser provado que se "ξ" e "G" são soluções generalizadas de (28) então estas só dependem da razão "x/t".

Os autovalores da matriz "A", que aparece em (28), são (em ordem crescente).

$$\lambda_1 = \frac{G}{\xi} - \sqrt{2c\xi} \quad (29) \quad \lambda_2 = \frac{G}{\xi} + \sqrt{2c\xi} \quad (30)$$

Se "λ_i" é um autovalor de "A" então

$$-\lambda_i d\xi + dG = 0 \quad (31)$$

o que leva a

$$R_1(\xi, G) = \frac{G}{\xi} + \sqrt{8c\xi} = \text{constante } i=1 \quad (32)$$

$$R_2(\xi, G) = \frac{G}{\xi} - \sqrt{8c\xi} = \text{constante } i=2 \quad (33)$$

"R₁(ξ, G)" e "R₂(ξ, G)" são chamados respectivamente de Primeiro e Segundo Invariantes de Riemann e a região do plano onde "R₁" é constante é chamada Região de Rarefação-1 e, onde "R₂" é constante é chamada Região de Rarefação-2.

Para a existência de cada uma destas regiões de rarefação é preciso que o respectivo autovalor seja uma função crescente de "x/t".

Vejamos agora quais são os estados (ξ^r, G^r) que podem ser conectados a um certo estado fixo (ξ^l, G^l) (à esquerda) por uma Rarefação-1. Para este caso temos que

$$\frac{G^l}{\xi^l} + \sqrt{8c\xi^l} = \frac{G^r}{\xi^r} + \sqrt{8c\xi^r} \quad (34)$$

Os estados (ξ^r, G^r) que podem ser ligados a (ξ^l, G^l) por uma Rarefação-2 se relacionam com este por

$$\frac{G^l}{\xi^l} - \sqrt{8c\xi^l} = \frac{G^r}{\xi^r} - \sqrt{8c\xi^r} \quad (35)$$

Até aqui estudamos soluções contínuas de (28) e vimos como relacionar estados ligados através deste tipo de solução. Pode acontecer, no entanto, de (28) não possuir solução contínua.

Neste caso será preciso estender o espaço de soluções, admitindo também soluções contínuas por partes.

Consideremos então as soluções constantes por partes. Para trabalharmos com estas soluções, recorreremos à forma integral original que gerou (28). Com esta obtemos as seguintes condições de salto

$$\frac{[G]}{[\xi]} = \frac{[G^2/\xi + c\xi^2]}{[G]} = s \quad (36)$$

onde "s" é a velocidade de propagação da descontinuidade ou choque.

De (36) temos que um estado constante à direita (ξ^r, G^r) e um estado constante à esquerda (ξ^l, G^l) , ligados por um choque, devem satisfazer à seguinte relação

$$\frac{G^l}{\xi^l} = \frac{G^r}{\xi^r} \pm \sqrt{c(\xi^l - \xi^r)^2 \left(\frac{1}{\xi^r} + \frac{1}{\xi^l} \right)} \quad (37)$$

Vamos permitir que dois estados sejam candidatos a serem ligados por um choque (descontinuidade) somente se estes não puderem ser ligados por uma rarefação.

Um estado à esquerda (ξ^l, G^l) será ligado a um estado à direita (ξ^r, G^r) , por um Choque-1, quando, além de satisfazer (37), satisfizer

$$s < \lambda_1(\xi^l, G^l) \quad (38) \quad \lambda_1(\xi^r, G^r) < s < \lambda_2(\xi^r, G^r) \quad (39)$$

e por um Choque-2 quando, além de satisfazer (37), satisfizer

$$s > \lambda_2(\xi^r, G^r) \quad (40) \quad \lambda_1(\xi^l, G^l) < s < \lambda_2(\xi^l, G^l) \quad (41)$$

As desigualdades acima são chamadas "Condições de Entropia" e impedem a ocorrência do chamado "Choque de Rarefação" onde estados que poderiam ser ligados por rarefações são ligados por choques.

Dois estados (ξ^r, G^r) e (ξ^l, G^l) ligados por um Choque, neste problema, devem satisfazer (37) (com o sinal +).

Podemos passar agora à solução de (28) sujeita às seguintes condições iniciais

$$\xi(x, 0) = \xi_L = \text{constante} \quad x < 0 \quad (42)$$

$$\xi(x, 0) = \xi_R = \text{constante} \quad x > 0 \quad (43)$$

$$G(x, 0) = G_L = \text{constante} \quad x < 0 \quad (44)$$

$$G(x, 0) = G_R = \text{constante} \quad x > 0 \quad (45)$$

A técnica de solução consiste em se buscar um estado intermediário (ξ^*, G^*) , que seja ligado a (ξ_L, G_L) por uma Rarefação-1 ou Choque-1 e a (ξ_R, G_R) por uma Rarefação-2 ou Choque-2.

As possíveis soluções estão esquematizadas na tabela 1, com as respectivas condições para sua ocorrência.

O TIPO DE SOLUÇÃO É	SE
Rarefação 1 - Rarefação 2	$\xi_L > \xi^*$ e $\xi_R > \xi^*$
Rarefação 1 - Choque 2	$\xi_L > \xi^* > \xi_R$
Choque 1 - Rarefação 2	$\xi_L < \xi^* < \xi_R$
Choque 1 - Choque 2	$\xi_L < \xi^*$ e $\xi_R < \xi^*$

Tabela 1 - Os Tipos de Solução e as Condições para suas ocorrências (deve ser observado que, no primeiro caso, pode não existir solução).

Para se determinar o estado (ξ^*, G^*) é preciso assumir um tipo de solução. Depois de determinado (ξ^*, G^*) verifica-se se as condições da tabela são satisfeitas. A solução, se existir, é única.

4.2. O Método de Glimm-Chorin

Vamos supor agora que (28) está sujeita a condições iniciais quaisquer, dadas por

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x) \quad \forall x \quad (46)$$

$$G(x, 0) = G_0(x) \quad \forall x \quad (47)$$

A idéia do método de Glimm-Chorin é aproximar as condições (46) e (47) por funções em forma de escada, com degraus de mesma largura, da seguinte forma

$$\xi_0(x) \cong \xi_i = \xi_0(x_i + \theta \Delta x) \quad x_i - \frac{\Delta x}{2} \leq x < x_i + \frac{\Delta x}{2} \quad (48)$$

$$G_0(x) \cong G_i = G_0(x_i + \theta \Delta x) \quad x_i - \frac{\Delta x}{2} \leq x < x_i + \frac{\Delta x}{2} \quad (49)$$

onde " Δx " é a largura de cada degrau e " θ " é um número, escolhido aleatoriamente, no intervalo $(-1/2, 1/2)$.

Através de (47) e (49) montamos, para cada dois degraus consecutivos, um Problema de Riemann.

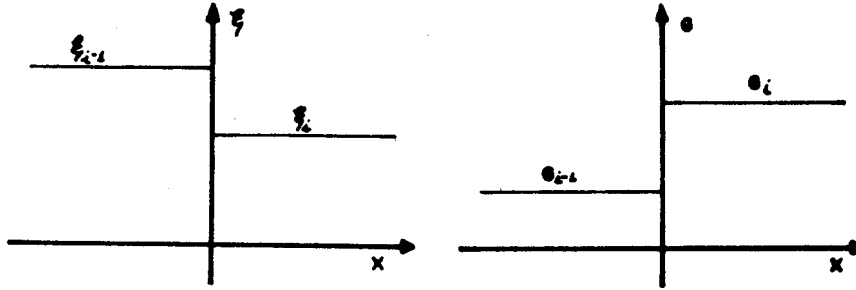


Figura 2 - O Problema de Riemann "i".

Para que as características não se interceptem, o avanço no tempo " Δt ", para cada passo do método, deve satisfazer à condição de Courant-Friedrichs-Lewy [3].

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2|\lambda|_{\text{MÁX}}} \quad (50)$$

onde " $|\lambda|_{\text{MÁX}}$ " é o valor absoluto da maior velocidade de propagação, ou seja, o máximo valor em módulo dos autovalores do sistema. Escolhemos o maior valor possível, satisfazendo (50), assim

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2|\lambda|_{\text{MÁX}}} \quad (51)$$

A solução obtida depois de cada avanço no tempo não será mais em forma de degraus. Assim, a cada avanço, precisaremos de uma nova escolha aleatória para a construção da nova condição inicial em forma de escada, que nos permitirá evoluir de um tempo " t_n " até " t_{n+1} ", pelo método de Glimm-Chorin.

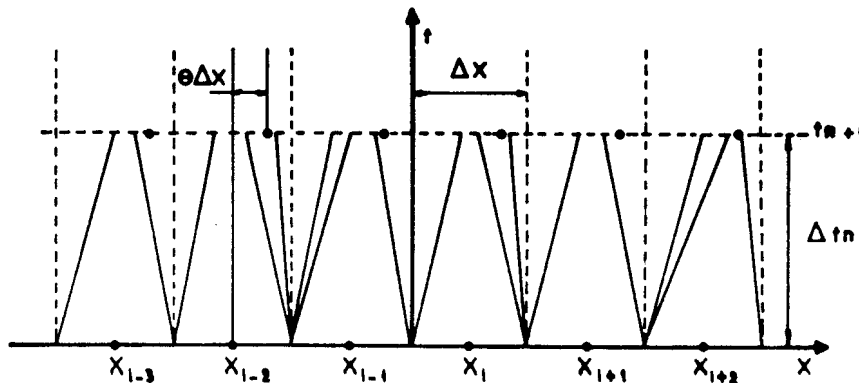


Figura 3 - Um Passo do Método de Glimm-Chorin.

4.3. Sistemas Não-Homogêneos

Até aqui tratamos da solução de (28) sujeita a uma condição inicial qualquer. Nesta situação o sistema de equações representava o movimento do fluido sem levar em conta as forças de atrito entre este e o meio poroso, ou seja, tínhamos " $c_1=0$ ".

Vamos estudar agora a situação em que " $c_1 \neq 0$ ". Neste caso o nosso sistema passa a ser dado por

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G^2}{\xi} + c\xi^2 \right) = -c_1 \xi G \quad (53)$$

Para a solução do sistema acima faremos uma fatoração como é mostrado abaixo

$$(A) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G^2}{\xi} + c\xi^2 \right) = 0 \quad (55)$$

$$(B) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad (56)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -c_1 \xi G \quad (57)$$

Dada uma condição inicial, evoluímos de " t_n " até " t_{n+1} ", através de (A), pelo método de Glimm-Chorin. Obtida a solução em " t_{n+1} ", transformamos esta numa função degrau e evoluímos, no mesmo " Δt ", através de (B). As funções obtidas serão usadas como condição inicial e o procedimento será repetido quantas vezes for desejado.

Suponhamos então que " $\bar{\xi}_{n+1}$ " e " \bar{G}_{n+1} " sejam as funções degrau, obtidas de (A), para " t_{n+1} ". Assim sendo, as funções " ξ_{n+1} " e " G_{n+1} " serão dadas por

$$\xi_{n+1} = \bar{\xi}_{n+1} \quad (58)$$

$$G_{n+1} = \bar{G}_{n+1} \exp(-c_1 \bar{\xi}_{n+1} \Delta t_n) \quad (59)$$

onde

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n \quad (60)$$

As equações (58) e (59) devem ser aplicadas a cada degrau (ou seja a cada ponto "x" do domínio).

4.4. Condições de Contorno

Neste trabalho imporemos, sobre as paredes impermeáveis, velocidade nula. Isto em termos do fluxo "G" é equivalente a

$$G(0,t) = 0 \quad t > 0 \quad (61)$$

$$G(L,t) = 0 \quad t > 0 \quad (62)$$

Estas condições serão aproximadas numericamente através da hipótese de que o primeiro e o último degraus considerados possuirão velocidade nula. Esta condição será tão mais precisa quanto menor for a largura de cada degrau.

5. FORMULAÇÃO ADIMENSIONAL

Antes de passarmos à apresentação de resultados é conveniente escrever o problema numa forma adimensional. Uma maneira de se fazer isto é introduzir as seguintes definições

$$x^+ = \frac{x}{L} \quad (63)$$

$$t^+ = \frac{t\sqrt{c}}{L} \quad (64)$$

$$c_1^+ = \frac{c_1 L}{\sqrt{c}} \quad (65)$$

$$u = \frac{v}{\sqrt{c}} \quad (66)$$

$$\beta = \frac{G}{\sqrt{c}} = \xi u \quad (67)$$

Assim sendo temos que

$$\frac{\partial \xi}{\partial t^+} + \frac{\partial \beta}{\partial x^+} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial x^+} \left(\frac{\beta^2}{\xi} + \xi^2 \right) = -c_1^+ \xi \beta \quad (69)$$

sujeito às seguintes condições

$$\xi(x^+, 0) = \xi_0(x^+) \quad 0 < x^+ < 1 \quad (70)$$

$$u(x^+, 0) = u_0(x^+) \quad 0 < x^+ < 1 \quad (71)$$

$$u(0, t^+) = u(L, t^+) = 0 \quad t^+ > 0 \quad (72)$$

6. ALGUNS RESULTADOS

A título de exemplo vamos apresentar alguns resultados para o problema, sujeito às seguintes condições iniciais [4]

$$\xi(x^+, 0) = 0,5 \quad 0 < x^+ < 1/4 \quad (73)$$

$$\xi(x^+, 0) = 0,1 \quad 1/4 < x^+ < 1 \quad (74)$$

$$u(x^+, 0) = 0 \quad 0 < x^+ < 1 \quad (75)$$

que, para "ξ", é esquematizada na figura 4.

A existência de superfícies impermeáveis em " $x^+=0$ " e " $x^+=1$ " fará com que, no equilíbrio, tenhamos uma distribuição de fluido " ξ ", independente de " x^+ ", dada por

$$\lim_{t^+ \rightarrow \infty} \xi(x^+, t^+) = \int_0^1 \xi(x^+, t^+) dx^+ \quad (76)$$

o que é uma forte ferramenta para a checagem de resultados.

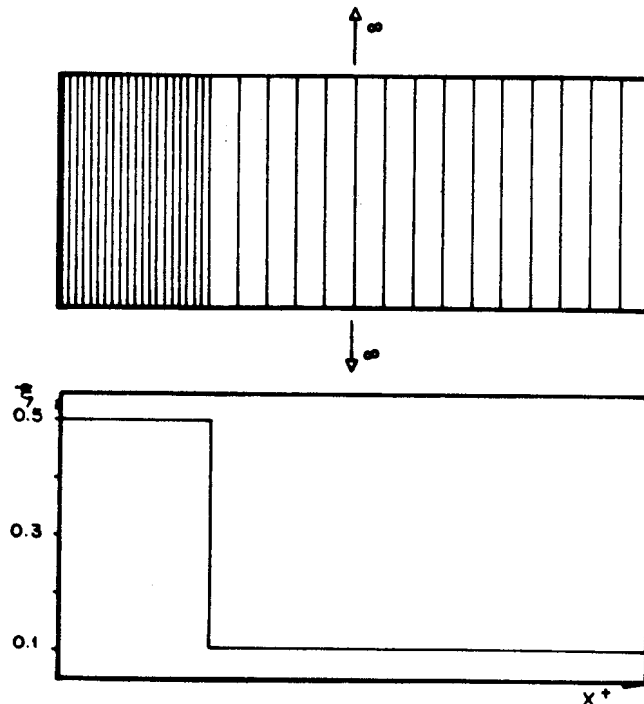


Figura 4 - A Condição Inicial.

O problema será resolvido para duas situações físicas distintas. A primeira, ideal, onde suporemos que " c_1^+ " é nulo e a segunda onde " $c_1^+=20$ ". No primeiro caso, pela ausência de forças de atrito devidas a " $\eta_{c_1^+}$ ", a dissipação de energia cinética será muito lenta, enquanto que no segundo ela será mais rápida. Isto pode ser facilmente observado pelas figuras seguintes onde são plotados gráficos de " $\xi(x^+, t^+)$ " versus " x^+ ", para vários " t^+ ", indicados no quadro.

Em todas as situações foram considerados vinte degraus e se constatou, para este problema, que o aspecto da solução não era alterado com o aumento do número de degraus.

Um fato muito importante de ser notado nas figuras apresentadas é

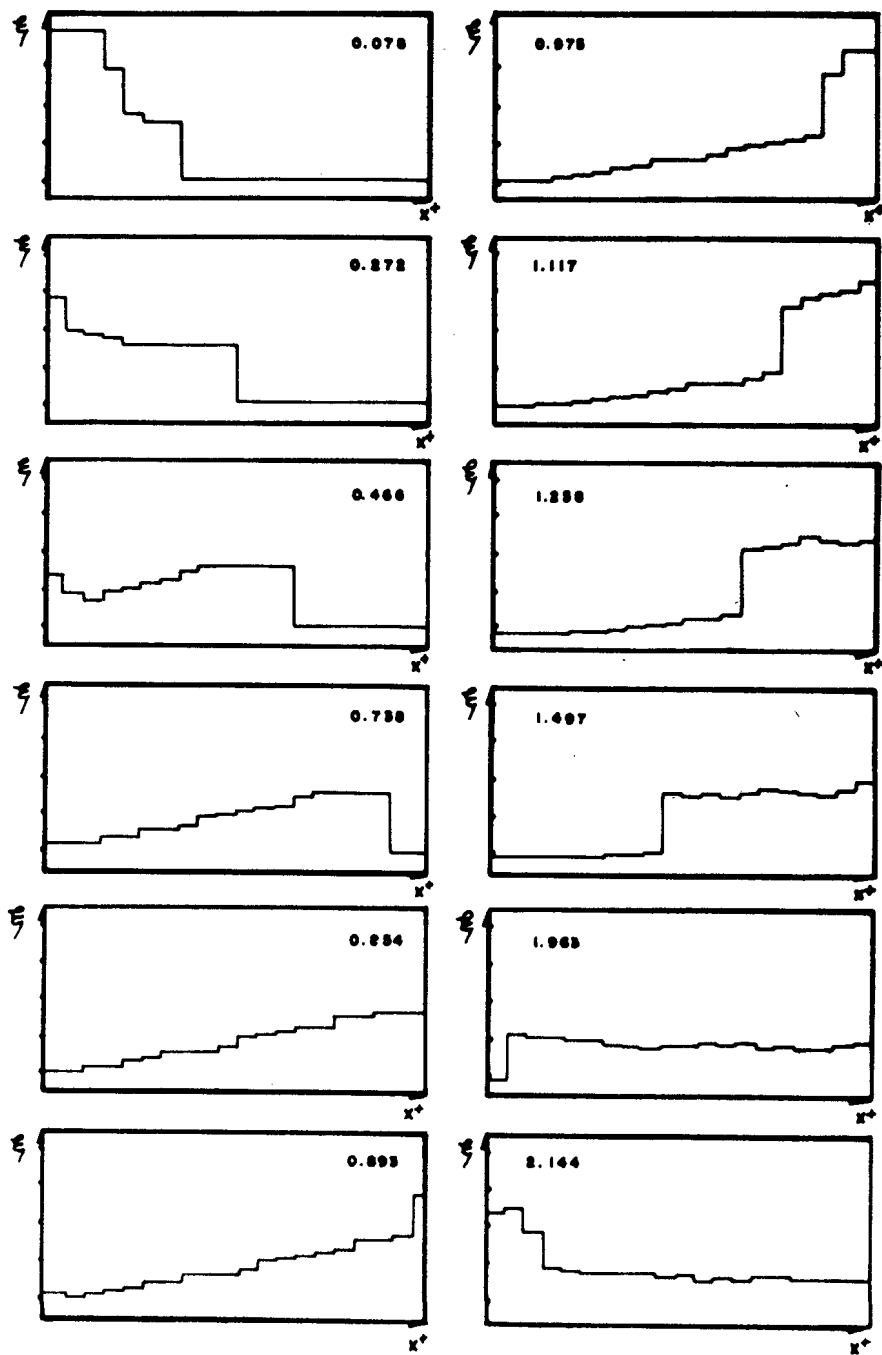


FIGURA 5 - A Fração de Fluido ξ versus x^+ , com $c_1^+=0$.

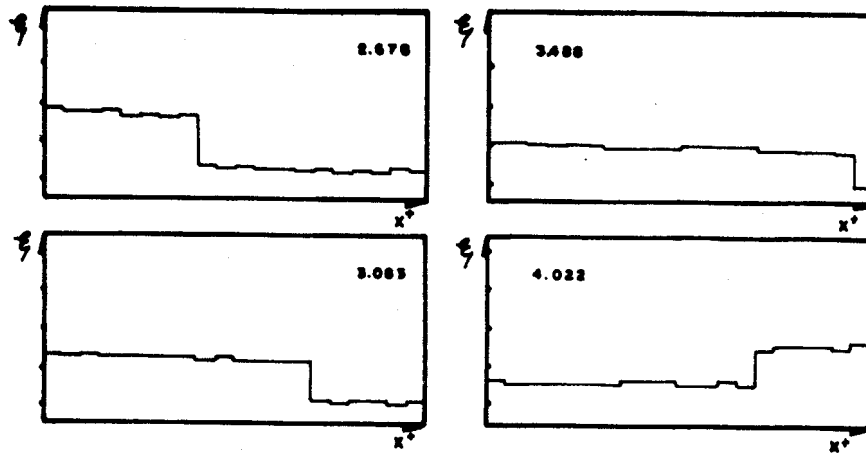


FIGURA 5 - A Fração de Fluido ξ versus x^+ , com $c_1^+=0$.

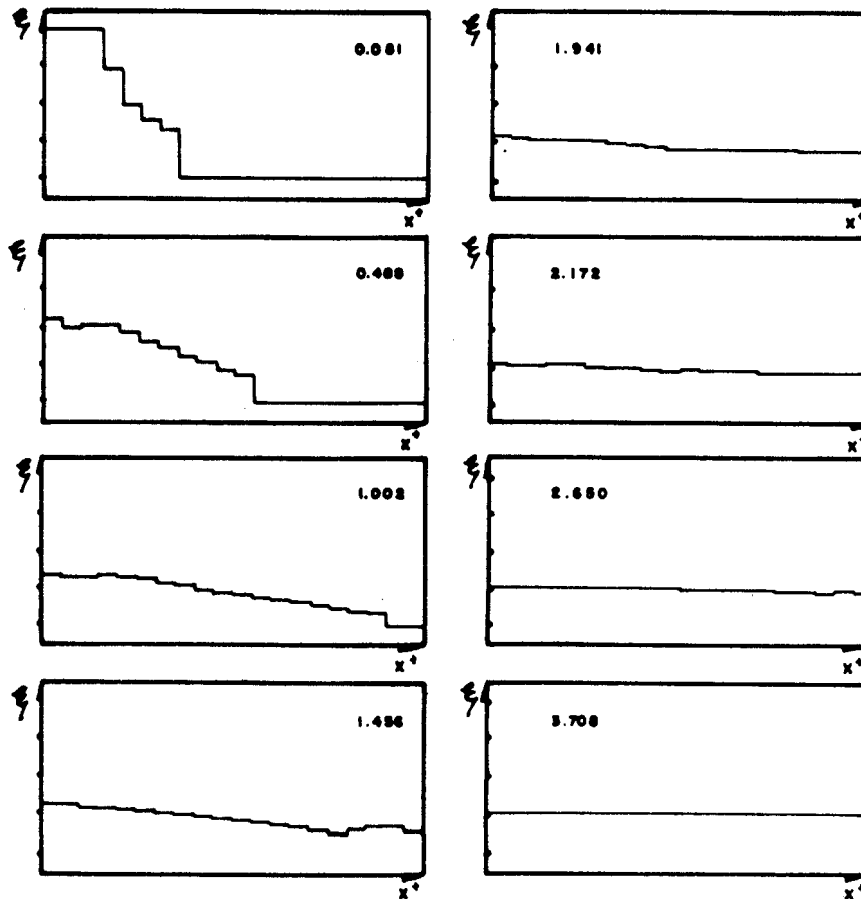


FIGURA 6 - A Fração de Fluido ξ versus x^+ , com $c_1^+=20$.

a influência dos termos de inércia, considerados na equação da quantidade de movimento. Esta influência pode ser sentida, principalmente, no efeito de "reflexão" com "acúmulo" de fluido quando a frente de onda toca uma das paredes impermeáveis. Este tipo de fenômeno não poderia ser previsto pela equação da difusão clássica, que não considera a inércia do fluido.

Deve ser notado também que o efeito, acima mencionado, vai se tornando menos perceptível à medida que aumentamos " c_1^+ ".

REFERENCIAS

- [1] Atkin, R.J. and Craine, R.E., "Continuum theory of mixtures: basic theory and historical development", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. XXIX, part 2, 1976.
- [2] Williams, W.O., "Constitutive equations for flow of an incompressible viscous fluid through a porous medium", Quarterly of Applied Mathematics, pp. 255-267, 1978.
- [3] Paes-Leme, P.J., "Sistemas hiperbólicos de conservação: uma análise numérica de ondas de choque", 4ª CNMAC, IM-UFRJ, 1981.
- [4] Gama, R.M.S., "Modelagem para escoamentos em meios porosos", Tese de Doutorado, DEM-PUC/RJ, 1985.