

## SÍNTESIS DE SONIDO POR MODELADO FÍSICO DE INSTRUMENTOS DE CUERDA PERCUTIDA

Ezequiel A. Mignini<sup>a</sup> y Federico S. Miyara<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Laboratorio de Acústica y electroacústica, Universidad Nacional de Rosario, Riobamba 245 bis, 2000 Rosario, Argentina, [ezequielmignini@gmail.com](mailto:ezequielmignini@gmail.com), <http://www.fceia.unr.edu.ar/acustica/>

<sup>b</sup>Laboratorio de Acústica y electroacústica, Universidad Nacional de Rosario, Riobamba 245 bis, 2000 Rosario, Argentina, [fmiyara@fceia.unr.edu.ar](mailto:fmiyara@fceia.unr.edu.ar), <http://www.fceia.unr.edu.ar/acustica/>

**Palabras Clave:** Modelado físico, guía de ondas, cuerda, instrumentos musicales.

**Resumen.** En el presente trabajo se estudia la producción de sonido a partir del método de síntesis por modelado físico de la cuerda percutida. El modelado físico de instrumentos musicales consiste en generar sonidos a partir de un modelo físico-matemático de los elementos que interactúan dentro del instrumento real. Este tipo de síntesis está siendo muy utilizado actualmente debido a la capacidad de reproducir sonidos reales logrando una gran naturalidad y expresividad. Existen diferentes métodos que permiten abordar el modelado físico. Luego del estudio y la revisión de los mismos se ha seleccionado el modelo de “guía de onda digital”, en inglés digital waveguide, el cual se basa en el principio de D’Alambert de propagación de ondas y consiste en descomponer la onda viajera en dos componentes que se desplazan en sentido opuesto hacia los extremos de la cuerda. En el caso de la cuerda percutida, se debe modelar la velocidad transversal de la cuerda debido a que se aplica una condición inicial de velocidad. Si suponemos que se la golpea con un martillo, como sucede en un piano, la velocidad transversal inicial en los puntos en donde se produce el impacto toma un valor no nulo, formándose así un pulso aproximadamente rectangular. La excitación se descompone en dos ondas que se desplazan en sentidos opuestos dentro de líneas de retardo digitales, las cuales representan el sistema físico real. Estas ondas se reflejan en los extremos de la cuerda donde además, se amortigua debido a la impedancia mecánica del puente. Para obtener la velocidad transversal real en un punto determinado de la cuerda se suman ambas componentes. Una vez obtenida, se modela la interacción entre la cuerda y la tabla armónica. Ésta es la encargada de la transmisión hacia el aire de las vibraciones generada en la cuerda. Es necesario conocer tanto su impedancia mecánica como la función de transferencia entre la fuerza en el puente y la presión sonora. En este trabajo se expone la etapa inicial del proyecto que consiste en la realización de un modelo matemático que simula las cuerdas de un piano acopladas a su tabla armónica. El mismo es capaz de sintetizar el sonido de distintas notas musicales a partir de una señal de entrada que simula la velocidad que el martillo transfiere a la cuerda luego de golpearla. Esta parte del trabajo se desarrolló sobre un software de análisis matemático matricial con el objetivo de evaluar y ajustar los algoritmos a fin de exportarlos en una segunda etapa, hacia un lenguaje de programación orientado a la creación y síntesis de sonido y música en tiempo real.

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen varios tipos distintos de síntesis de sonidos. Los más utilizados comercialmente ya sea en teclados sintetizadores o en programas de síntesis para computadoras son la síntesis por tabla de ondas, el modelado espectral a partir de síntesis aditiva y sustractiva y la síntesis por FM (modulación frecuencial). A partir de la década del 80 comenzaron a analizarse modelos físicos para la síntesis de instrumentos. Estos modelos presentaban la ventaja de no requerir una gran cantidad de memoria para alojar las muestras pregrabadas como en el método de tabla de ondas pero requerían una capacidad de procesamiento muy grande. Por este motivo no se pudieron implementar en tiempo real. Hoy en día el aumento de la capacidad de cómputo de las computadoras permite la implementación de estos métodos para su ejecución en tiempo real por lo que se está optando cada vez más por este tipo de síntesis fundamentalmente en programas de síntesis para computadoras. La elección del modelado físico se basa fundamentalmente en el realismo, la naturalidad y la expresividad que puede lograrse al modelar instrumentos mediante este enfoque. Otro punto muy interesante a tener en cuenta del modelado físico es que el mismo brinda la oportunidad de modificar los parámetros físicos reales de los instrumentos a valores irreales, permitiéndose la creación de nuevos sonidos en forma intuitiva. Dentro del modelado físico existen distintos métodos, los cuales pueden clasificarse dentro de dos posibles técnicas existentes: técnicas de dominio temporal y técnicas de descomposición modal. Dentro de las primeras pueden nombrarse los métodos de Digital Waveguide, Finite Difference Time Domain, Wave Digital Filter y el modelado mixto. El segundo grupo está compuesto por los métodos de Síntesis Modal y Functional Transformation Method (FTM). En la actualidad el método más importante de los mencionados anteriormente es el de guía de ondas digital. En la mayor parte de los avances en la teoría del modelado físico se ha incorporado este método. Por otro lado todos los sintetizadores comerciales basados en modelado físico como por ejemplo el Yamaha VL1 también lo utilizan. El presente trabajo implementa un modelo matemático con el fin de sintetizar el sonido de un piano, instrumento que produce su sonido a partir de la percusión de sus cuerdas mediante martillos. Este modelo tiene en cuenta la propagación de la señal de excitación en la cuerda la cual determina la frecuencia fundamental del sonido. Luego esta señal se filtra para contemplar el efecto de la tabla armónica y la caja del piano. Además se ha incorporado al modelo el acoplamiento entre las cuerdas del mismo, el cual es un factor fundamental para dar realismo al sonido.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1. Fundamentos del modelado a partir de guías de ondas digitales

Como se mencionó anteriormente el modelo de guía de onda digital se basa en la solución de D'Alambert de la ecuación de onda, la cual consiste en descomponer la onda viajera en dos componentes que se desplazan en sentido opuesto hacia los extremos de la cuerda. Este método fue introducido por Julius O. Smith, ver [Smith \(1992\)](#). La solución general de la ecuación de onda puede verse en la Ec.1

$$y(t, x) = y_r \left( t - \frac{x}{c} \right) + y_l \left( t + \frac{x}{c} \right) \quad (1)$$

donde  $y_r$  es la componente que se desplaza a la derecha,  $y_l$  es la componente que viaja hacia la izquierda y  $c = \sqrt{K/\epsilon}$  es la velocidad de la onda en la cuerda, siendo  $K$  la tensión de la cuerda y  $\epsilon$  la densidad lineal.

Para llevarla al dominio digital es necesario muestrear las amplitudes de la onda viajera a intervalos de tiempo  $T = 1/F_s$  donde  $F_s$  es la frecuencia de muestreo, resultando entonces el

mínimo intervalo espacial igual a la distancia que la onda se desplaza en un período de muestreo, esto es  $X = cT$ .

Si reemplazamos  $t = nT$ ,  $x = mX = mcT$  para realizar el muestreo, obtenemos

$$\begin{aligned} y(t_n, x_m) &= y_r(nT - mX/c) + y_l(nT + mX/c) \\ &= y_r(nT - mcT/c) + y_l(nT + mcT/c) \\ &= y_r[(n - m)T] + y_l[(n + m)T] \end{aligned} \tag{2}$$

Los términos  $y_r[(n - m)T]$  y  $y_l[(n + m)T]$  pueden pensarse como la salida de una línea de  $m$  retardos cuyas entradas son  $y_r$  y  $y_l$  respectivamente. Si suponemos  $T = 1$  resulta

$$y(t_n, x_m) = y_r(n - m) + y_l(n + m) \tag{3}$$

En la figura Fig. 1 se puede observar una representación gráfica de lo comentado anteriormente para un caso particular donde la salida se encuentra tres muestras espaciales hacia la derecha de la referencia.

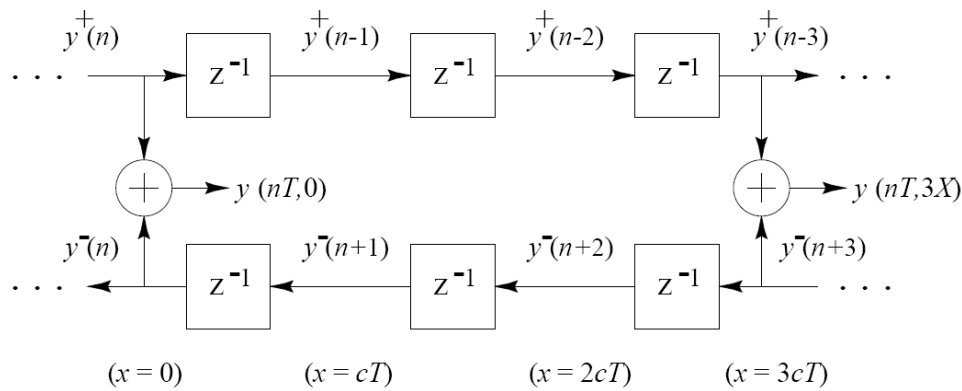


Figura 1: Simulación digital de una guía de ondas ideal (Smith, 1992)

En la Fig. 2 puede verse un modelo simplificado para una línea de retardos de longitud  $M$

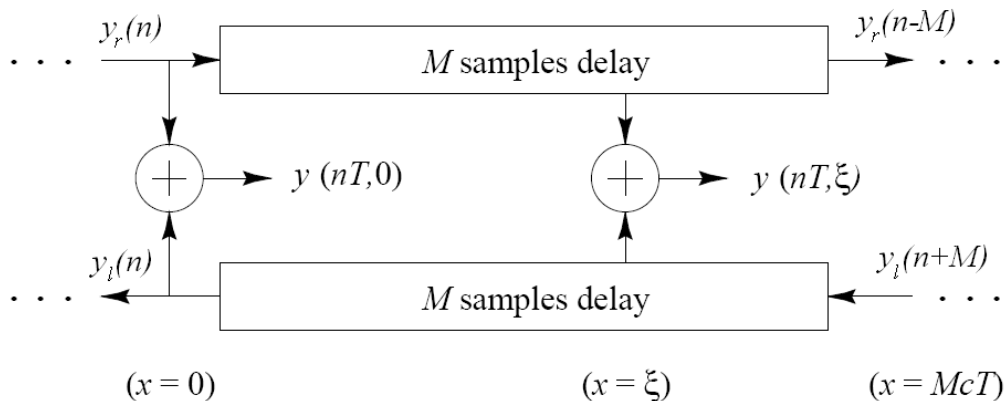


Figura 2: Esquema simplificado de una guía de ondas digital (Smith, 1992)

Cabe aclarar que se pueden utilizar otras variables físicas del sistema como puede ser la presión, aceleración o la fuerza en lugar de la velocidad transversal. El valor real de dichas variables en cualquier punto de la guía de onda puede obtenerse a partir de la suma de las ondas viajeras que la componen.

## 2.2. Modelado de una cuerda real

Todos los instrumentos de cuerda poseen cuerdas de longitud finita sujetas a elementos que la mantienen tensas. Esto introduce condiciones de contorno, que deben incorporarse al modelo. Resulta entonces que las dos líneas de retardo deben interconectarse a través de terminaciones que modelizan este efecto. Una posible implementación de este fenómeno es la que se observa en la Fig. 3

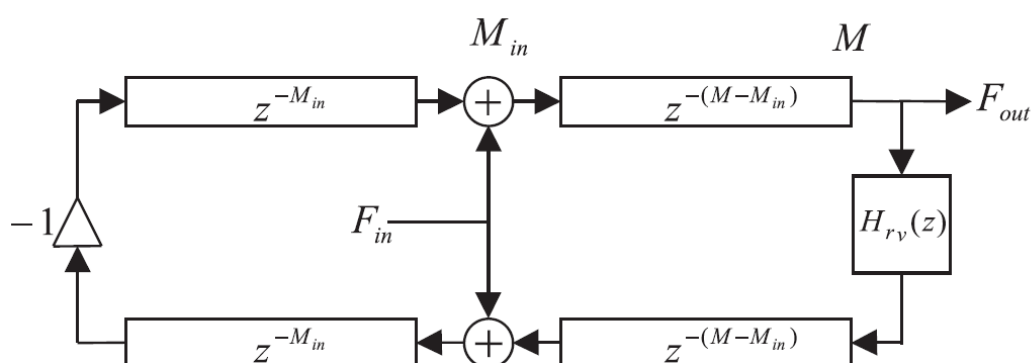


Figura 3: Modelo de guía de ondas para cuerda real (Bank et al., 2000)

Puede observarse que el coeficiente de reflexión en un extremo es igual a  $-1$  ya que se considera que allí sólo se produce una inversión de fase, en cambio en el otro extremo se utiliza un filtro digital para representar la reflexión y además las pérdidas y dispersión en el mismo. Esto se debe a que en general en un extremo la cuerda se sujeta rígidamente mediante una clavija y en el otro se coloca el puente para transferir las vibraciones a la caja o a la tabla armónica del instrumento.

## 3. MODELO DEL PIANO

### 3.1. Estructura del modelo del piano

La estructura del modelo del piano emula las partes fundamentales de un piano real. La primera es la interacción entre el martillo y la cuerda. En segundo lugar se encuentra la propagación de la onda en la cuerda y por último el resonador, parte que se encarga de realizar la tarea de la tabla armónica, es decir transmitir hacia el aire las vibraciones de la cuerda. En la figura Fig. 4 se muestra un diagrama en bloques de esta estructura.

Como primera aproximación se ha utilizado como mecanismo de excitación un pulso cuadrado de velocidad con un ancho igual al ancho del martillo de un piano, filtrado en el tiempo con un filtro digital de respuesta al impulso finita FIR de frecuencia de corte  $f_c = 20000 \text{ Hz} < \frac{F_s}{2}$  y orden 10 a fin de evitar la presencia de alias, ya que como en todo sistema digital debe cumplirse el Teorema de Muestreo. Para el modelado de la cuerda se utilizó una guía de on-

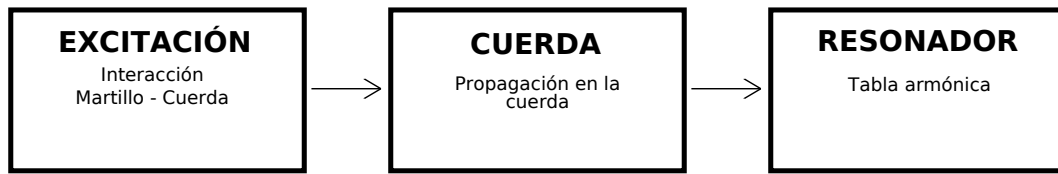


Figura 4: Estructura del modelo del piano

da digital con las pérdidas y dispersiones concentradas en un único punto. Cabe aclarar que debido al acoplamiento entre las cuerdas del piano, se producen fenómenos de batido y doble decaimiento, como se verá con más detalle en 3.2, por lo que es necesario utilizar dos modelos de cuerda acoplados sobre un mismo puente para cada nota que se desea representar.

Por último el efecto de la tabla armónica y la caja del piano se modelizó mediante el uso de filtros (*FIR*) diseñados a partir de las gráficas de respuesta en frecuencia presentes en [Bank et al. \(2002\)](#) y en [Wogram \(1990\)](#).

### 3.2. Acoplamiento entre cuerdas

En los instrumentos de cuerda, en especial en el piano, existen dos fenómenos muy importantes para la característica del sonido. Por un lado el acoplamiento entre las cuerdas, lo cual genera una modulación en la amplitud y por otro lado, la presencia de dos decaimientos distintos, uno rápido seguido por otro más lento ([Weinreich, 1977](#)). El primero de estos efectos se debe al pequeño desajuste entre las frecuencias propias de las mismas, en cambio el segundo ocurre por la transferencia de energía entre la vibración con polarización transversal al puente y la vibración con polarización lateral.

Existen varios modelos matemáticos para representar estos efectos. El más sencillo es realizar dos modelos de cuerdas independientes con frecuencias ligeramente diferentes y sumar sus salidas. Pero para lograr un efecto más realista se utilizó un modelo basado en el que se observa en la figura Fig. 5 ([Smith, 1993](#))

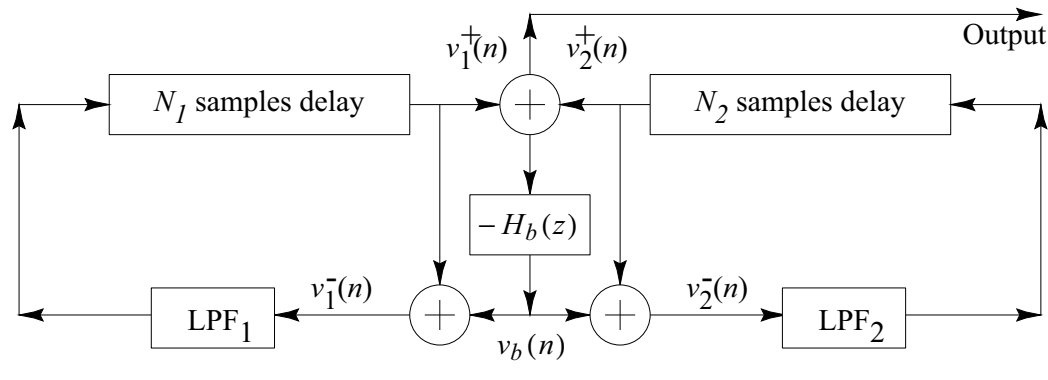


Figura 5: Modelo de dos cuerdas acopladas al mismo puente ([Smith, 1993](#))

donde  $H_b$  es el filtro que representa la admitancia de transmisión y puede calcularse como

$$H_b(z) = \frac{2}{R_b(z) + R_1 + R_2} \tag{4}$$

siendo  $R_b(z)$  la impedancia del puente y  $R_1, R_2$  la impedancias de la cuerda 1 y 2 respectivamente. Por otra parte,  $N_1$  y  $N_2$  representan las longitudes de las líneas de retardo y pueden

calcularse como  $N_1 = 2L/X = F_s/F_1$  y  $N_2 = 2L/X = F_s/F_2$ , siendo  $F_1, F_2$  la frecuencia asociada a la cuerda 1 y 2, respectivamente, las cuales corresponden a la nota deseada pero cada una alterada en un pequeño porcentaje (un incremento y un decremento respectivamente).

Es importante destacar que  $N_1$  y  $N_2$  deben ser números enteros por lo que se comete un error cuando la frecuencia de muestreo no es un múltiplo entero de la frecuencia de la nota a representar ya que debe realizarse un redondeo. Este error no es muy grande pero como se comenta en la Sec. 6 en una segunda etapa de este desarrollo se buscará corregirlo mediante la implementación de líneas de retardo fraccionales.

Los filtros pasabajos que se encuentran sobre la realimentación se utilizan para contemplar las pérdidas que se producen en alta frecuencia ya que el amortiguamiento es mayor. Estas pérdidas se deben a la absorción del aire y a pérdidas que se producen en el interior de la cuerda. Estos filtros pueden implementarse con filtros de primer orden como los que se muestran en la Ec. 5.

$$H_{LP} = b_0 + b_1 z^{-1} \quad (5)$$

Como la ganancia de estos filtros no debe superar a la unidad y en baja frecuencia debe aproximarse a la unidad ya que el amortiguamiento es casi nulo, esto implica  $b_0 + b_1 = 1$ . Por otra parte, para lograr una fase lineal, debe ser  $b_0 = b_1$ . Esto implica que  $b_0 = b_1 = 0,5$ .

### 3.3. Admitancia de transmisión

El filtro que representa la admitancia de transmisión del puente fue implementado de dos formas distintas. La primera es mediante un filtro de un único cero tipo pasabajos, según lo propuesto por Smith (1993). La frecuencia de corte del mismo se fija empíricamente, por lo que no representa en forma precisa el comportamiento físico real del puente. Como punto a favor puede destacarse el bajo costo computacional, por lo que resulta ideal a la hora de la síntesis en tiempo real.

Debido a que en esta primera etapa no se busca la implementación del modelo en tiempo real se ha implementado el filtro de la ecuación Ec. 4 mediante un filtro FIR de orden 100. La ventaja principal de esta segunda forma es que el filtro resultante guarda relación con la física del puente a cambio de un mayor costo computacional.

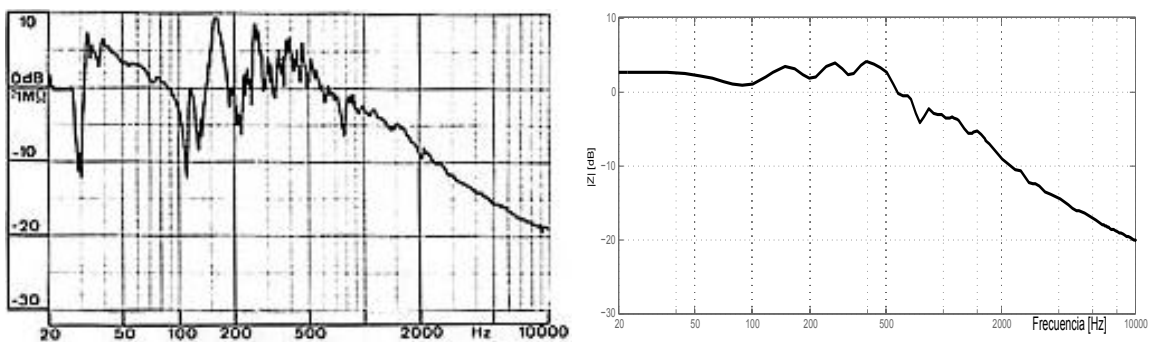
Una vez implementados y probados ambos filtros se ha optado por el segundo, a pesar de no presentarse diferencias audibles importantes, ya que lo que se busca es un modelo que represente de forma precisa un piano real.

### 3.4. Tabla armónica

La tabla armónica del piano es la encargada de la transmisión hacia el aire de las vibraciones generadas en la cuerda sobre el puente. Para caracterizarla completamente se requiere la función de transferencia entre la velocidad del puente y la presión sonora producida por la misma así como también su impedancia mecánica. Como se mencionó anteriormente, para modelarla se extrajeron los datos de mediciones de respuestas en frecuencia realizadas en trabajos anteriores y se incorporaron en el modelo mediante su representación a partir de filtros digitales de tipo FIR.

La utilización de filtros FIR se debe a que los mismos permiten lograr una gran calidad de sonido para una respuesta dada. Como desventaja se requieren filtros de orden alto ya que las respuestas en frecuencia de las mismas son muy complejas.

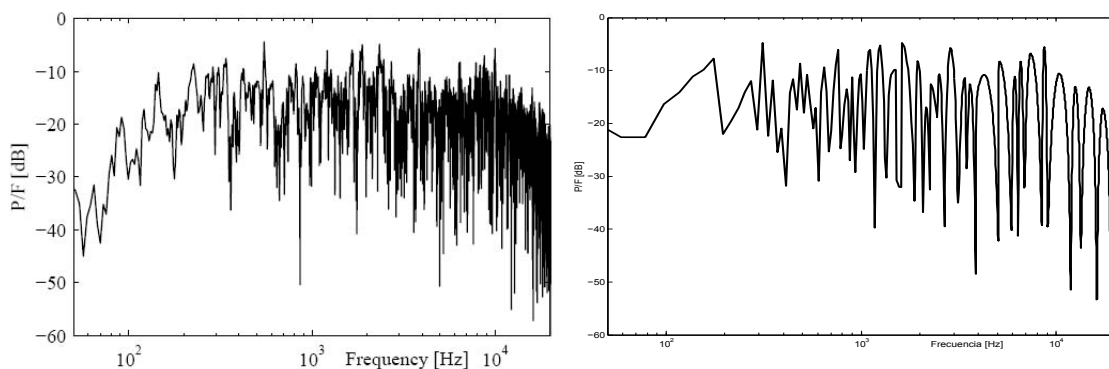
La extracción de los datos de mediciones presentes en trabajos anteriores se realizó utilizando el software matemático matricial *Matlab*, mediante un script llamado *Grabit*, [Doke \(2005\)](#). Esta interfaz de usuario permite cargar un archivo de imagen en donde se encuentre una gráfica y volcar los valores de los puntos que se desean a una matriz de dos columnas. Luego, se realizaron las conversiones de unidades correspondientes e interpolaron los datos obtenidos mediante el uso de la función *interp1*. Una vez realizado esto se diseñaron los filtros a partir de la función *fir2*. Se probó el comportamiento de los filtros para distintos órdenes y se decidió utilizar filtros de orden alto, más precisamente  $N = 1024$  para lograr una representación más precisa. En la siguiente figura Fig. 6 se muestra la respuesta medida y la del filtro implementado para la impedancia de la tabla armónica.



(a) Impedancia en función de la frecuencia ([Wogram, 1990](#)) (b) Respuesta en frecuencia del filtro implementado

Figura 6: Implementación de la función de transferencia de la tabla armónica

En la figura Fig. 7 se muestra la respuesta medida y la del filtro implementado para el modelo de la función de transferencia entre la fuerza en el puente y la presión sonora.



(a) Función de transferencia P/F ([Bank et al., 2002](#)) (b) Respuesta en frecuencia del filtro implementado

Figura 7: Implementación de la función de transferencia entre la presión sonora y la fuerza en el puente

Vale remarcar que el comportamiento de ambos filtros difiere a las respuestas reales sobre todo en baja frecuencia debido a que el orden de los mismos no es lo suficientemente alto, pero este error no es muy importante ya que se da a frecuencias muy bajas, inferiores a  $100 \text{ Hz}$ , mientras que las cualidades tímbricas de la mayoría de los sonidos obedecen a la distribución de sus armónicos superiores.



#### 4. IMPLEMENTACIÓN

La implementación del modelo se llevó a cabo en la herramienta *Simulink*. Este es un entorno de programación visual que funciona sobre el programa *Matlab*. El mismo permite simular y analizar modelos matemáticos realizados a partir de diagramas de bloques. En la siguiente figura Fig. 8 se muestra el modelo implementado para la síntesis del sonido de piano.

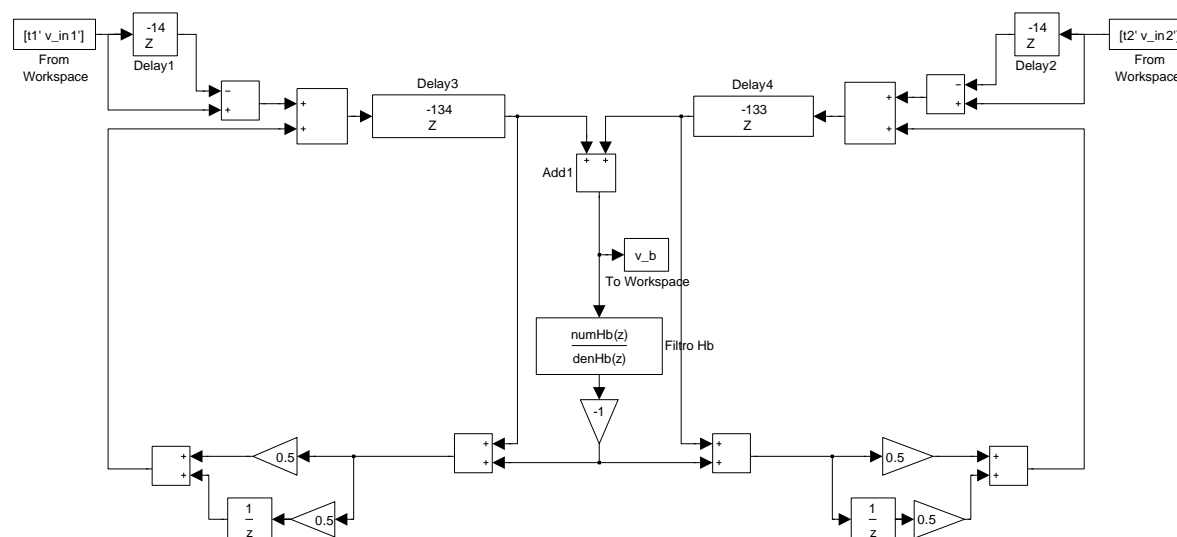


Figura 8: Modelo implementado en *Simulink*

Pueden observarse las dos líneas de retardos acopladas al filtro  $H_b$  el cual representa la admitancia del puente. Las señales de entrada se generan en *Matlab* y se introducen al modelo de *Simulink* a través de los bloques llamados *From Workspace*. Éstas contienen un pulso de velocidad de ancho igual al grosor del martillo de un piano, filtrado a fin de evitar alias. Una vez que ingresan al modelo se les resta una versión retardada de sí mismas a fin de representar la reflexión contra el extremo más rígido y con esta señal resultante se alimenta a las líneas de retardo.

Por otro lado pueden observarse los filtros pasabajos que contemplan las pérdidas en alta frecuencia, tal como se explicó en la sección Sec. 3.2.

Una vez que se ejecuta el modelo y se obtiene la velocidad transversal del puente en función del tiempo, se la convoluciona con la respuesta al impulso del filtro que representa a la impedancia de dicho puente a fin de obtener la fuerza transversal que generan ambas cuerdas sobre el mismo. Por último esta nueva señal se filtra con el filtro correspondiente a la función de transferencia P/V de la tabla armónica para obtener la presión sonora generada fuera del piano. La presión sonora resultante se exporta a un archivo *.wav* a fin de obtener audio digital y poder escuchar el resultado de la simulación.

#### 5. RESULTADOS

Para obtener el audio sintetizado de una nota musical se aplicó una única excitación de entrada al modelo y se realizó la simulación del mismo durante un lapso de 5 segundos. En la gráfica de la figura Fig. 9 se muestra la forma de onda obtenida para una nota  $A_4$  de frecuencia 440 Hz con un porcentaje de desajuste entre las frecuencias de las cuerdas igual al 0,4 %. En la figura Fig. 10 pueden verse pequeños fragmentos del inicio y el final de la señal, a fin de



apreciar con más detalle la onda obtenida.

En la figura Fig. 11 puede verse el contenido espectral de la señal presión sonora obtenida en dB referidos a su valor máximo.

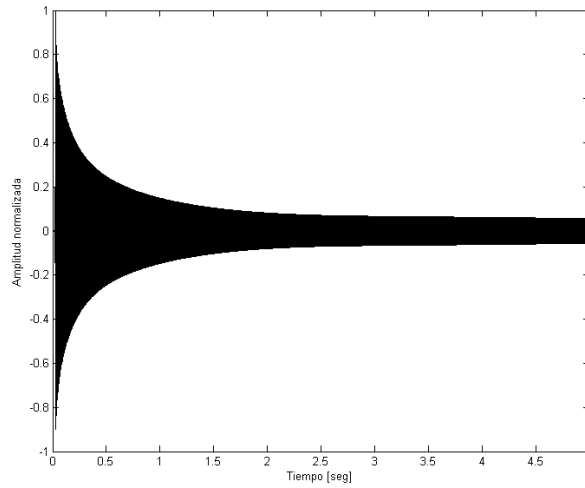
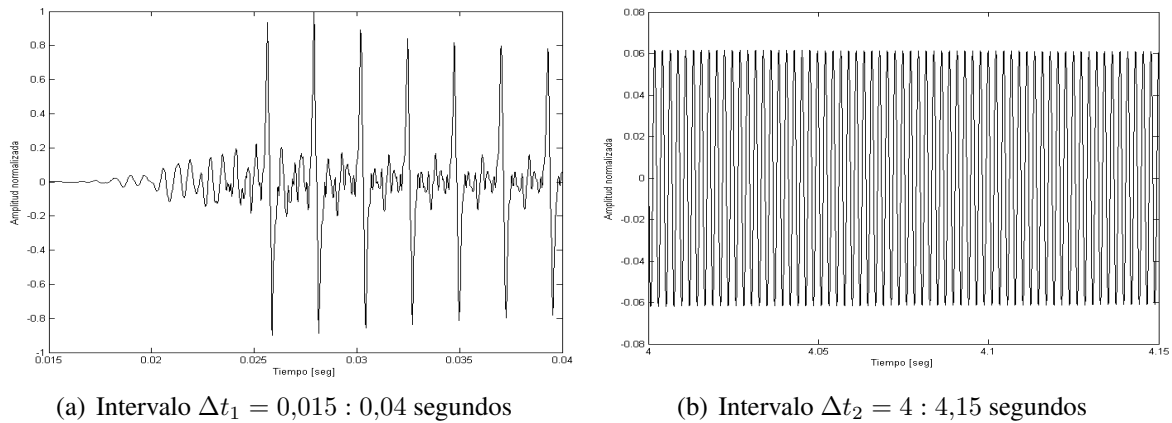


Figura 9: Señal obtenida para una frecuencia igual a 440 Hz con un desajuste entre cuerdas igual al 0,4 %



(a) Intervalo  $\Delta t_1 = 0,015 : 0,04$  segundos

(b) Intervalo  $\Delta t_2 = 4 : 4,15$  segundos

Figura 10: Fragmentos de la señal obtenida en distintos intervalos de tiempo

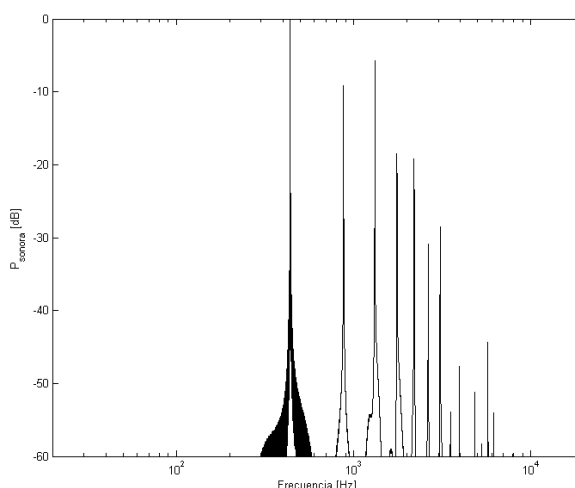


Figura 11: Espectro de la señal obtenida

Puede verse como inicialmente la amplitud cae abruptamente y luego comienza a disminuir lentamente. Debido a que en esta simulación se ha elegido un desajuste pequeño entre las frecuencias de ambas cuerdas no puede observarse claramente el batido ya que es muy pequeño.

Para mostrar la capacidad del modelo de representar el batido que ocurre en el piano, en la figura siguiente Fig. 12 se muestra una nueva simulación de la misma nota pero con un desajuste entre las frecuencias de las cuerdas igual al 1%. En esta gráfica se pueden ver los dos fenómenos comentados en la sección Sec. 3.2.

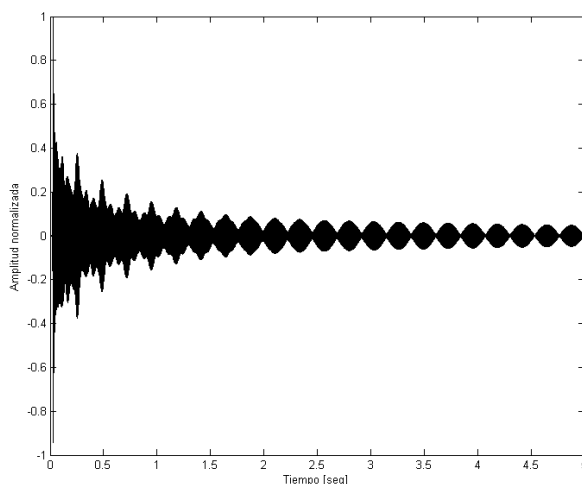


Figura 12: Señal obtenida para una frecuencia igual a 440 Hz con un desajuste entre cuerdas igual al 1%

## 6. CONCLUSIONES

Se logró implementar un modelo matemático que sintetice el sonido de un piano a partir del modelo físico del mismo. Este permite generar distintas notas musicales del registro del piano con bastante similitud al sonido real. Es cierto que aún no se asemejan totalmente a los sonidos generados por el instrumento real aunque es lógico ya que en esta primera etapa de la investigación se han hecho simplificaciones a fin de quitarle complejidad al modelo.

Cabe destacar que se representaron satisfactoriamente los fenómenos físicos que ocurren

debido al acoplamiento entre las cuerdas del piano, como puede verse en la sección Sec. 5. La representación de los mismos es fundamental a la hora de lograr realismo en el sonido. Además se consiguió modelizar la admitancia de la tabla armónica con un filtro digital que guarda relación con el comportamiento físico del instrumento, como se explicó en la sección Sec. 3.3, a diferencia de otras implementaciones sugeridas en la bibliografía.

Como trabajo futuro se incorporará un modelo que represente mejor la interacción entre el martillo y la cuerda. Además se realizarán retardos fraccionarios para lograr mayor precisión en la afinación de la nota y un menor desajuste entre ambas cuerdas. Por otra parte se harán mediciones de la impedancia y de la función de transferencia  $P/V$  sobre un piano a fin de representarlas más detalladamente ya que son de vital importancia para lograr realismo en el sonido obtenido.

## REFERENCIAS

- Bank B., De Poli G., y Sujbert L. A multi-rate approach to instrument body modeling for real-time sound synthesis applications. *Audio Engineering Society, 112th Convention*, 2002.
- Bank B., Sujbert D.L., y Välimäki D.V. Physics-based sound synthesis of the piano. Informe Técnico, Budapest University of Technology and Economics, 2000.
- Doke J. Grabit. 2005. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7173>.
- Smith J.O. Physical modeling using digital waveguides. *Computer Music Journal*, 16:74–91, 1992.
- Smith J.O. Efficient synthesis of stringed musical instruments. *Proc. Int. Computer Music Conference*, páginas 64–75, 1993.
- Weinreich G. Coupled piano string. *Journal of the Acoustical Society of America*, 62:1474–1481, 1977.
- Wogram K. The strings and the soundboard. 1990. [http://www.speech.kth.se/music/5\\_lectures/wogram/index.html](http://www.speech.kth.se/music/5_lectures/wogram/index.html).