

## DISEÑO DE VIGAS COMPUESTAS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

Florencia Reguera<sup>a,b,c</sup>, Víctor H. Cortínez<sup>a,b</sup> y Marcelo T. Piovan<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional (FRBB), 11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Argentina, <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup> *CONICET, Argentina*

<sup>c</sup> *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

**Palabras clave:** Diseño Óptimo, Materiales Compuestos, Simulated Annealing.

**Resumen.** En el presente trabajo se analiza el diseño de vigas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos, utilizando un modelo estructural que contempla en forma completa la flexibilidad por corte en vigas rectas. El modelo teórico es implementado computacionalmente mediante el método de elementos finitos, permitiendo ponderar estudios estáticos, dinámicos y de estabilidad de la estructura. El problema de diseño es formulado en base a una optimización multiobjetivo, minimizando el peso de la viga y su desplazamiento en función de parámetros de peso definidos en forma arbitraria, y es resuelto mediante la aplicación de la técnica heurística de optimización *Simulated Annealing*, la cual admite el uso de variables discretas y asegura la convergencia global del problema.

## 1 INTRODUCCIÓN

La aplicación de materiales compuestos en la construcción de estructuras civiles, mecánicas y aeronáuticas se ha incrementado considerablemente en los últimos años. Las estructuras construidas con estos materiales presentan diversas ventajas con respecto a materiales convencionales, tales como alta rigidez y resistencia con respecto a su peso propio, mejorada resistencia a la fatiga y a la corrosión. La manera de construir tales estructuras da lugar a otra de sus ventajas que es su gran versatilidad, lo que a su vez origina un aspecto negativo basado en la dificultad de realizar el diseño estructural mediante los métodos clásicos. En general, esto ha motivado el desarrollo de métodos de diseño computacionales, implementados en base a algoritmos de optimización matemática que posibilitan el diseño automático de estructuras a fin de cumplir determinados objetivos de la mejor manera posible.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo de diseño óptimo para vigas de pared delgada de secciones abiertas y cerradas construidas con materiales compuestos, minimizando el peso de la estructura y su deformación, contemplando aspectos de resistencia y de estabilidad. En el trabajo publicado por los autores (Reguera et al., 2007) se estudió el problema de diseño a partir de una solución analítica del problema estructural, considerando las dimensiones de la sección como las únicas variables de diseño. En esta ocasión, el análisis de la estructura se realiza en base al modelo estructural desarrollado por Cortínez y Piovan (2002); Cortínez y Piovan (2006); Piovan y Cortínez (2007), el cual considera en forma completa efectos de flexibilidad por corte bajo una cinemática no lineal. Se emplean formulaciones numéricas establecidas a partir del Método de Elementos Finitos para la resolución de problemas estáticos, dinámicos y de inestabilidad lineal de vigas de pared delgada compuestas.

El esquema de diseño se formula como un problema de optimización multiobjetivo que tiene como variables de diseño las dimensiones geométricas de la sección y los ángulos de orientación de las fibras del material. Por tratarse de un problema de optimización con variables discretas, la aplicación de técnicas convencionales de optimización basadas en gradiente se hace inviable. Además, la optimización del diseño de materiales compuestos lleva a un problema de optimización global con múltiples óptimos locales y un espacio de diseño complejo. Por ello, se hace uso del método *Simulated Annealing*, el cual es un método heurístico que converge a soluciones óptimas de carácter global.

## 2 MECÁNICA DE VIGAS COMPUESTAS DE PARED DELGADA

En esta sección se describe en forma sintetizada la formulación teórica del modelo estructural desarrollado por Piovan y Cortínez (2007), el cual permite el análisis lineal de vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos, de secciones transversales abiertas y cerradas. El modelo contempla la flexibilidad por corte debida a flexión y a alabeo torsional no uniforme, teniendo en cuenta otros efectos no convencionales, tales como efectos de corte en el espesor, efectos inerciales, efectos higrotérmicos y efectos de curvatura.

### 2.1 Hipótesis

1. La sección es indeformable en su plano.
2. La sección se considera compuesta por una sucesión de placas de espesor constante a lo largo del eje de la viga (ver Figura 1).
3. La viga tiene un único sistema de referencia ubicado en el centroide geométrico de la sección.
4. La laminación se asume simétrica y balanceada, o especialmente ortótropa.

5. Se consideran deformaciones de primer orden debidas a desplazamientos lineales, deformaciones de segundo orden debidas a desplazamientos lineales y deformaciones de primer orden debidas a desplazamientos no lineales.
6. Se desprecian componentes de deformación de orden superior debidas a los desplazamientos no lineales o de segundo orden.
7. Se contempla la existencia de un estado arbitrario de tensiones iniciales.
8. La función de alabeo se supone con variación lineal en el espesor.
9. El amortiguamiento estructural se tendrá en cuenta mediante un modelo simplificado del tipo Rayleigh.
10. La densidad se supone constante a lo largo del eje de la viga, aunque podrá variar en el espesor.

## 2.2 Principio de Trabajos Virtuales para una viga compuesta

La expresión general del Principio de los Trabajos Virtuales para una viga compuesta bajo un estado de carga inicial arbitrario puede expresarse de la siguiente manera:

$$W_{TOTAL} = W_{(1)} + W_{(2)} + W_{(3)} + W_{(4)} + W_{(5)} + W_{(6)} = 0 \tag{1}$$

$$\underbrace{\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^L dV}_{(1)} + \underbrace{\int_V \sigma_{ij}^0 (\delta \eta_{ij}^L + \delta \varepsilon_{ij}^{NL}) dV - \int_{S_2} \bar{T}_i^0 \delta u_i^{NL} dA - \int_V \bar{X}_i^0 \delta u_i^{NL} dV}_{(2)} - \underbrace{\int_{S_2} \bar{T}_i \delta u_i^L dA}_{(3)} - \underbrace{\int_V \bar{X}_i \delta u_i^L dV}_{(4)} + \underbrace{\int_V \rho \ddot{u}_i^L \delta u_i^L dV}_{(5)} - \underbrace{\int_V \mu \dot{u}_i^L \delta u_i^L dV}_{(6)} = 0 \tag{2}$$

En la expresión anterior los términos agrupados en  $W_{(i)}$  corresponden al trabajo virtual de: (1) las deformaciones lineales sobre las tensiones incrementales, (2) las deformaciones de segundo orden y no-lineales sobre tensiones iniciales y de los desplazamientos no-lineales sobre las cargas externas iniciales, (3) los desplazamientos lineales sobre las fuerzas superficiales, (4) los desplazamientos lineales sobre las fuerzas volumétricas, (5) los desplazamientos lineales sobre las fuerzas de inercia, (6) los desplazamientos lineales sobre las fuerzas disipativas por amortiguamiento estructural. Las expresiones específicas de cada uno de ellos pueden verse en [Cortínez y Piovan \(2007\)](#); [Piovan \(2002\)](#).

## 2.3 Campo de desplazamientos

De acuerdo a las hipótesis descriptas, se define el campo de desplazamientos de un punto arbitrario de una viga de pared delgada recta compuesta, incluyendo las componentes de primer y segundo orden:

$$u_x^L(x, s, n, t) = u_{xc}(x, t) - y(s, n) \theta_z(x, t) - z(s, n) \theta_y(x, t) - \omega(s, n) \theta_x(x, t) \tag{3}$$

$$u_y^L(x, s, n, t) = u_{yc}(x, t) - z(s, n) \phi_x(x, t) \tag{4}$$

$$u_z^L(x, s, n, t) = u_{zc}(x, t) + y(s, n) \phi_x(x, t) \tag{5}$$

$$u_x^{NL}(x, s, n, t) = -\frac{1}{2} \left[ z(s, n) \phi_x(x, t) \theta_z(x, t) + y(s, n) \phi_x(x, t) \theta_y(x, t) \right] \quad (6)$$

$$u_y^{NL}(x, s, n, t) = -\frac{y(s, n)}{2} \left[ (\phi_x(x, t))^2 + (\theta_z(x, t))^2 \right] - \frac{z(s, n)}{2} \theta_z(x, t) \theta_y(x, t) \quad (7)$$

$$u_z^{NL}(x, s, n, t) = -\frac{z(s, n)}{2} \left[ (\phi_x(x, t))^2 + (\theta_y(x, t))^2 \right] - \frac{y(s, n)}{2} \theta_z(x, t) \theta_y(x, t) \quad (8)$$

Donde,

$$y(s, n) = Y(s) - n \frac{dZ}{ds} \quad (9)$$

$$z(s, n) = Z(s) + n \frac{dY}{ds} \quad (10)$$

En las expresiones (3) a (8),  $u_{xc}(x, t)$  es el desplazamiento axial,  $\theta_z(x, t)$  y  $\theta_y(x, t)$  son parámetros de rotación flexionales,  $u_{yc}(x, t)$  y  $u_{zc}(x, t)$  los desplazamientos transversales de la sección,  $\phi_x(x, t)$  es la rotación torsional de la sección y  $\theta_x(x, t)$  es la variable de alabeo.

La función de alabeo para una sección transversal genérica de pared delgada se define mediante la expresión (11), donde  $\omega_p$  y  $\omega_s$  son las funciones de alabeo en el contorno y en el espesor respectivamente.

$$\omega(s, n) = \omega_p(s) + \omega_s(s, n) \quad (11)$$

$$\omega_p(s) = \int_s [r(s) + \psi(s)] ds - D_C \quad (12)$$

$$\omega_s(s, n) = nl(s) \quad (13)$$

Donde,

$$r(s) = Z(s) \frac{dY}{ds} - Y(s) \frac{dZ}{ds} \quad (14)$$

$$l(s) = Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds} \quad (15)$$

$$\psi(s) = \frac{1}{\bar{A}_{66}(s)} \left[ \frac{\int_s r(s) ds}{\oint_s (1/\bar{A}_{66}(s)) ds} \right] \quad (16)$$

$$D_C = \frac{\oint_s [r(s) + \psi(s)] \bar{A}_{11}(s) ds}{\oint_s \bar{A}_{11}(s) ds} \quad (17)$$

Donde  $r(s)$  representa la distancia en dirección normal desde el centroide a la tangente a cualquier punto de la superficie media,  $l(s)$  representa la distancia entre el centroide y la superficie media (ver Figura 1),  $\psi(s)$  está relacionada con la deformación por corte en la superficie media y  $D_C$  es una constante. En el caso de secciones abiertas,  $\psi(s) = 0$ .

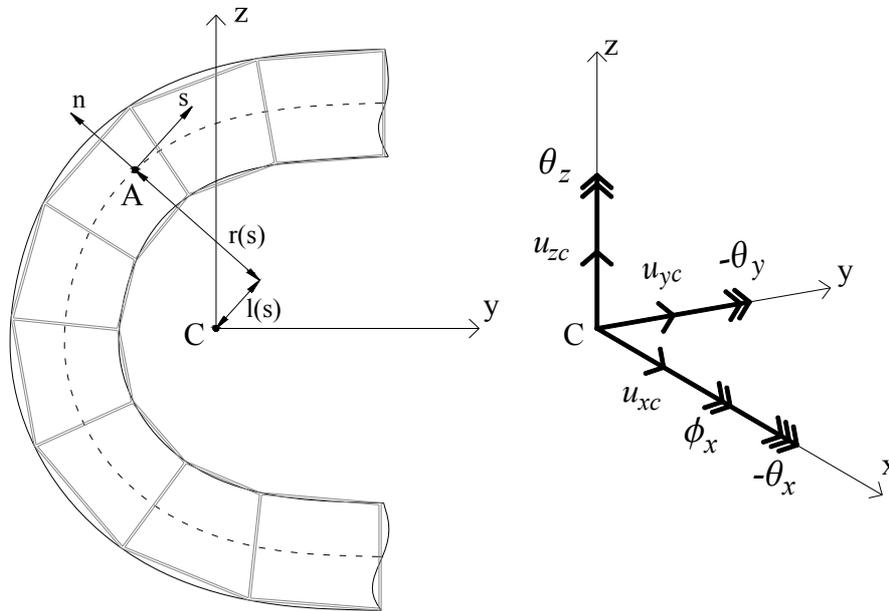


Figura 1: Geometría de la viga y descripción de los desplazamientos.

Introduciendo las expresiones de los desplazamientos definidos anteriormente en la ecuación (1) e integrando sobre el espesor, los términos de la expresión de trabajos virtuales quedan definidos de la siguiente manera:

$$W_{(1)} = \int_0^L \{\delta\Delta_E\}^T \{Q^E\} dx \tag{18}$$

$$W_{(2)} = \int_0^L \{\delta\Delta_G\}^T [T_E^{(0)}] \{\Delta_G\} dx - \int_0^L \{\delta U\}^T [C_X^{(0)}] \{U\} dx - \{\delta U\}^T ([C_T^{(0)}] + [C_D^{(0)}]) \{U\} \tag{19}$$

$$W_{(3)} = -\{\delta U\}^T \{\bar{Q}\} \Big|_{x=0,L} \tag{20}$$

$$W_{(4)} = -\int_0^L \{\delta U\}^T \{P\} dx \tag{21}$$

$$W_{(5)} = \int_0^L \{\delta U\}^T [M] \{\dot{U}\} dx \tag{22}$$

$$W_{(6)} = -\int_0^L \{\delta U\}^T [D] \{\dot{U}\} dx \tag{23}$$

Con el objetivo de no extender en demasía el desarrollo de la teoría de vigas expuesta, se hace referencia al Apéndice A del presente trabajo y al artículo Cortínez y Piovan (2007) donde se desarrollan las expresiones que complementan las ecuaciones anteriores.

### 3 FORMULACIÓN ANALÍTICA BASADA EN ELEMENTOS FINITOS

A continuación se presenta la formulación del elemento finito desarrollado por Cortínez y Piovan (2007) para obtener las aproximaciones numéricas que permitan resolver problemas estáticos, dinámicos y de inestabilidad bajo diferentes condiciones de borde.

El elemento finito de viga recta analizado considera deformación por corte constante y evita el fenómeno de bloqueo por corte. Consta de dos nodos con siete grados de libertad cada uno. Los desplazamientos generalizados del elemento,  $\{U\}$ , se expresan en función del vector de desplazamientos nodal,  $\{U^{(e)}\}$ , a través de la matriz de las funciones de forma,  $[F]$  (ver Apéndice B), según la siguiente ecuación:

$$\{U\} = [F]\{U^{(e)}\} \quad (24)$$

Donde,

$$\{U^{(e)}\} = \{u_{xc1}, u_{yc1}, \theta_{z1}, u_{zc1}, \theta_{y1}, \phi_{x1}, \theta_{x1}, u_{xc2}, u_{yc2}, \theta_{z2}, u_{zc2}, \theta_{y2}, \phi_{x2}, \theta_{x2}\}^T \quad (25)$$

$$[F] = [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7]^T \quad (26)$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones (18) a (23) y aplicando los pasos convencionales del método de los elementos finitos, se llega a la siguiente ecuación general:

$$([K] + [K_G])\{W\} + [D]\{\dot{W}\} + [M]\{\ddot{W}\} = \{P\} \quad (27)$$

Donde  $[K]$ ,  $[K_G]$ ,  $[D]$  y  $[M]$  son la matriz de rigidez global, la matriz de rigidez geométrica global, la matriz de amortiguamiento global y la matriz de masa global, respectivamente. Mientras que,  $\{W\}$ ,  $\{\dot{W}\}$ ,  $\{\ddot{W}\}$  y  $\{P\}$  son el vector global de desplazamientos nodales, el vector global de velocidades nodales, el vector global de aceleraciones nodales y el vector global de cargas nodales.

De la ecuación general (27) deriva la siguiente expresión particular:

$$([K] + \lambda[K_G] - \Omega^2[M])\{W^*\} = \{0\} \quad (28)$$

Siendo  $\lambda$  es el parámetro de pandeo, el cual relaciona la tensión crítica de pandeo con la tensión de referencia inicial y  $\Omega$  la frecuencia circular del movimiento armónico, tal que  $\Omega = 2\pi f$ , donde  $f$  es la frecuencia medida en Hertz.

### 4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO

Con el fin de hallar un diseño óptimo en el análisis de vigas de paredes delgadas compuestas se plantea el problema de optimización como un problema multiobjetivo que minimiza una función normalizada mediante el método de funciones de peso (Rao, 1996). En términos generales, la función objetivo puede ser expresada de la siguiente manera:

$$F = \sum_{i=1}^k w_i f_i \quad (29)$$

Donde  $w_i$  es el factor de peso escalar asociado a cada función objetivo  $f_i$ . Aquí se propone optimizar la forma de la sección transversal y minimizar el peso propio de la estructura y su deformación empleando un bi-criterio de optimización. De esta manera, la función objetivo a

evaluar está dada por el máximo valor del desplazamiento absoluto en la viga y el área de la sección transversal, la cual representa en una forma simple e indirecta al peso de la viga (Karperska, 2007). Luego, la función objetivo normalizada se define de la siguiente manera:

$$F(x_i) = (1-W) \frac{A(x_i)}{A_0} + W \frac{\delta(x_i)}{\delta_0} \quad (30)$$

Donde  $A_0$  y  $\delta_0$  son el área y el desplazamiento de referencia, respectivamente, adoptados en forma arbitraria de acuerdo al problema con el fin de normalizar la función objetivo. El factor de peso  $W$  es definido por el diseñador, en forma específica de acuerdo a las necesidades y los requerimientos de la estructura. Al variar el factor  $W$  entre 0 y 1 se contemplan los diferentes diseños posibles. En particular, para  $W = 0$  el modelo considera el peso propio como función objetivo, mientras que para  $W = 1$  sólo contempla la minimización del desplazamiento máximo de la viga.

En el presente trabajo se adoptan como variables de diseño las dimensiones de la sección transversal de la viga y los ángulos de orientación de las fibras del laminado,  $\theta_i$ . Todas las variables pertenecen a dominios discretos limitados superior e inferiormente de acuerdo a cada problema en particular. Además, el conjunto de laminados factibles queda restringido a aquellos casos en que el laminado sea simétrico y balanceado.

Según la forma de la sección transversal que se analice, la expresión del área a minimizar variará en forma proporcional a las dimensiones de la sección. En particular, las expresiones (31) y (32) evalúan las áreas de los perfiles analizados en este trabajo.

$$A_i^I = A_i^U = (2b + h)e \quad (31)$$

$$A_i^R = (2b + 2h)e \quad (32)$$

$$\delta(x_i) = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2} \quad (33)$$

Donde  $h$ ,  $b$  y  $e$  son las dimensiones de la sección y  $(u_x, u_y, u_z)$  representan la suma de los desplazamientos lineales y no lineales en las direcciones  $(x, y, z)$  respectivamente, definidos de acuerdo al campo de desplazamientos descrito en la sección 2.3 (Ecs. (3) a (8)). Para su determinación se evalúan diferentes puntos dentro de distintas secciones a lo largo de la viga, adoptando el valor máximo resultante.

#### 4.1 Restricciones estructurales

Se supone que el estado límite de tensión a partir del cual el laminado sufre un daño puede definirse en forma aproximada a partir de la falla de la primera lámina. La carga para la cual esto ocurre puede predecirse a través de los criterios de falla de laminados simples (Barbero, 1998). En este caso, se utiliza el criterio de falla de Tsai-Wu, el cual establece que la lámina falla cuando se satisface la siguiente condición:

$$aR^2 + 2bR - 1 = 0 \quad (34)$$

Por lo tanto,

$$R = \frac{1}{a}(-b + \sqrt{b^2 + a}) \quad (35)$$

Donde,

$$a = f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + f_{66}\sigma_6^2 + f_{44}\sigma_4^2 + f_{55}\sigma_5^2 \quad (36)$$

$$b = \frac{1}{2}(f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2) \quad (37)$$

$$f_1 = \frac{1}{F_{1t}} - \frac{1}{F_{1c}} \quad (38)$$

$$f_2 = \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}} \quad (39)$$

$$f_{11} = \frac{1}{F_{1t}F_{1c}} \quad (40)$$

$$f_{22} = \frac{1}{F_{2t}F_{2c}} \quad (41)$$

$$f_4 = \frac{1}{(F_4)^2} \quad (42)$$

$$f_5 = \frac{1}{(F_5)^2} \quad (43)$$

$$f_6 = \frac{1}{(F_6)^2} \quad (44)$$

$$f_{12} \cong -\frac{1}{2\sqrt{F_{1t}F_{1c}F_{2t}F_{2c}}} \quad (45)$$

$R$  es el factor de seguridad del laminado en un determinado punto de la sección,  $\sigma_i$  son las tensiones en las direcciones principales del laminado ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ),  $F_{1t}$  es la resistencia a tracción longitudinal,  $F_{1c}$  es la resistencia a compresión longitudinal,  $F_{2t}$  es la resistencia a tracción transversal,  $F_{2c}$  es la resistencia a compresión transversal,  $F_4$  y  $F_5$  son las resistencias a corte interlaminares y  $F_6$  es la resistencia a corte membranal.

El factor de seguridad se evalúa en diferentes puntos de la sección transversal, en las zonas superior e inferior de cada capa del laminado y en distintos puntos sobre la longitud de la viga, tal como se muestra en la [Figura 2](#) para el caso de una sección tipo I. Luego, la condición de resistencia se verifica cuando el valor mínimo de  $R$  sea superior a 1.

Las cargas críticas de pandeo global de la estructura se obtienen resolviendo el problema de autovalores dado por la expresión (28) considerando  $\Omega = 0$ . De esta manera, la restricción de estabilidad global de la estructura se verifica si el mínimo valor de  $\lambda$  es mayor o igual a 1.

Las condiciones de estabilidad local se consideran en forma indirecta y aproximada adoptando un valor mínimo del espesor, suficientemente mayor al valor que produce la inestabilidad local de la sección. Para ello, se restringe el máximo valor de las relaciones

entre las dimensiones del ala y del alma de la sección transversal con respecto al espesor.

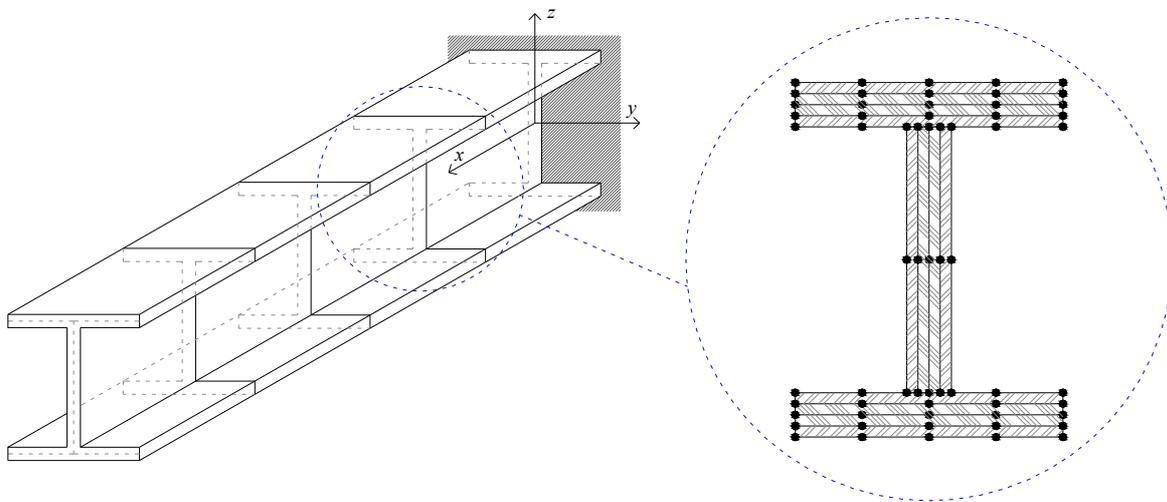


Figura 2: Esquema de las secciones evaluadas sobre la longitud. Detalle de los puntos considerados dentro de la sección transversal.

El desplazamiento máximo en la viga es acotado superiormente de acuerdo a los límites convencionales utilizados en este tipo de estructuras (Ec. (46)).

$$\delta \leq \delta_{m\acute{a}x} = \frac{L}{400} \quad (46)$$

#### 4.2 Restricciones geométricas

En principio se establece que las dimensiones de la sección transversal, propuestas como variables de diseño, sean positivas. Por otro lado, los ángulos de orientación de las fibras varían entre  $-90^\circ$  y  $+90^\circ$ , con un paso de  $15^\circ$ , de tal manera que el laminado resultante sea simétrico y balanceado, lo cual puede expresarse, de acuerdo a la nomenclatura utilizada, como  $[\pm\theta_i]_s$ . Cabe destacar que el laminado  $[0/90/90/0]$  es incluido dentro de las posibles soluciones del problema, aunque no cumpla estrictamente con la definición anterior. Este laminado es balanceado por ser un laminado *cross-ply* y es simétrico dada la orientación de las fibras respecto al plano medio del laminado.

La última restricción de carácter geométrico impuesta al problema restringe las dimensiones de la sección transversal de tal forma que la estructura se comporte como una viga de pared delgada, satisfaciendo las hipótesis propuestas en el modelo. Para ello, se establece un valor máximo del espesor en función de la base y de la altura de la viga.

$$h/e \geq 10 \quad \& \quad b/e \geq 10 \quad (47)$$

#### 4.3 Modelo matemático del problema

En definitiva, el modelo matemático del problema de optimización es formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\min \quad & F_{(x_i)} = (1-W) \frac{A_{(x_i)}}{A_0} + W \frac{\delta_{(x_i)}}{\delta_0} \\
\quad & x_i = (h, b, e, \theta_i) \\
\text{s.a. :} \quad & (h, b, e) > 0 \\
\quad & b \leq b_{\max}, \quad h \leq h_{\max} \\
\quad & -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ, \quad \Delta\theta_i = 15^\circ \quad \text{tq} \quad [\pm\theta_i]_s \\
\quad & R_{\min} \geq 1, \quad \lambda \geq 1, \quad \delta \leq \delta_{\max} \\
\quad & \max(b/e, h/e) \leq \kappa_1, \quad \min(b/e, h/e) \geq \kappa_2
\end{aligned} \tag{48}$$

Donde  $K_1$  y  $K_2$  son las constantes que contemplan las condiciones de estabilidad local y de pared delgada, y sus valores se fijan en 16 y 10, respectivamente.

## 5 ALGORITMO SIMULATED ANNEALING

El algoritmo *Simulated Annealing* (SA) es una técnica de optimización heurística combinatoria basada en la generación de soluciones factibles en forma aleatoria, cuya principal característica es evitar la convergencia local en problemas de gran escala, a diferencia de los métodos basados en gradientes y puede ser implementado en la resolución de problemas estructurales con variables discretas. Su nombre deriva de su analogía con el algoritmo diseñado en el campo de la termodinámica estadística para simular los cambios energéticos producidos en un sistema de partículas metálicas conforme disminuye la temperatura hasta su convergencia a un estado estable. Una de las desventajas de este método está relacionada con su eficiencia computacional, en especial cuando la evaluación de la función objetivo es muy costosa computacionalmente, dado que se requiere un gran número de evaluaciones de la función objetivo para alcanzar la solución óptima.

El algoritmo de optimización comienza definiendo un punto inicial aleatorio ( $x_0$ ) dentro de la región factible del problema, el cual es actualizado en base a un procedimiento iterativo hasta satisfacer un criterio de convergencia. En cada iteración, se genera un punto aleatorio en las proximidades de la configuración actual y se evalúa la función objetivo en ese punto, determinando su variación,  $\Delta C = \text{obj}(x_{i+1} - x_i)$ . Si el nuevo punto produce un valor menor de la función objetivo comparado con el mínimo actual ( $\Delta C < 0$ ), el punto es aceptado. Si, por el contrario, el nuevo valor de la función objetivo es mayor ( $\Delta C \geq 0$ ), la aceptabilidad del punto se define de acuerdo al siguiente criterio de probabilidad:

$$P = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta C < 0 \\ e^{-\frac{\Delta C}{k.T}} & \text{si } \Delta C \geq 0 \end{cases} \tag{49}$$

Donde  $k$  es un factor de escala conocido como la constante de Boltzmann y  $T$  es el parámetro de control denominado temperatura.

La temperatura permanece constante para un cierto número de iteraciones y va disminuyendo a medida que el algoritmo avanza, de manera tal que disminuya la probabilidad de aceptar soluciones factibles que no produzcan una mejora en la función objetivo.

Para implementar este algoritmo exitosamente es preciso tomar una serie de decisiones en lo que se refiere al control de la temperatura. En principio, para que la solución final sea independiente de la solución inicial, la temperatura inicial deberá ser independiente de la

solución inicial y lo suficientemente alta como para aceptar libremente las soluciones factibles de su entorno. Por otro lado, la función que determina y controla el descenso de la temperatura tiene un papel fundamental en la eficiencia del método, puesto que define el criterio de convergencia del algoritmo. Uno de los primeros programas de enfriamiento utilizados establece una velocidad de enfriamiento de tipo geométrico, en el cual la temperatura desciende linealmente. Sin embargo, aún obteniendo buenas soluciones, el principal inconveniente que presenta este esquema es su alto tiempo de ejecución.

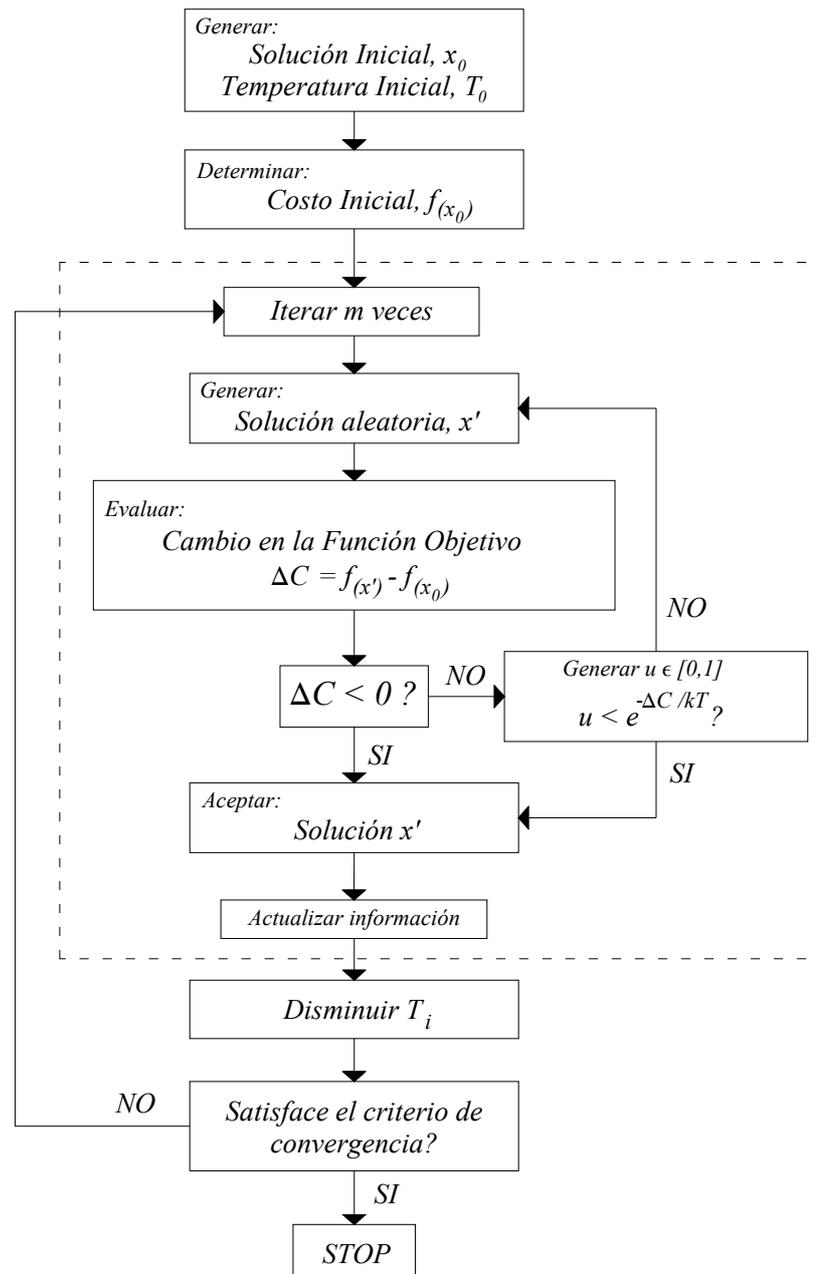


Figura 3: Esquema del algoritmo.

En este trabajo se aplica el esquema de enfriamiento desarrollado por Vidal (2003). Su principal objetivo es establecer parámetros que permitan obtener un equilibrio entre el tiempo final de ejecución del algoritmo y el número de búsquedas que realice el mismo. De esta

manera, se plantea disminuir la temperatura según el siguiente criterio:

$$T_{i+1} = \frac{T_i}{1 + T_i^2} \quad (50)$$

Este esquema logra disminuir la temperatura más rápidamente al inicio del algoritmo, evitando la aceptación de una gran cantidad de soluciones factibles en el comienzo del mismo, reduciendo en gran medida el tiempo inicial. La implementación de esta estrategia muestra una buena efectividad del algoritmo, la cual se ve reflejada tanto en la calidad de las soluciones obtenidas como en la disminución substancial del tiempo de ejecución del algoritmo.

## 6 RESULTADOS

Como aplicación de la propuesta de diseño desarrollada anteriormente, a continuación se analiza una viga de pared delgada compuesta, de 3 m de longitud, empotrada en sus dos extremos y sometida a distintos estados de carga. Para este caso particular, se plantea el problema de optimización (48) y se resuelve mediante la aplicación del método heurístico *Simulated Annealing*, para diferentes propuestas de diseño.

| Propiedad   | Kevlar49/Epoxi |
|---|----------------|
| Densidad, $\rho$ [ $\text{Kg/m}^3$ ]                  | 1380           |
| Módulo de Elasticidad Longitudinal, $E_1$ [GPa]       | 75,80          |
| Módulo de Elasticidad Transversal, $E_2$ [GPa]        | 5,50           |
| Módulo de Corte membranar, $G_{12}$ [GPa]             | 2,07           |
| Coefficiente de Poisson, $\nu_{12}$                   | 0,34           |
| Resistencia a tracción longitudinal, $F_{1t}$ [MPa]   | 1380           |
| Resistencia a tracción transversal, $F_{2t}$ [MPa]    | 34,50          |
| Resistencia a corte en la membrana, $F_6$ [MPa]       | 44,10          |
| Resistencia a compresión longitudinal, $F_{1c}$ [Mpa] | 576,00         |
| Resistencia a compresión transversal, $F_{2c}$ [MPa]  | 138,00         |
| Resistencia a corte interlaminar, $F_4, F_5$ [MPa]    | 48,69          |

Tabla 1: Propiedades de Kevlar49/Epoxi.

Los laminados evaluados son simétricos y balanceados, constituidos por cuatro capas de material Kevlar49/Epoxi, cuyas propiedades se muestran en la [Tabla 1](#). Las diferentes formas de la sección transversal consideradas se muestran en la [Figura 4](#). Los rangos de variación de las dimensiones de la sección se definen de acuerdo a cada problema en particular, con precisiones de 1 mm en la determinación del espesor y de 5 mm en el cálculo de la base y de la altura.

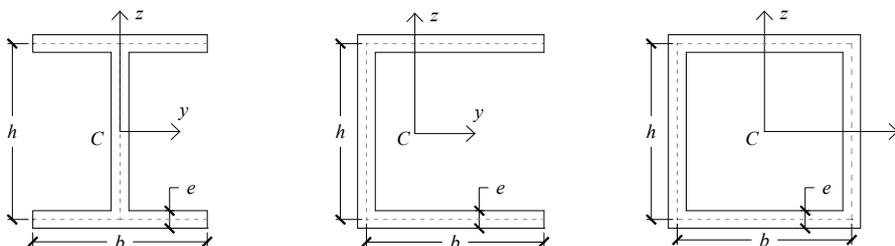


Figura 4: Secciones transversales evaluadas.

Las combinaciones de cargas consideradas (Tabla 2) representan distintos escenarios posibles que pueden presentarse durante la vida útil de una estructura y permiten evaluar la validez del diseño adoptado y la eficiencia del algoritmo utilizado para su resolución. Cabe destacar que la carga  $q_z$  es una carga vertical distribuida sobre el centroide de la sección y los momentos ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) se encuentran aplicados sobre el centroide en el mitad de la longitud de la viga.

| Caso N° | Magnitud de las cargas |            |            |            |
|---------|------------------------|------------|------------|------------|
|         | $q_z$ (N/m)            | $M_x$ (Nm) | $M_y$ (Nm) | $M_z$ (Nm) |
| 1       | -1000                  | 0          | 0          | 0          |
| 2       | 0                      | 1000       | 0          | 0          |
| 3       | 0                      | 0          | 1000       | 0          |
| 4       | 0                      | 0          | 0          | 1000       |
| 5       | 0                      | 1000       | 500        | 500        |
| 6       | 0                      | 500        | 1000       | 500        |
| 7       | 0                      | 500        | 500        | 1000       |

Tabla 2: Estados de carga.

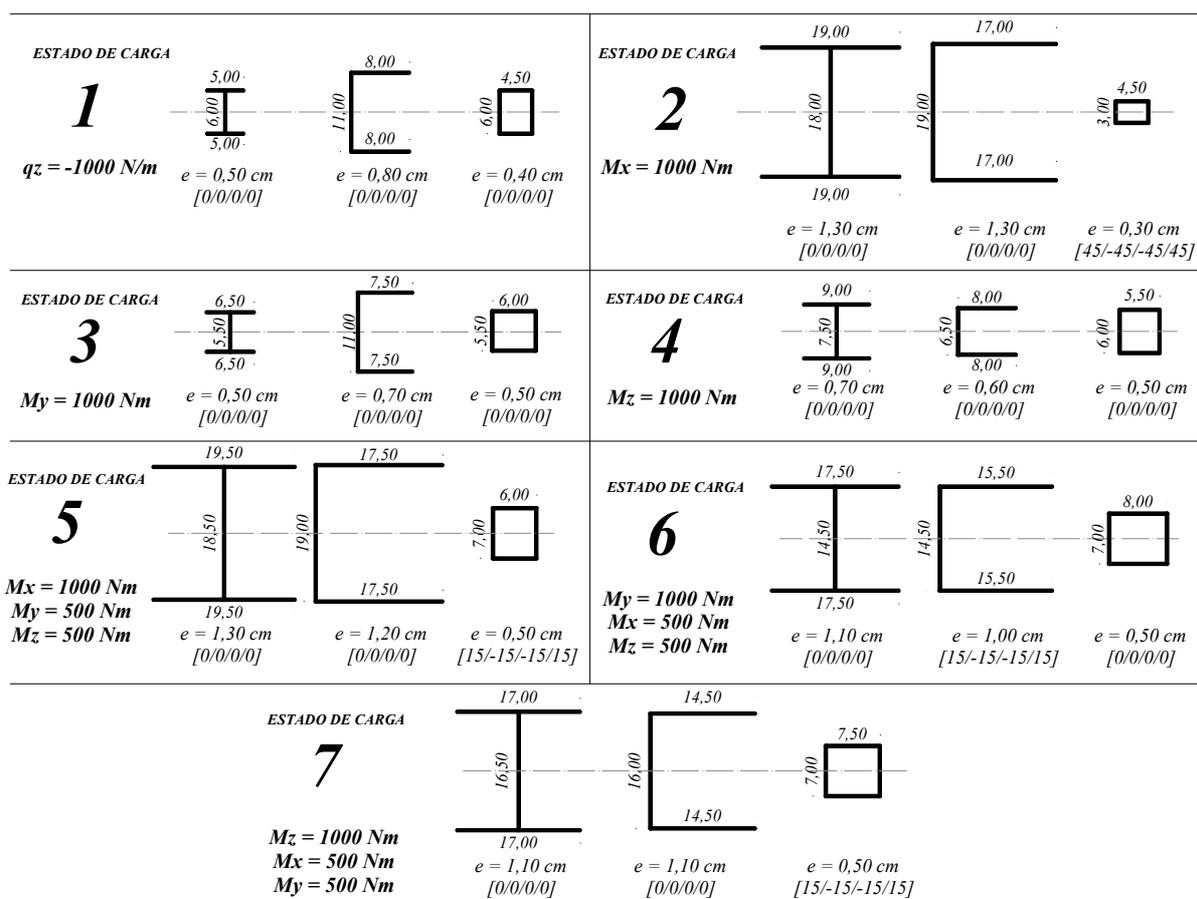


Figura 5: Secciones y laminaciones óptimas para los distintos estados de carga evaluados ( $W = 0$ ).

| Estado de Carga | Tipo de Perfil     | $h$<br>[cm] | $b$<br>[cm] | $e$<br>[cm] | Laminado      | Área<br>[cm <sup>2</sup> ] | Desplazamiento<br>[cm] |
|-----------------|--------------------|-------------|-------------|-------------|---------------|----------------------------|------------------------|
| <b>1</b>        | Perfil I           | 6,00        | 5,00        | 0,50        | 0/0/0/0       | <b>8,000</b>               | 0,700                  |
|                 | Perfil U           | 11,00       | 8,00        | 0,80        | 0/0/0/0       | 21,600                     | 0,690                  |
|                 | Perfil Rectangular | 6,00        | 4,50        | 0,40        | 0/0/0/0       | 8,400                      | 0,710                  |
| <b>2</b>        | Perfil I           | 18,00       | 19,00       | 1,30        | 0/0/0/0       | 72,800                     | 0,310                  |
|                 | Perfil U           | 19,00       | 17,00       | 1,30        | 0/0/0/0       | 68,900                     | 0,500                  |
|                 | Perfil Rectangular | 3,00        | 4,50        | 0,30        | 45/-45/-45/45 | <b>4,500</b>               | 0,700                  |
| <b>3</b>        | Perfil I           | 5,50        | 6,50        | 0,50        | 0/0/0/0       | <b>9,250</b>               | 0,120                  |
|                 | Perfil U           | 11,00       | 7,50        | 0,70        | 0/0/0/0       | 18,200                     | 0,150                  |
|                 | Perfil Rectangular | 5,50        | 6,00        | 0,50        | 0/0/0/0       | 11,500                     | 0,100                  |
| <b>4</b>        | Perfil I           | 7,50        | 9,00        | 0,70        | 0/0/0/0       | 17,850                     | 0,070                  |
|                 | Perfil U           | 6,50        | 8,00        | 0,60        | 0/0/0/0       | 13,500                     | 0,060                  |
|                 | Perfil Rectangular | 6,00        | 5,50        | 0,50        | 0/0/0/0       | <b>11,500</b>              | 0,100                  |
| <b>5</b>        | Perfil I           | 18,50       | 19,50       | 1,30        | 0/0/0/0       | 74,750                     | 0,290                  |
|                 | Perfil U           | 19,00       | 17,50       | 1,20        | 0/0/0/0       | 64,800                     | 0,530                  |
|                 | Perfil Rectangular | 7,00        | 6,00        | 0,50        | 15/-15/-15/15 | <b>13,000</b>              | 0,390                  |
| <b>6</b>        | Perfil I           | 14,50       | 17,50       | 1,10        | 0/0/0/0       | 54,450                     | 0,300                  |
|                 | Perfil U           | 14,50       | 15,50       | 1,00        | 15/-15/-15/15 | 45,500                     | 0,600                  |
|                 | Perfil Rectangular | 7,00        | 8,00        | 0,50        | 0/0/0/0       | <b>15,000</b>              | 0,460                  |
| <b>7</b>        | Perfil I           | 16,50       | 17,00       | 1,10        | 0/0/0/0       | 55,550                     | 0,310                  |
|                 | Perfil U           | 16,00       | 14,50       | 1,10        | 0/0/0/0       | 49,500                     | 0,520                  |
|                 | Perfil Rectangular | 7,00        | 7,50        | 0,50        | 15/-15/-15/15 | <b>14,500</b>              | 0,360                  |

Tabla 3: Soluciones óptimas para  $W = 0$ .

| Estado de Carga | Tipo de Perfil     | Área<br>[cm <sup>2</sup> ] | Restricciones activas |                       |                      |                |                  |
|-----------------|--------------------|----------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------|------------------|
|                 |                    |                            | Resistencia           | Estabilidad<br>Global | Estabilidad<br>Local | Desplazamiento | Pared<br>Delgada |
| <b>1</b>        | Perfil I           | <b>8,000</b>               | -                     | -                     | -                    | -              | X                |
|                 | Perfil U           | 21,600                     | -                     | -                     | -                    | -              | X                |
|                 | Perfil Rectangular | 8,400                      | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
| <b>2</b>        | Perfil I           | 72,800                     | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
|                 | Perfil U           | 68,900                     | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
|                 | Perfil Rectangular | <b>4,500</b>               | -                     | -                     | -                    | -              | X                |
| <b>3</b>        | Perfil I           | <b>9,250</b>               | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
|                 | Perfil U           | 18,200                     | -                     | -                     | X                    | -              | -                |
|                 | Perfil Rectangular | 11,500                     | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
| <b>4</b>        | Perfil I           | 17,850                     | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
|                 | Perfil U           | 13,500                     | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
|                 | Perfil Rectangular | <b>11,500</b>              | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
| <b>5</b>        | Perfil I           | 74,750                     | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
|                 | Perfil U           | 64,800                     | -                     | -                     | X                    | -              | -                |
|                 | Perfil Rectangular | <b>13,000</b>              | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
| <b>6</b>        | Perfil I           | 54,450                     | X                     | -                     | X                    | -              | -                |
|                 | Perfil U           | 45,500                     | X                     | -                     | X                    | -              | -                |
|                 | Perfil Rectangular | <b>15,000</b>              | -                     | -                     | X                    | -              | -                |
| <b>7</b>        | Perfil I           | 55,550                     | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
|                 | Perfil U           | 49,500                     | X                     | -                     | -                    | -              | -                |
|                 | Perfil Rectangular | <b>15,000</b>              | X                     | -                     | -                    | -              | -                |

Tabla 4: Restricciones activas en el problema de diseño ( $W = 0$ ).

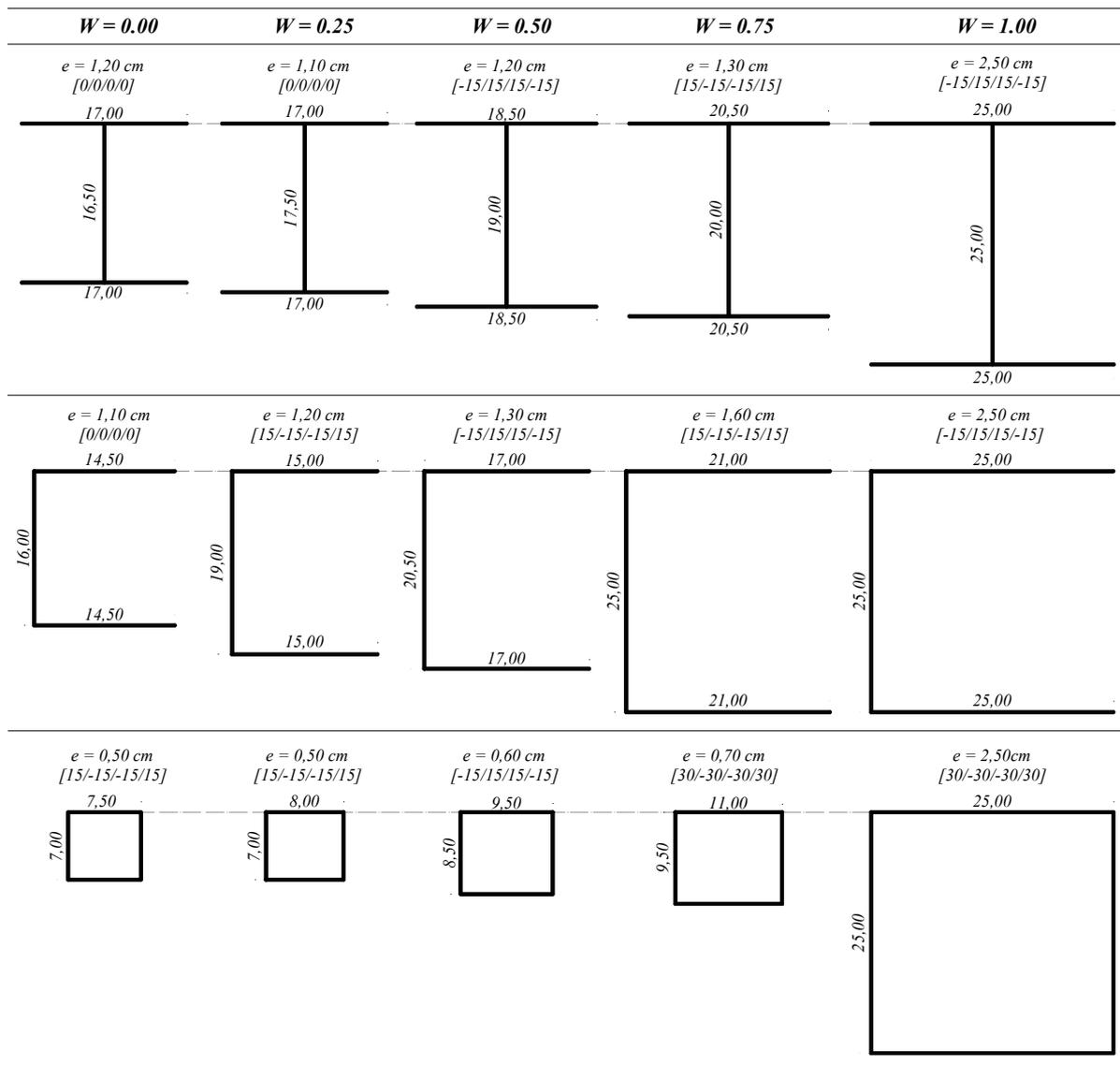


Figura 7: Soluciones óptimas correspondientes a diferentes valores de W.

En los distintos problemas de diseño analizados, el coeficiente de peso  $W$  adopta valores entre 0 y 1. Los resultados obtenidos al considerar el caso en que  $W$  es igual a cero se muestran en la Figura 5 y en la Tabla 3, donde la estructura se somete a todos los estados de carga propuestos en la Tabla 2. En la Tabla 4 se detallan las restricciones activas en cada uno de los problemas mencionados, en los cuales los tiempos de cálculo variaron entre 25 y 30 minutos, realizando entre 200 y 300 iteraciones en cada ejemplo. Cabe aclarar que en todos los casos se utilizó un procesador DualCore Intel Wolfdale de 2533 MHz, con 2044 MB de memoria RAM.

En los casos en que  $W$  es igual a 1 se predeterminan los valores de  $b$  y de  $h$ , mientras que el valor del espesor se condiciona a partir de las restricciones de pared delgada y de estabilidad local. De esta manera, para un valor del área establecido, se optimiza la forma de la sección transversal y la laminación, de tal manera que se origine el mínimo desplazamiento posible en una estructura bajo un determinado estado de carga. En consecuencia, el costo computacional para este caso particular disminuye considerablemente, variando entre 10 y 15 minutos en un total de aproximadamente 200 iteraciones, debido a la disminución de

variables del problema.

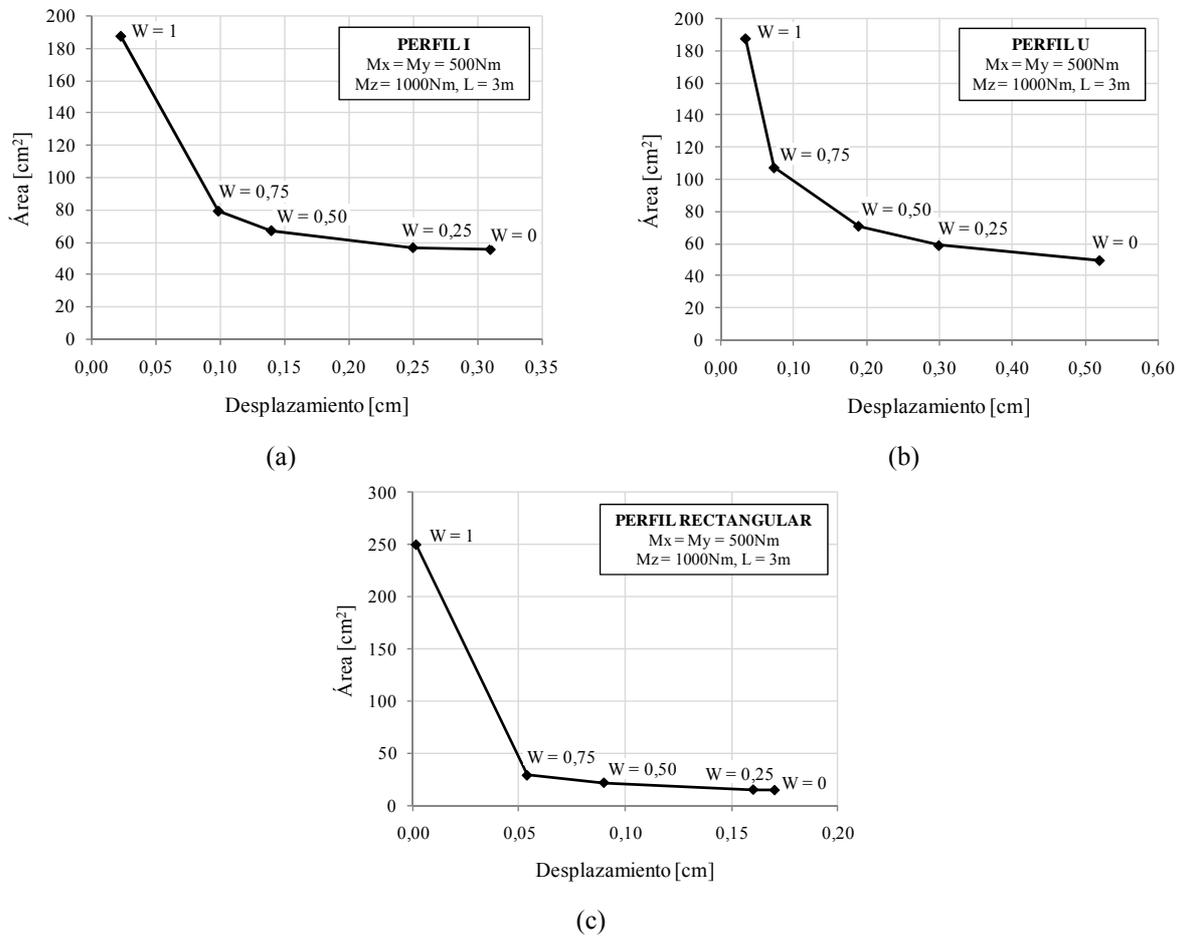


Figura 8: Comparación de resultados para distintos valores de W, correspondientes a un perfil I (a), un perfil U (b) y un perfil rectangular (c) bajo la condición de carga número 7.

| Estado de Carga | Coeficiente W      | Tipo de Perfil     | h [cm] | b [cm] | e [cm]        | Laminado      | Función Objetivo | Área [cm <sup>2</sup> ] | Desplazamiento [cm] |
|-----------------|--------------------|--------------------|--------|--------|---------------|---------------|------------------|-------------------------|---------------------|
| 7               | 0,00               | Perfil I           | 16,50  | 17,00  | 1,10          | 0/0/0/0       | 1,8517           | 55,550                  | 0,310               |
|                 |                    | Perfil U           | 16,00  | 14,50  | 1,10          | 0/0/0/0       | 1,6500           | 49,500                  | 0,520               |
|                 |                    | Perfil Rectangular | 7,00   | 7,50   | 0,50          | 15/-15/-15/15 | <b>0,4833</b>    | 14,500                  | 0,170               |
|                 | 0,25               | Perfil I           | 17,50  | 17,00  | 1,10          | 0/0/0/0       | 1,7288           | 56,650                  | 0,250               |
|                 |                    | Perfil U           | 19,00  | 15,00  | 1,20          | 15/-15/-15/15 | 1,8450           | 58,800                  | 0,300               |
|                 |                    | Perfil Rectangular | 7,00   | 8,00   | 0,50          | 15/-15/-15/15 | <b>0,5750</b>    | 15,000                  | 0,160               |
|                 | 0,50               | Perfil I           | 19,00  | 18,50  | 1,20          | -15/15/15/-15 | 1,4700           | 67,200                  | 0,140               |
|                 |                    | Perfil U           | 20,50  | 17,00  | 1,30          | -15/15/15/-15 | 1,6558           | 70,850                  | 0,190               |
|                 |                    | Perfil Rectangular | 8,50   | 9,50   | 0,60          | -15/15/15/-15 | <b>0,5845</b>    | 21,600                  | 0,090               |
| 0,75            | Perfil I           | 20,00              | 20,50  | 1,30   | 15/-15/-15/15 | 1,0317        | 79,300           | 0,099                   |                     |
|                 | Perfil U           | 25,00              | 21,00  | 1,60   | 15/-15/-15/15 | 1,1720        | 107,200          | 0,074                   |                     |
|                 | Perfil Rectangular | 9,50               | 11,00  | 0,70   | 30/-30/-30/30 | <b>0,4405</b> | 28,700           | 0,054                   |                     |
| 1,00            | Perfil I           | 25,00              | 25,00  | 2,50   | -15/15/15/-15 | 0,1160        | 187,500          | 0,010                   |                     |
|                 | Perfil U           | 25,00              | 25,00  | 2,50   | -15/15/15/-15 | 0,1760        | 187,500          | 0,016                   |                     |
|                 | Perfil Rectangular | 25,00              | 25,00  | 2,50   | 30/-30/-30/30 | <b>0,0078</b> | 250,000          | 0,001                   |                     |

Tabla 5: Soluciones óptimas para valores de W = [0:0.25:1].

En la [Tabla 5](#) y en la [Figura 7](#) se muestran los resultados obtenidos al considerar valores de  $W$  entre 0 y 1, con un paso de 0,25, para los diferentes tipos de perfiles analizados bajo el estado de carga número 7. La [Figura 8](#) muestra gráficamente la relación entre las dos funciones objetivo propuestas para los distintos valores del parámetro  $W$  analizados.

Por otro lado, con el fin de exponer el comportamiento de la técnica de optimización utilizada, la [Figura 9](#) muestra en términos generales la variación de la función objetivo a medida que el algoritmo avanza.

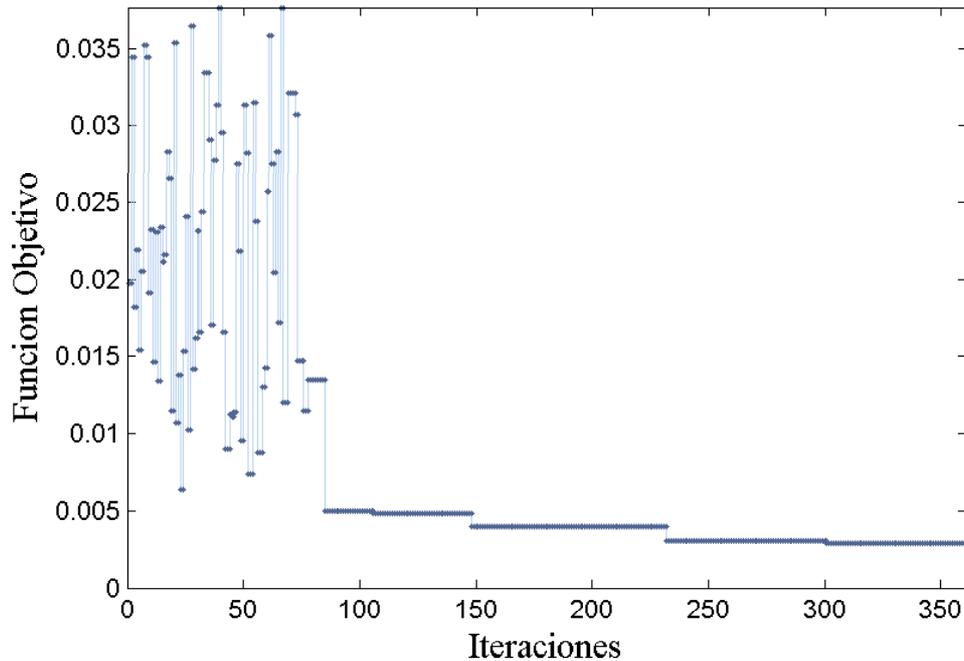


Figura 9: Comportamiento general del algoritmo en el problema de diseño analizado.

## 7 CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó un problema de diseño óptimo de vigas compuestas de pared delgada a partir de un modelo estructural, que contempla efectos no convencionales, implementado mediante el método de elementos finitos. El diseño propuesto fue resuelto satisfactoriamente a través de la aplicación de la técnica de optimización *Simulated Annealing*, determinando las dimensiones de la sección transversal de la viga y la disposición de las fibras del material óptimas que producen el peso mínimo y/o la deformación mínima de la estructura, ambos valores normalizados mediante un método de funciones de peso de acuerdo a las necesidades del proyecto.

Los resultados obtenidos responden adecuadamente a los objetivos esperados, en cuanto al comportamiento del algoritmo utilizado y en cuanto a las soluciones en sí mismas. Se advierte la adopción de diferentes laminaciones de acuerdo a los valores que adopta el parámetro  $W$  y en función del estado de carga aplicado en la estructura. Se observa que a medida que aumenta el valor de  $W$  se incrementa la importancia de las restricciones geométricas que afectan a las dimensiones de la sección.

## 8 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaria de Ciencia y Tecnología de la

Universidad Tecnológica Nacional, por el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur y por el CONICET.

## APÉNDICE A

Una vez definida una hipótesis constitutiva, las resultantes de tensión en el espesor quedan representadas en términos de las deformaciones generalizadas de acuerdo a:

$$\{N_P\} = [M_C] [D_P] \{\Delta\} \quad (51)$$

Donde,

$$\{N_P\} = \{N_{xx}, N_{xs}, N_{xn}, M_{xx}, M_{xs}\}^T \quad (52)$$

$$[M_C] = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{16} & 0 & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{16} \\ \bar{A}_{16} & \bar{A}_{66} & 0 & \bar{B}_{16} & \bar{B}_{66} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{16} & 0 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{16} \\ \bar{B}_{16} & \bar{B}_{66} & 0 & \bar{D}_{16} & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$[D_P] = \begin{bmatrix} 1 & Z(s) & Y(s) & \omega_P(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dY}{ds} & \frac{dZ}{ds} & r(s) - \psi(s) & \psi(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dZ}{ds} & \frac{dY}{ds} & l(s) & 0 \\ 0 & \frac{dY}{ds} & -\frac{dZ}{ds} & l(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\{\Delta\} = \{\varepsilon_{D1}, -\varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, -\varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T \quad (55)$$

Donde,

$$\varepsilon_{D1} = \frac{\partial u_{xc}}{\partial x} \quad (56)$$

$$\varepsilon_{D2} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (57)$$

$$\varepsilon_{D3} = \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad (58)$$

$$\varepsilon_{D4} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (59)$$

$$\varepsilon_{D5} = \left( \frac{\partial u_{yc}}{\partial x} - \theta_z \right) \quad (60)$$

$$\varepsilon_{D6} = \left( \frac{\partial u_{zc}}{\partial x} - \theta_y \right) \tag{61}$$

$$\varepsilon_{D7} = \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x \right) \tag{62}$$

$$\varepsilon_{D8} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \tag{63}$$

Las expresiones (56) a (63) se pueden interpretar como deformaciones generalizadas para las vigas curvas y corresponden a la deformación normal axial ( $\varepsilon_{D1}$ ), deformaciones normales flexionales ( $\varepsilon_{D2}$  y  $\varepsilon_{D3}$ ), deformación normal por alabeo ( $\varepsilon_{D4}$ ), deformación transversal por corte flexional ( $\varepsilon_{D5}$  y  $\varepsilon_{D6}$ ), deformación transversal por corte debida al alabeo ( $\varepsilon_{D7}$ ), y deformación transversal por torsión pura o de Saint Venant ( $\varepsilon_{D8}$ ).

Por otro lado, las relaciones constitutivas de los esfuerzos generalizados en términos de las deformaciones generalizadas están dadas por:

$$\{Q^E\} = [J_E] \{\Delta\} \tag{64}$$

Donde  $\{Q^E\}$  es el vector de esfuerzos generalizados de viga,  $\{\Delta\}$  es el vector de deformaciones generalizadas y  $[J_E]$  es la matriz constitutiva de los esfuerzos, como se describen a continuación para el caso particular de laminados simétricos y balanceados:

$$\{Q^E\} = \{Q_x, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}^T \tag{65}$$

$$[J_E] = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & J_{12}^{11} & J_{13}^{11} & J_{14}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{12}^{11} & J_{22}^{11} & J_{23}^{11} & J_{24}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{13}^{11} & J_{23}^{11} & J_{33}^{11} & J_{34}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{14}^{11} & J_{24}^{11} & J_{34}^{11} & J_{44}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{55}^{66} & J_{56}^{66} & J_{57}^{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{56}^{66} & J_{66}^{66} & J_{67}^{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{57}^{66} & J_{67}^{66} & J_{77}^{66} & J_{78}^{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{78}^{66} & J_{88}^{66} \end{bmatrix} \tag{66}$$

Los elementos de la matriz constitutiva de los esfuerzos se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$J_{ij}^{kh} = \int_S \bar{A}_{kh} (\bar{g}_i^{(b)} \bar{g}_j^{(b)}) ds + \int_S \bar{B}_{kh} (\bar{g}_i^{(b)} \bar{g}_j^{(d)} + \bar{g}_i^{(d)} \bar{g}_j^{(b)}) ds + \int_S \bar{A}_{55}^{(H)} (\bar{g}_i^{(c)} \bar{g}_j^{(c)}) ds + \int_S \bar{D}_{kh} (\bar{g}_i^{(d)} \bar{g}_j^{(d)}) ds \tag{67}$$

Donde  $\{i, j\} = 1, \dots, 8$ ,  $\{h, k\} = 1, 6$ .

$$\bar{g}^{(b)} = \left\{ 1, Z(s), Y(s), \omega_P(s), \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}, r(s) - \psi(s), \psi(s) \right\} \tag{68}$$

$$\bar{g}^{(c)} = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{dZ}{ds}, -\frac{dY}{ds}, -l(s), 0 \right\} \quad (69)$$

$$\bar{g}^{(d)} = \left\{ 0, \frac{dY}{ds}, -\frac{dZ}{ds}, l(s), 0, 0, 1, -2 \right\} \quad (70)$$

## APÉNDICE B

La matriz de las funciones de forma,  $[F]$ , se define de la siguiente manera:

$$[F_1] = [f_{11}(\bar{x}), 0, 0, 0, 0, 0, 0, f_{12}(\bar{x}), 0, 0, 0, 0, 0, 0] \quad (71)$$

$$[F_2] = [0, f_{21}(\bar{x}, \beta_1), f_{22}(\bar{x}, \beta_1), 0, 0, 0, 0, 0, f_{23}(\bar{x}, \beta_1), f_{24}(\bar{x}, \beta_1), 0, 0, 0, 0] \quad (72)$$

$$[F_3] = [0, f_{31}(\bar{x}, \beta_1), f_{32}(\bar{x}, \beta_1), 0, 0, 0, 0, 0, f_{33}(\bar{x}, \beta_1), f_{34}(\bar{x}, \beta_1), 0, 0, 0, 0] \quad (73)$$

$$[F_4] = [0, 0, 0, f_{21}(\bar{x}, \beta_2), f_{22}(\bar{x}, \beta_2), 0, 0, 0, 0, 0, f_{23}(\bar{x}, \beta_2), f_{24}(\bar{x}, \beta_2), 0, 0] \quad (74)$$

$$[F_5] = [0, 0, 0, f_{31}(\bar{x}, \beta_2), f_{32}(\bar{x}, \beta_2), 0, 0, 0, 0, 0, f_{33}(\bar{x}, \beta_2), f_{34}(\bar{x}, \beta_2), 0, 0] \quad (75)$$

$$[F_6] = [0, 0, 0, 0, 0, f_{21}(\bar{x}, \beta_3), f_{22}(\bar{x}, \beta_3), 0, 0, 0, 0, 0, f_{23}(\bar{x}, \beta_3), f_{24}(\bar{x}, \beta_3)] \quad (76)$$

$$[F_7] = [0, 0, 0, 0, 0, f_{31}(\bar{x}, \beta_3), f_{32}(\bar{x}, \beta_3), 0, 0, 0, 0, 0, f_{33}(\bar{x}, \beta_3), f_{34}(\bar{x}, \beta_3)] \quad (77)$$

La transformación de coordenadas al sistema intrínseco del elemento puede expresarse como  $\bar{x} = x/L_e$ , con  $\bar{x} \in [0, 1]$ .

Las funciones de forma  $f_{ij}$  se expresan de la siguiente manera:

$$f_{11}(\bar{x}) = 1 - \bar{x} \quad (78)$$

$$f_{12}(\bar{x}) = \bar{x} \quad (79)$$

$$f_{21}(\bar{x}) = \frac{1 + \beta_i(1 - \bar{x}) - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3}{(1 + \beta_i)} \quad (80)$$

$$f_{22}(\bar{x}) = \frac{[2 + \beta_i - (4 + \beta_i)\bar{x} - 2\bar{x}^2] \bar{x} L_e}{2(1 + \beta_i)} \quad (81)$$

$$f_{23}(\bar{x}) = \frac{(\beta_i + 3\bar{x} - 2\bar{x}^2) \bar{x}}{(1 + \beta_i)} \quad (82)$$

$$f_{24}(\bar{x}) = \frac{[-\beta_i - (2 - \beta_i)\bar{x} + 2\bar{x}^2]\bar{x}L_e}{2(1 + \beta_i)} \quad (83)$$

$$f_{31}(\bar{x}) = \frac{6(\bar{x} - 1)\bar{x}}{(1 + \beta_i)L_e} \quad (84)$$

$$f_{32}(\bar{x}) = \frac{1 + \beta_i - (4 + \beta_i)\bar{x} + 3\bar{x}^2}{(1 + \beta_i)} \quad (85)$$

$$f_{33}(\bar{x}) = \frac{6(1 - \bar{x})\bar{x}}{(1 + \beta_i)L_e} \quad (86)$$

$$f_{34}(\bar{x}) = \frac{[\beta_i - 2 + 3\bar{x}]\bar{x}}{(1 + \beta_i)} \quad (87)$$

Donde,

$$\beta_1 = \frac{12J_{33}^{11}}{J_{55}^{66}L_e^2} \quad (88)$$

$$\beta_2 = \frac{12J_{22}^{11}}{J_{66}^{66}L_e^2} \quad (89)$$

$$\beta_3 = \frac{12J_{44}^{11}}{J_{77}^{66}L_e^2} \quad (90)$$

## REFERENCIAS

- Barbero, E. J., *Introduction to Composite Materials Design*, Taylor and Francis Inc., 1998.
- Cortínez, V. H., Piovan, M. T., Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4):701-723, 2002.
- Cortínez, V. H., Piovan, M. T., Stability of composite thin-walled beams with shear deformability. *Computers and Structures*, 84:978-990, 2006.
- Karperska, R., Magnucki, K. y Ostwald, M. Bicriteria optimization of cold-formed thin-walled beams with monosymmetrical open cross sections under pure bending. *Thin-Walled Structures*, 45:563-572, 2007.
- Piovan, M. T., Cortínez, V. H. Mechanics of shear deformable thin-walled beams made of composite materials. *Thin-Walled Structures*, 45:37-62, 2007.
- Piovan, M. T. *Estudio teórico y computacional sobre la mecánica de vigas curvas de materiales compuestos, con sección de paredes delgadas, considerando efectos no convencionales*. Tesis Dr. en Ingeniería. Universidad Nacional del Sur, 2002.
- Rao, S., *Engineering Optimization – Theory and Practice*, John Wiley & Sons Inc., 1996.
- Reguera, F., Vidal, M. C., Cortínez, V. H., Diseño óptimo de vigas de pared delgada construidas con material compuesto. *Modelización Aplicada a la Ingeniería, Vol. II, Legnani, Jacovkis, Armentano Editores, SeCyT UTN-FRBA*, ISBN: 978-950-42-0082-6

(en Prensa).

Vidal, M.C., *Un procedimiento heurístico para un problema de asignación cuadrática*. Tesis Mg. Matemática. Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur, 2003.