

MECÁNICA DE VIGAS CON PROPIEDADES GRADATIVAS: COMPARACIÓN DE DIVERSAS FORMULACIONES UNIDIMENSIONALES, FORMULACIONES BASADAS EN DESPLAZAMIENTOS Y DE ÓRDENES SUPERIORES

José M. Ramírez^a and Marcelo T. Piovan^{a,b}

^a *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina,
{ramirezjose,mpiovan}@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

^b *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, Argentina*

Palabras Claves: Materiales funcionales, modelos de viga, dinámica y estática.

Resumen. En este artículo se efectúa una comparación de un grupo de formulaciones existentes para analizar la mecánica de vigas rectas y curvas construidas con materiales funcionales. La mayoría de los trabajos presentes en la literatura abierta internacional, referidos a los tópicos en cuestión, resuelve los problemas de estática y dinámica a partir de formulaciones de la elasticidad bidimensional enfocando solo problemas de flexión simples para vigas rectas o flexión en el plano de curvatura para vigas curvas y con gradación de las propiedades materiales variando en la dirección del radio. Por otro lado, existen varios modelos para calcular estados de tensiones y vibraciones libres en vigas rectas de materiales funcionales. Algunos están vinculados a formulaciones de desplazamientos que pueden tener distintos órdenes de complejidad, desde lineales hasta de orden cúbico o con funciones trigonométricas y sigmoidales. Otros en cambio están basados en formulaciones variacionales más complejas y consistentes, como por ejemplo los modelos desarrollados según el principio de Hellinger-Reissner. Ahora bien, en el caso de vigas curvas son pocos los modelos realmente desarrollados desde una óptica unidimensional, pues la mayoría de los estudios disponibles en la literatura internacional son de formulaciones bidimensionales en el plano con configuración geométrica curvada.

Así pues se pretende establecer el rango paramétrico de utilidad de varios modelos y enfoques para analizar la mecánica lineal de estructuras esbeltas de materiales funcionales. Para ello se emplea una plataforma de cálculo de elementos finitos donde pueden programarse los diversos modelos (1D a 3D) con propiedades elásticas e inerciales gradadas. Se ofrecen varias comparaciones en cuanto a problemas dinámicos y estáticos. Por otro lado se efectúa un análisis de sensibilidad ante la variación de la gradación de las propiedades elásticas y másicas.

1 INTRODUCCION

Las industrias de alta tecnología como por ejemplo las industrias aeroespacial y bélica, entre otras, están en constante avance y para ello requieren la más alta tecnología para sus propósitos. Los materiales son parte fundamental en el diseño, los cuales necesitan soportar las altas exigencias del medio al que son sometidos. Un ejemplo claro son los materiales de gradación funcional (del inglés functionally graded material: FGM). La idea de materiales de gradación funcional se originó en Japón a mediados de los años ochenta (Koizumi, 1993), sin embargo se han convertido en una realidad comercial en los últimos años. Un material de gradación funcional consiste en una mezcla de materiales cerámicos y metálicos entre otros que brinda de manera unificada las mejores propiedades de los materiales que lo componen. Así pues del cerámico, adquiere la resistencia a altas temperaturas y la baja densidad, entre otras, mientras que adquiere la gran rigidez, la buena conductividad eléctrica, la alta maquinabilidad de los materiales metálicos. Las leyes que definen la variación de estos materiales pueden ser del tipo potencial o exponencial, entre otras. Su aplicación es cada vez mas intensa en diferentes aspectos estructurales de la industria automotriz, aeroespacial y bélica entre otras. En consecuencia estudios tendientes a caracterizar la mecánica de estructuras construidas con tales materiales es de vital importancia para el desarrollo de bienes tecnológicos de calidad y competitividad.

Los estudios sobre el comportamiento mecánico de estructuras de materiales funcionales se enmarcan dentro de diferentes contextos que van desde enfoques de elasticidad tridimensional a la reducción unidimensional. Muchos componentes estructurales suelen ser esbeltos y su comportamiento mecánico puede enfocarse con modelos de vigas rectas o curvas. Existen varios artículos en la literatura científica que estudian distintos modelos de vigas rectas y curvas; muchos de los cuales tratan el problema de estructuras esbeltas desde una formulación bidimensional como se puede ver en los trabajos de Dryden (2006), Ding et al. (2007), Lim et al. (2009), Sankar (2001), y Malekzadeh (2009) entre otros. En otros artículos se puede apreciar el desarrollo de modelos estructurales desde una concepción unidimensional, como se puede ver en los trabajos de Kapuria et al., (2006), (2008), Piovan et al. (2008), Piovan and Sampaio (2008), (2009). Algunos autores han efectuado análisis dinámico de estructuras tipo viga por medio de modelos numéricos en el marco de la elasticidad tridimensional lineal (Ramirez and Piovan, 2008), en tanto que otros (Kapuria et al., 2006; 2008) han efectuado estudios experimentales para validación de modelos estructurales teóricos.

En este trabajo se pretende efectuar una caracterización de los modelos unidimensionales para estructuras de materiales funcionales desarrollados por los autores. Se presenta sucintamente un modelo estructural de viga curva de material funcional ya desarrollado y se efectúa una comparación de su respuesta estática y dinámica con los correspondientes de un modelo numérico de elementos finitos preparado en una plataforma flexible y general dentro de la elasticidad bidimensional o tridimensional lineal basada en el método de elementos finitos. Esta plataforma llamada FlexPDE (Backstrom, 1998) permite la introducción de formas constitutivas complejas, en tanto que las ecuaciones de movimiento son descritas en su formulación fuerte (es decir como ecuaciones diferenciales) para luego ser discretizadas en el espacio mediante el método de elementos finitos.

Se presentan comparaciones de la respuesta estática (tensiones, deformaciones y desplazamientos) y dinámica (en vibraciones libres) del modelo unidimensional con las formulaciones bidimensional o tridimensional de elementos finitos. A su vez se comparan distintas formas constitutivas entre sí con datos experimentales y resultados computacionales.

2 BREVE PRESENTACIÓN DE UN MODELO UNIDIMENSIONAL

En la Figura 1 se muestra un elemento estructural esbelto, curvado en un plano con radio de curvatura en el baricentro constante. Las propiedades elásticas y másicas de la viga se pueden distribuir de acuerdo a una variación funcional arbitraria en el dominio de la sección. Por razones de simplicidad constructiva la variación de propiedades se suele graduar en la dirección radial exclusivamente o bien en la dirección vertical exclusivamente.

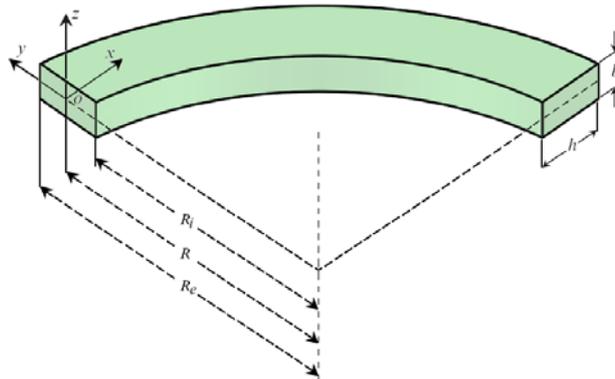


Figure 1: Esquema del elemento estructural unidimensional.

El modelo unidimensional se ha desarrollado previamente (Piovan, 2009) y sus ecuaciones de equilibrio dinámico pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 -Q'_x - \frac{M'_z}{R} + \mathcal{M}_1 - \mathcal{P}_1 &= 0, \\
 -Q'_y + \frac{Q_x}{R} + \mathcal{M}_2 - \mathcal{P}_2 &= 0, \\
 M'_z - Q_y + \mathcal{M}_3 - \mathcal{P}_3 &= 0, \\
 -Q'_z + \mathcal{M}_4 - \mathcal{P}_4 &= 0, \\
 -M'_y + Q_z + \frac{M_x}{R} + \mathcal{M}_5 - \mathcal{P}_5 &= 0, \\
 -M'_x - \frac{M_y}{R} + \mathcal{M}_6 - \mathcal{P}_6 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Estas ecuaciones diferenciales están sujetas a las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned}
 Q_x + \frac{M_z}{R} &= 0 \quad \text{or} \quad u_{xo} = 0, \\
 Q_y &= 0 \quad \text{or} \quad u_{yo} = 0, \\
 M_z &= 0 \quad \text{or} \quad \theta_z = 0, \\
 Q_z &= 0 \quad \text{or} \quad u_{zo} = 0, \\
 M_y &= 0 \quad \text{or} \quad \theta_y = 0, \\
 M_x &= 0 \quad \text{or} \quad \phi_x = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

En las precedentes expresiones: Q_x significa la fuerza axial perpendicular a la sección de la viga; Q_y y Q_z son las fuerzas cortantes en el plano y fuera del plano, respectivamente; M_z y M_y son los momentos flectores vinculados a los comportamientos en el plano y fuera del

plano, respectivamente. Por último M_x es el momento de torsión total de la sección, el cual incluye el fenómeno de alabeo seccional. Por otro lado, u_{xo} , u_{yo} , u_{zo} son los desplazamientos de la sección (medidos en el centro geométrico de la misma) como cuerpo rígido, en las correspondientes direcciones, mientras que θ_y y θ_z son parámetros rotacionales de flexión y ϕ_x es la rotación por torsión. Las funciones \mathcal{M}_j , $j=1, \dots, 6$ son fuerzas inerciales dependientes de las aceleraciones de los mencionados desplazamientos, mientras que las funciones \mathcal{P}_j , $j=1, \dots, 6$ son fuerzas externas distribuidas o momentos distribuidos (según el caso) a lo largo de la viga. Las expresiones para \mathcal{M}_j y los esfuerzos seccionales se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{M}\} &= [\mathbf{M}_{D0}] \{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{M}_{D1}] \{\dot{\mathbf{U}}'\} + [\mathbf{M}_{D2}] \{\ddot{\mathbf{U}}''\}, \\ \{\mathbf{F}\} &= [\mathbf{M}_{E0}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} + [\mathbf{M}_{E1}] \{\boldsymbol{\varepsilon}'\} + [\mathbf{M}_{E2}] \{\boldsymbol{\varepsilon}''\}, \end{aligned} \quad (3)$$

donde:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}\} &= \{Q_x, M_y, M_z, Q_y, Q_z, M_x\}^T \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= \{\varepsilon_{D1}, \varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D8}\}^T \\ \{\mathcal{M}\} &= \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5, \mathcal{M}_6\}^T \\ \{\ddot{\mathbf{U}}\} &= \{\ddot{u}_{xo}, \ddot{u}_{yo}, \ddot{\theta}_z, \ddot{u}_{zo}, \ddot{\theta}_y, \ddot{\phi}_x\}^T \end{aligned} \quad (4)$$

Los apóstrofes y los puntos sobre las variables indican derivación con respecto a la variable espacial x y con respecto a la variable temporal. En tanto que las deformaciones generalizadas ε_{Di} , y las matrices de la Eq. (3) se definen como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= u'_{xo} + \frac{u_{yo}}{R}, \quad \varepsilon_{D2} = \theta'_y - \frac{\phi'_x}{R}, \quad \varepsilon_{D3} = \theta'_z - \frac{u'_{xo}}{R}, \\ \varepsilon_{D5} &= u'_{yo} - \theta_z, \quad \varepsilon_{D6} = u'_{zo} + \theta_y, \quad \varepsilon_{D8} = \phi'_x - \frac{\theta_y}{R}, \\ \varepsilon_{D4} &= \phi''_x - \frac{\theta''_y}{R} = \varepsilon'_{D8}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$[\mathbf{M}_{D0}] = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & 0 & \tilde{M}_{13} & 0 & \tilde{M}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{M}_{22} & 0 & 0 & 0 & \tilde{M}_{26} \\ \tilde{M}_{13} & 0 & \tilde{M}_{33} & 0 & \tilde{M}_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{M}_{44} & 0 & \tilde{M}_{46} \\ \tilde{M}_{15} & 0 & \tilde{M}_{35} & 0 & \tilde{M}_{55} & 0 \\ 0 & \tilde{M}_{26} & 0 & \tilde{M}_{46} & 0 & \tilde{M}_{66} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$[\mathbf{M}_{D1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{M}_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{M}_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{M}_{57} \\ -\tilde{M}_{17} & 0 & -\tilde{M}_{37} & 0 & -\tilde{M}_{57} & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}_{D2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{M}_{77} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$[M_{E0}] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & 0 & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & 0 & 0 & 0 \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{55} & 0 & J_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{66} & J_{67} \\ 0 & 0 & 0 & J_{57} & J_{67} & J_{77} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$[M_{E1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{14} & -J_{24} & -J_{34} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [M_{E2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{44} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Los elementos de las matrices definidas en las Eq. (6) y Eq. (7) se definen a continuación:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{11} &= J_{11}^\rho + \frac{2J_{12}^\rho}{R} + \frac{J_{22}^\rho}{R^2}, \tilde{M}_{13} = -J_{12}^\rho - \frac{J_{22}^\rho}{R}, \tilde{M}_{15} = J_{13}^\rho + \frac{J_{23}^\rho - J_{14}^\rho}{R} - \frac{J_{24}^\rho}{R^2}, \tilde{M}_{33} = J_{22}^\rho, \\ \tilde{M}_{17} &= J_{14}^\rho + \frac{J_{24}^\rho}{R}, \tilde{M}_{22} = \tilde{M}_{44} = J_{11}^\rho, \tilde{M}_{55} = J_{33}^\rho - \frac{2J_{34}^\rho}{R} + \frac{J_{44}^\rho}{R^2}, \tilde{M}_{35} = -J_{23}^\rho + \frac{J_{24}^\rho}{R}, \\ \tilde{M}_{66} &= J_{22}^\rho + J_{33}^\rho, \tilde{M}_{26} = -J_{13}^\rho, \tilde{M}_{46} = J_{12}^\rho, \tilde{M}_{37} = -J_{24}^\rho, \tilde{M}_{57} = J_{34}^\rho - \frac{J_{44}^\rho}{R}, \tilde{M}_{77} = J_{44}^\rho, \end{aligned} \quad (10)$$

donde:

$$J_{hk}^\rho = \int_A \rho(y, z) \bar{g}_h \bar{g}_k \frac{dA}{\mathcal{F}}, \quad \bar{g} = \{1, y, z, \omega\}, \quad \mathcal{F} = \frac{R}{R+y}. \quad (11)$$

Siendo $\rho(y, z)$ la forma en que se distribuye la densidad en la sección, en tanto que ω es la función de alabeo de la sección de la viga curva la cual puede aproximarse como:

$$\omega = \bar{\omega} \mathcal{F} \quad (12)$$

Siendo $\bar{\omega}$ la función de alabeo de una viga recta con la misma distribución material en la sección que la viga curva. Por otro lado, los elementos de las matrices definidas en las Eq. (8) y Eq. (9) se calculan como:

$$J_{hk} = \int_A E(y, z) \bar{g}_h \bar{g}_k \mathcal{F} dA, \quad \bar{g} = \{1, y, z, \omega\}, \quad \mathcal{F} = \frac{R}{R+y}. \quad (13)$$

$$J_{55} = k_{55} \int_A G_{xy}(y, z) \mathcal{F} dA, \quad J_{66} = k_{66} \int_A G_{xz}(y, z) \mathcal{F} dA,$$

$$J_{57} = - \int_A G_{xy}(y, z) \left(z - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + \frac{2\bar{\omega} \mathcal{F}}{R} \right) \mathcal{F} dA, \quad J_{67} = \int_A G_{xz}(y, z) \left(y + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) \mathcal{F} dA, \quad (14)$$

$$J_{77} = \int_A \left[G_{xy}(y, z) \left(z - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + \frac{2\bar{\omega} \mathcal{F}}{R} \right)^2 + G_{xz}(y, z) \left(y + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right)^2 \right] \mathcal{F} dA$$

Siendo: $E(y,z)$, $G_{xy}(y,z)$ y $G_{xz}(y,z)$ el módulo de elasticidad longitudinal y los dos módulos de elasticidad transversales en los planos XY y XZ, respectivamente. Los coeficientes k_{55} y k_{66} corresponden a los coeficientes de corte devenidos de la teoría de Timoshenko pero aplicados en el contexto de estructuras curvas y de materiales funcionales (a modo de ejemplo ver forma de deducción de k_{55} en el trabajo de Piovan et al, 2008).

En el caso general de distribución de los constituyentes de un material funcional, las ecuaciones diferenciales presentadas en la Eq. (1) están completamente acopladas, según se puede colegir observando la Eq. (3) a la Eq. (14). En algunas circunstancias el tipo de distribución material favorece el desacople del sistema dado en la Eq. (1) en dos subsistemas que corresponden a los movimientos en el plano de curvatura (o sea en XY) y fuera de tal plano (es decir en el cilindro de generatriz Z).

3 PLANTEO DE LA APROXIMACIÓN TRIDIMENSIONAL

En la introducción se ha mencionado que para efectuar los estudios comparativos se empleará una plataforma computacional flexible de resolución de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales basada en el método de elementos finitos.

Así pues, las ecuaciones que se resuelven en la elasticidad tridimensional son las convencionales ecuaciones de equilibrio definidas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \lambda \rho(y,z)u + X_u &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \lambda \rho(y,z)v + X_v &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \lambda \rho(y,z)w + X_w &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

En la Eq. (15), con u , v y w se identifican los desplazamientos de un punto cualquiera en las direcciones x , y , y z , respectivamente. Con λ se identifica el autovalor y con X_u , X_v y X_w las fuerzas por unidad de volumen en las direcciones x , y , y z , respectivamente. Las tensiones se definen en términos de la siguiente ley constitutiva:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Siendo:

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (17)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = G_{xz}, \quad Q_{66} = G_{xy},$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial x}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial x}, 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (18)$$

Téngase en cuenta que los materiales funcionales suelen construirse con una dirección de

variación preferencial, con lo que E , G_{xy} y G_{xz} pueden caracterizar también un material transversalmente isótropo o uno isótropo.

Para efectuar los cálculos con el programa de resolución de ecuaciones tridimensionales se empleará el mayor orden polinómico permitido por el programa, lo cual conduce al empleo de elementos tetraédricos de 20 nodos. En los casos de estudio de vibraciones libres de carga se impone $X_u = X_v = X_w = 0$ en la Eq. (15), por otro lado en los casos de resolución de problemas estáticos se impondrá $\lambda = 0$ en la Eq. (15). En el Apéndice I se muestra un ejemplo de cómo se implementa el problema en la plataforma FlexPDE.

4 COMPARACIONES Y CASOS DE ESTUDIO

En esta sección se presentarán algunos ejemplos para validar el modelo unidimensional y establecer el rango de aplicabilidad de la teoría de viga con relación a un modelo tridimensional de mayor jerarquía.

En la Tabla 1 se presentan los datos de los materiales metálicos y cerámicos que se emplearán para las comparaciones de los modelos estructurales con sus correspondientes leyes constitutivas. Según varios trabajos de la literatura (Chakraborty et al., 2003; Kapuria et al., 2008; Piovan et al., 2008) se emplea la hipótesis de proporcionalidad entre el módulo longitudinal y el transversal para calcular las restantes propiedades.

Propiedades de los materiales	Acero	Aluminio	Carburo de Silicio (SiC)	Alúmina (Al ₂ O ₃)
Módulo longitudinal E (GPa)	214.00	67.00	302.00	390.00
Módulo cortante G (GPa)	82.20	---	---	137.00
coeficiente de Poisson	---	0.33	0.17	---
Densidad ρ (Kg/m ³)	7800.00	2700.00	3200.00	3200.00

Tabla 1: Propiedades de diferentes materiales metálicos y cerámicos.

En los próximos apartados se muestran comparaciones entre el modelo unidimensional presentado en la Sección 2 y resultados de la aproximación de elementos finitos tridimensionales. También se efectuarán comparaciones con resultados experimentales en los casos donde se disponga de tales valores. El modelo unidimensional de la Sección 2 se ha implementado computacionalmente mediante un elemento finito curvo de cuatro nodos (Piovan, 2003).

4.1 Validación computacional y experimental: caso de viga recta

El modelo unidimensional de viga curva de la Sección 2 se puede reducir al de viga recta cuando se impone en las Eq. (1) a Eq. (14) la condición $R \rightarrow \infty$. Como primer ejemplo se cotejarán los resultados del modelo de viga curva con los resultados experimentales ofrecidos en el trabajo de Kapuria et al. (2008). Se trata de una viga cantilever constituida por tres o cinco láminas según se aprecia en la Figura 2, donde además de la longitud del espécimen se indican las proporciones de los constituyentes de aluminio y de carburo de silicio. En todos los casos la profundidad de la sección es de 15 mm. Para el caso de cinco láminas, el espesor de cada una es de 2 mm.; en tanto que en el caso de tres láminas, el espesor de cada lámina es de 3 mm. Los cálculos efectuados con el modelo unidimensional se efectuaron con 4 elementos finitos, en tanto que los cálculos efectuados con el enfoque tridimensional requirieron más de 5000 elementos tetraédricos.

En las Tabla 2 y 3 se comparan los valores experimentales obtenidos por Kapuria et al. (2008) junto con su enfoque de viga recta, los resultados del enfoque tridimensional de la

Sección 3 de este trabajo y los resultados del enfoque de viga presentados en la Sección 2 de este trabajo. La ley constitutiva para el módulo de elasticidad longitudinal es una variante (Tomota et al., 1976; Finot et al., 1996) de la ley de mezclas de dos constituyentes y viene dada por la Eq. (19), en tanto que la variación de la densidad o el coeficiente de Poisson para material funcional se definen por la ley lineal de mezclas según la Eq (20).

$$E = \frac{[V_m E_m (q_\sigma + E_c) + (1 - V_m)(q_\sigma + E_m) E_c]}{[V_m (q_\sigma + E_c) + (1 - V_m)(q_\sigma + E_m)]} \quad (19)$$

$$\mathcal{D} = V_m \mathcal{D}_m + V_c \mathcal{D}_c \quad (20)$$

Donde V_c y V_m son las proporciones volumétricas de material cerámico y material metálico respectivamente. E_c y E_m son los módulos de elasticidad del material cerámico y metálico respectivamente. Con \mathcal{D} , \mathcal{D}_c y \mathcal{D}_m se quiere significar, en sentido genérico, las propiedades efectiva del material compuesto y de los materiales cerámicos y metálicos, respectivamente; que en este caso corresponden a la densidad o al coeficiente de Poisson. Finalmente, q_σ es una razón de tensiones a deformaciones de las fases cerámica y metálica, definida como:

$$q_\sigma = -\frac{\sigma_c - \sigma_m}{\varepsilon_c - \varepsilon_m} \quad (21)$$

Si $q_\sigma = \infty$ se podría deducir una forma similar a la Eq (20) para calcular el módulo de elasticidad efectivo (Kapuria et al., 2008).

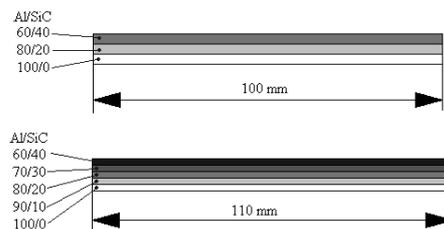


Figura 2: Casos de viga de material cerámico-metal con variaciones funcionales en forma laminada.

Modo	Kapuria et al. (2008)					Presente trabajo	
	Exp. No 1	Exp. No 2	Exp. No 3	Exp. Media	Viga	3D	1D
1	837	890	820	849	840	814	827
2	5265	5410	5015	5230	5075	4925	4996
3	14100	14550	13590	14080	12486	13105	13273
4	15005	15100	15000	15035	14447	14286	14234

Tabla 2: Frecuencias naturales [Hz] viga cantilever de tres láminas Al/SiC.

Modo	Kapuria et al. (2008)					Presente trabajo	
	Exp. No 1	Exp. No 2	Exp. No 3	Exp. Media	Viga	3D	1D
1	761	726	770	752	754	749	757
2	4592	4387	4670	4550	4558	4523	4572
3	12318	11790	12420	12176	12125	12019	12136
4	13464	13355	13465	13428	13078	12994	12900

Tabla 3: Frecuencias naturales [Hz] viga cantilever de cinco láminas Al/SiC.

Nótese en las Tablas 2 y 3 que las diferencias porcentuales entre el enfoque 3D y el

enfoque de viga desarrollado por uno de los autores no difieren en más de 1.5% entre sí. Por otro lado, tanto los valores de frecuencias calculados con el enfoque 3D como con el 1D se hallan dentro de los márgenes de variabilidad de los datos experimentales.

4.2 Validación computacional: estática de arcos

En esta sección se efectúa una comparación de los resultados del modelo unidimensional con el enfoque de elementos finitos bidimensionales en un estado plano de tensión, el cual puede hallarse imponiendo las correspondientes restricciones en las Eq (15) a Eq (18). Los materiales constitutivos de la viga son acero y alúmina. La estructura tiene un radio $R = 1.00$ m, está empotrada en un extremo y libre en el otro cubriendo una abertura total de 60° , se halla sometida a una carga radial distribuida de valor unitario. Las dimensiones de la sección son tales que $b = 10$ cm y la altura h puede tener diferentes valores. Se emplea una ley de variación similar para todas las propiedades y que sea tal que varía solamente a lo largo de la coordenada radial. Esta ley de variación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_m + (\mathcal{D}_c - \mathcal{D}_m) \left| \frac{2y}{h} \right|^m. \quad (22)$$

Con \mathcal{D} , \mathcal{D}_c y \mathcal{D}_m se quiere significar, en sentido genérico, la propiedad efectiva del material funcional y de los materiales cerámicos y metálicos, respectivamente. Es decir, E o G o ν o ρ indistintamente.

Debido al tipo de solicitación y condición de borde se puede obtener una solución analítica del modelo unidimensional. Esta solución, para este trabajo, ha sido elaborada en un programa de álgebra y cálculo simbólico, resolviendo las ecuaciones correspondientes al movimiento en el plano de la Eq. (1). En los cálculos del enfoque bidimensional se emplearon modelos con más de 1000 elementos finitos triangulares de seis nodos. Se compararán desplazamientos, deformaciones y tensiones en las secciones ubicadas a 15° y 45° del empotramiento. Para el modelo de viga curva, el desplazamiento circunferencial, la deformación circunferencial y la tensión normal medidas en cierta sección se pueden calcular como:

$$u_x(x, y, z, t) = u_{x_0}(x, t) - \left(\theta_z(x, t) - \frac{u_{x_0}(x, t)}{R} \right) y, \quad (23)$$

$$\varepsilon_{xx} = \left[\left(u'_{x_0} + \frac{u_{y_0}}{R} \right) - y \left(\theta'_z - \frac{u'_{x_0}}{R} \right) \right] \mathcal{F}, \quad (24)$$

$$\sigma_{xx} = E(y) \left[\left(u'_{x_0} + \frac{u_{y_0}}{R} \right) - y \left(\theta'_z - \frac{u'_{x_0}}{R} \right) \right] \mathcal{F}. \quad (25)$$

En las Figuras 3, 4 y 5 se muestra la comparación de la solución del modelo de viga curva (identificado con la sigla "MV") y del modelo de elementos finitos bidimensionales elaborado sobre la plataforma computacional mencionada (identificada con la sigla "FEM2D"). La Figura 3 muestra los desplazamientos circunferenciales en los planos a 15° (figuras del lado izquierdo) y a 45° (figuras del lado derecho) para diferentes relaciones geométricas h/R y para distintos exponentes m de la Eq. (22). Así pues en las Figuras 3(a) y 3(b) se tienen los desplazamientos correspondientes a $h/R=0.05$ con $m=0.1$, es decir una viga muy esbelta mayormente construida con material cerámico. En las Figuras 3(c) y 3(d) se tienen los desplazamientos correspondientes a $h/R=0.125$ con $m=0.1$, es decir una viga mas gruesa que

la anterior. En las Figuras 3(e) y 3(f) se tienen los desplazamientos correspondientes a $h/R=0.05$ con $m=1$, es decir una viga esbelta mayormente construida con material metálico. En las Figuras 3(g) y 3(h) se tienen los desplazamientos correspondientes a $h/R=0.125$ con $m=1$, es decir una viga mas gruesa que la anterior.

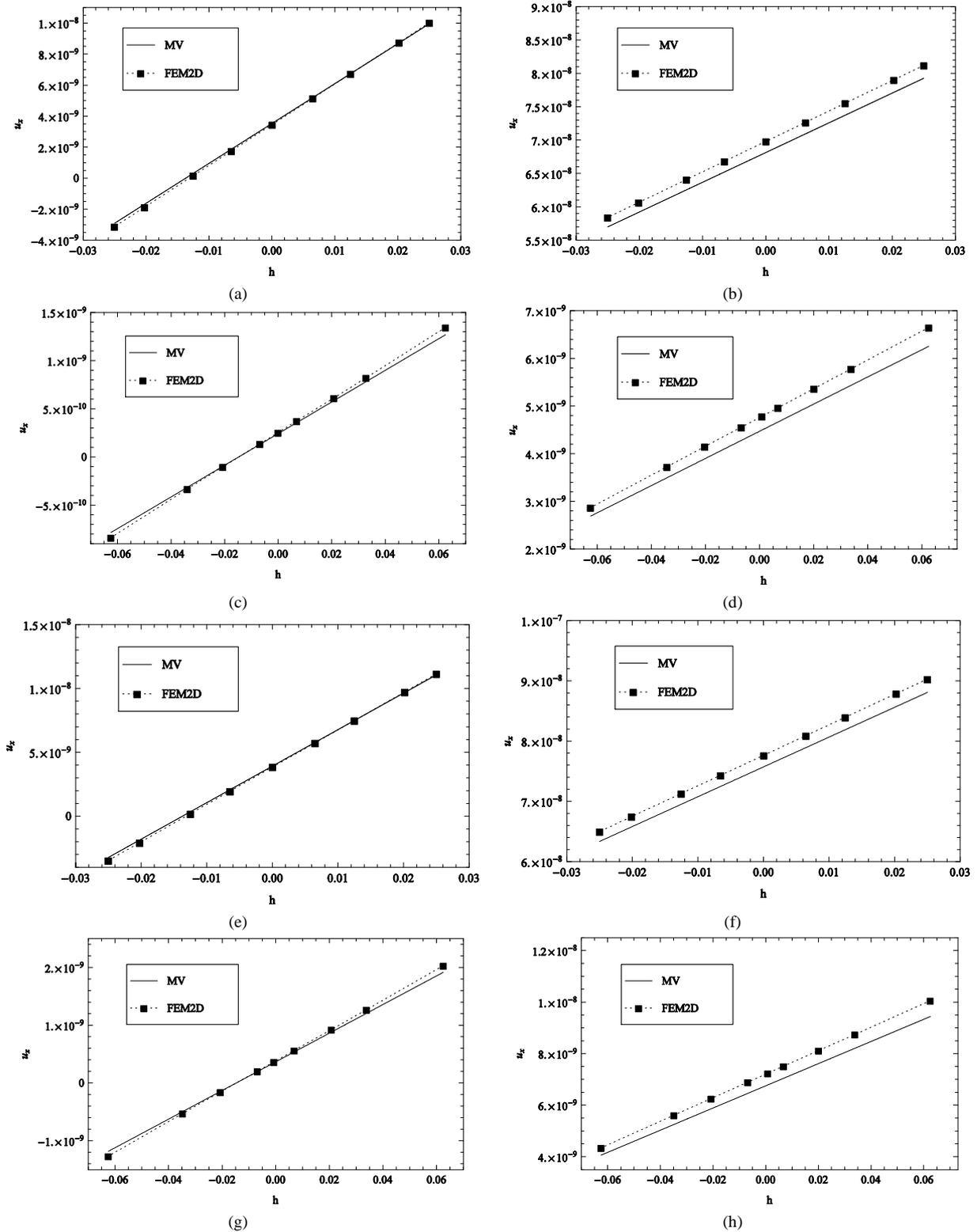


Figura 3: Comparación de desplazamientos del modelo viga y el modelo bidimensional.

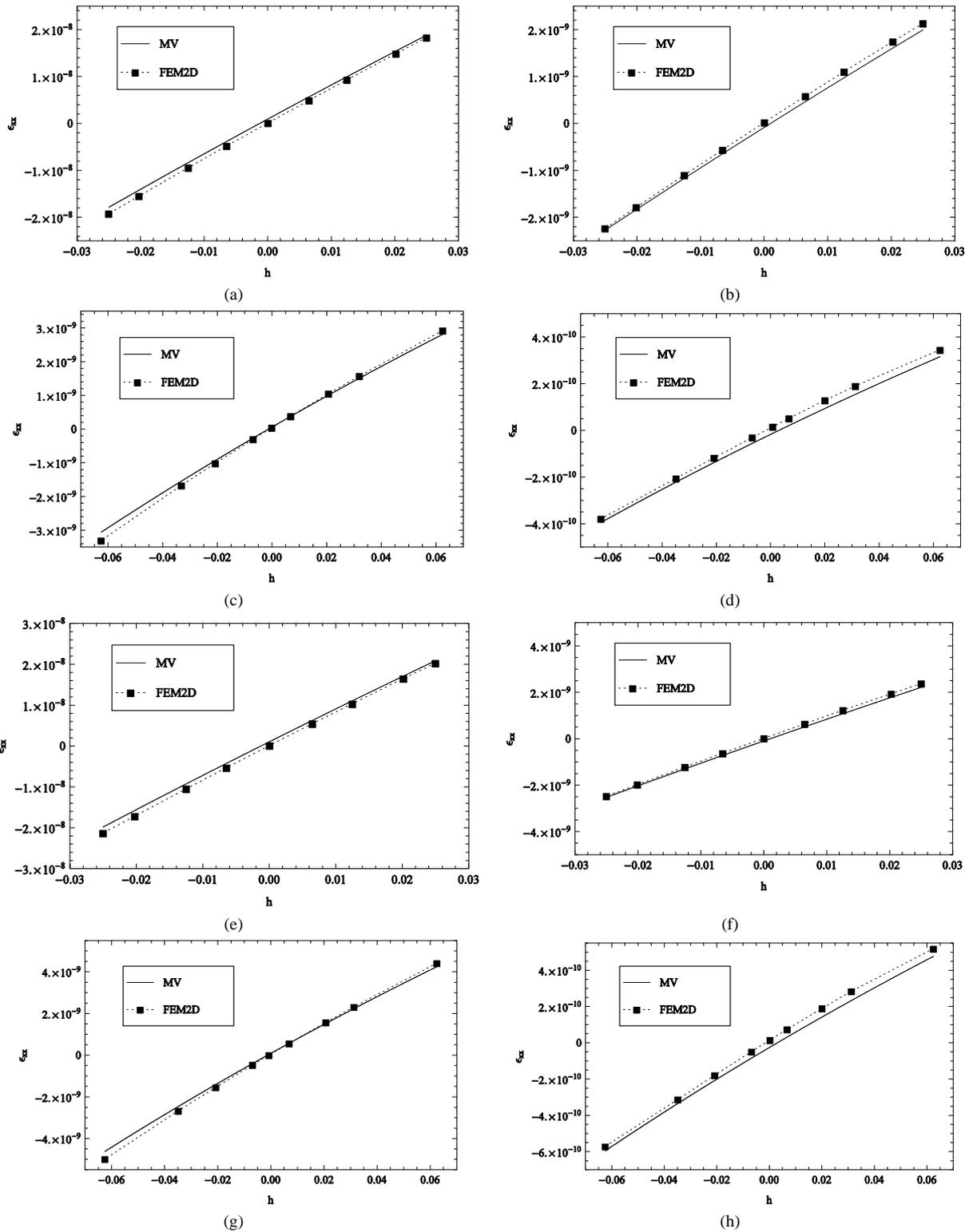


Figura 4: Comparación de deformaciones circunferenciales del modelo viga y el modelo bidimensional.

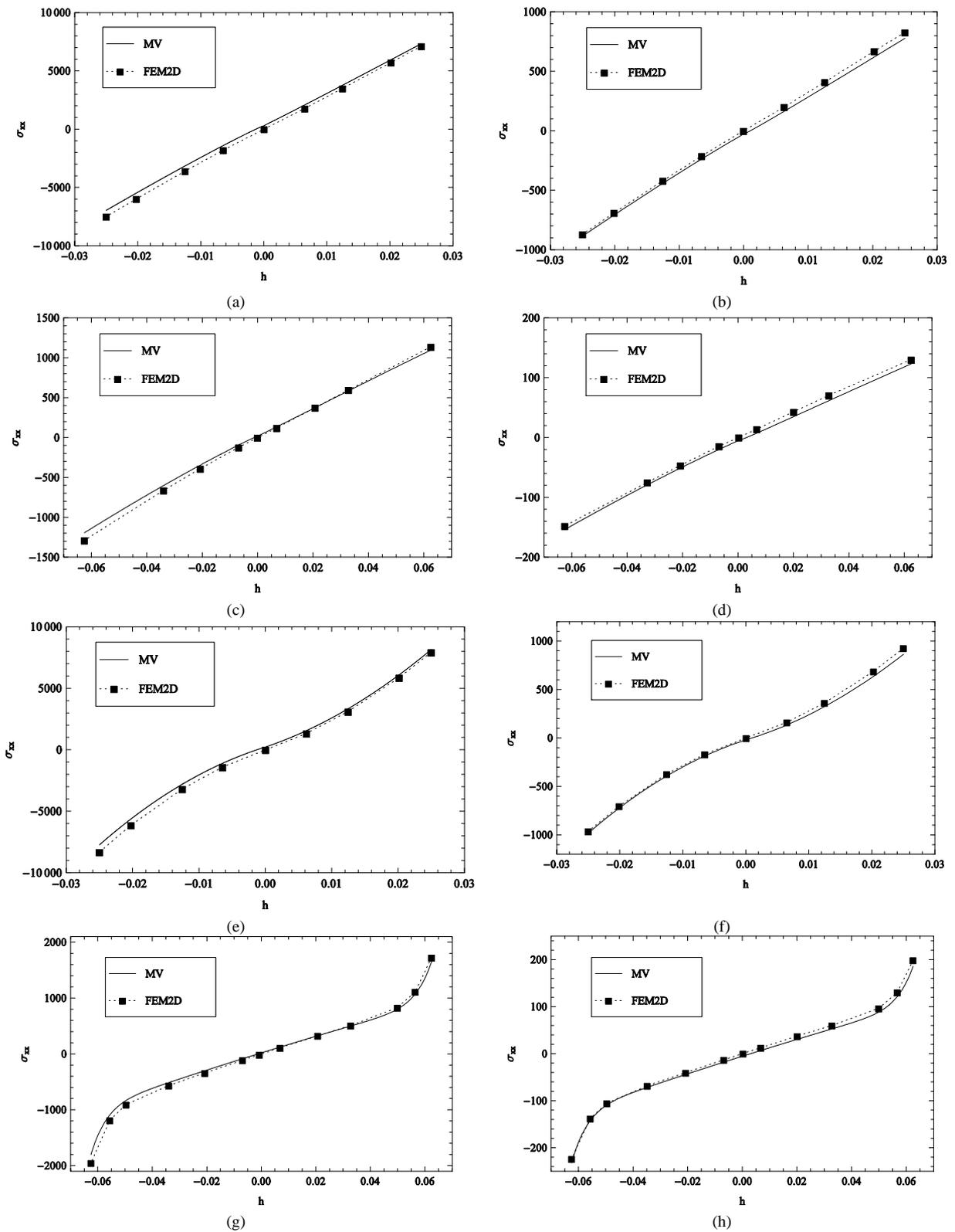


Figura 5: Comparación de tensiones normales del modelo viga y el modelo bidimensional.

En las Figuras 4(a) y 4(b) (Figuras 5(a) y 5(b)) se tienen las deformaciones (tensiones) correspondientes a $h/R=0.05$ con $m=0.1$, es decir una viga muy esbelta mayormente construida con material cerámico. En las Figuras 4(c) y 4(d) (Figuras 5(c) y 5(d)) se tienen las

deformaciones (tensiones) correspondientes a $h/R=0.125$ con $m=0.1$, es decir una viga más gruesa que la anterior. En las Figuras 4(e) y 4(f) (Figuras 5(e) y 5(f)) se tienen las deformaciones (tensiones) correspondientes a $h/R=0.05$ con $m=1$, es decir una viga esbelta mayormente construida con material metálico. En las Figuras 4(g) y 4(h) (Figuras 5(g) y 5(h)) se tienen las deformaciones (tensiones) correspondientes a $h/R=0.125$ con $m=1$, es decir una viga más gruesa que la anterior.

Nótese que para la correlación entre los dos enfoques es muy buena con una ligera diferencia de no más de 5% en los desplazamientos según se puede observar en las Figuras 3(b), 3(d), 3(f) y 3(h).

4.3 Validación computacional: dinámica de vigas curvas en el plano

En este apartado se efectúa una validación del modelo viga curva con el enfoque tridimensional, calculando las frecuencias del movimiento en el plano de una viga curva cantilever construida con acero y alúmina. Para la resolución del problema de autovalores en el modelo viga se han empleado diez elementos curvos isoparamétricos de aproximación cuártica (ver Piovan, 2003). La viga curva es tal que tiene un radio $R=1$ m, las dimensiones de la sección son $h=2$ cm y $b=1$ cm. Se considerará una distribución de propiedades variando solamente en la dirección radial con la misma forma que la indicada en la Eq. (22).

Así pues en la Tabla 4 se muestran las frecuencias de los dos enfoques (es decir, el modelo unidimensional y el modelo tridimensional de elementos finitos) para varias relaciones de esbeltez h/L y para un exponente $m=0.1$ (es decir con mayor proporción de Alúmina), en tanto que en las Tablas 5 y 6 se muestra lo propio para exponentes $m=1$ y $m=10$ (o sea con mayor proporción metálica), respectivamente.

Modos	Enfoque 3D			Enfoque 1D		
	h/L			h/L		
	<i>0.025</i>	<i>0.05</i>	<i>0.1</i>	<i>0.025</i>	<i>0.05</i>	<i>0.1</i>
1	52.83	209.10	831.29	52.67	208.34	826.11
2	304.59	1266.46	4938.81	303.46	1261.63	4907.12
3	883.62	3512.02	12597.07	879.53	3497.80	12537.10
4	1741.68	6407.17	13235.34	1730.51	6385.10	13157.10

Tabla 4: Modos flexionales en el plano. Material con $m=0.1$, propiedades variando en dirección radial.

Modos	Enfoque 3D			Enfoque 1D		
	h/L			h/L		
	<i>0.025</i>	<i>0.05</i>	<i>0.1</i>	<i>0.025</i>	<i>0.05</i>	<i>0.1</i>
1	40.62	160.77	638.79	40.54	160.32	635.56
2	233.80	972.22	3777.20	233.49	970.32	3768.56
3	677.09	2689.84	9263.90	676.56	2687.77	9240.45
4	1331.02	4704.51	9967.55	1330.45	4699.85	9972.27

Tabla 5: Modos flexionales en el plano. Material con $m=1$, propiedades variando en dirección radial.

Modos	Enfoque 3D			Enfoque 1D		
	h/L			h/L		
	<i>0.025</i>	<i>0.05</i>	<i>0.1</i>	<i>0.025</i>	<i>0.05</i>	<i>0.1</i>
1	30.0	119.01	472.90	30.01	118.72	470.75
2	172.70	720.61	2808.79	172.92	718.91	2796.19
3	500.59	1997.47	6968.74	501.15	1992.85	6948.88
4	984.60	3539.04	7459.85	985.87	3533.46	7427.33

Tabla 6: Modos flexionales en el plano. Material con $m=10$, propiedades variando en dirección radial.

Se ha podido constatar que, para todas las relaciones de esbeltez h/L y todos los exponentes m de la ley de distribución de propiedades empleados, la diferencia porcentual entre el enfoque de viga tridimensional por elementos finitos y el enfoque unidimensional, no supera el 0.5%. Este aspecto es sumamente importante, ya que el modelo unidimensional casi replica los valores del enfoque tridimensional con menos de una centésima parte de los recursos computacionales y demorando trescientas veces menos tiempo.

4.4 Validación computacional: dinámica de vigas curvas fuera del plano

En esta sección se efectúa un estudio de validación del modelo viga curva con el enfoque tridimensional, calculando las frecuencias del movimiento fuera del plano para una viga curva cantilever construida con acero y alúmina. La viga curva es tal que tiene un radio $R=1$ m, las dimensiones de la sección son $h=2$ cm y $b=1$ cm. Se considerará una distribución de propiedades variando solamente en la dirección vertical, es decir:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_m + (\mathcal{D}_c - \mathcal{D}_m) \left| \frac{2z}{h} \right|^m. \quad (26)$$

Al igual que antes, \mathcal{D} , \mathcal{D}_c y \mathcal{D}_m significan, en sentido genérico, la propiedad efectiva del material funcional y de los materiales cerámicos y metálicos, respectivamente. Es decir, E o G o ν o ρ indistintamente. Nótese que la Eq. (26) tiene la misma forma que la Eq. (22).

Para la resolución del problema de autovalores en el modelo de viga se han empleado diez elementos curvos iso-paramétricos de aproximación cuártica (Piovan, 2003).

Modos	Enfoque 3D			Enfoque 1D		
	h/L			h/L		
	0.025	0.05	0.1	0.025	0.05	0.1
1	25.50	103.71	415.46	25.78	104.63	415.91
2	147.66	626.44	2554.42	149.13	639.74	2557.76
3	429.58	1772.98	7069.07	438.03	1797.47	7077.82
4	829.09	3521.25	13514.06	853.47	3567.15	13457.8

Tabla 7: Modos flexionales fuera del plano. Material con $m=0.1$, propiedades variando en dirección vertical.

Modos	Enfoque 3D			Enfoque 1D		
	h/L			h/L		
	0.025	0.05	0.1	0.025	0.05	0.1
1	20.42	80.55	322.31	20.37	80.74	320.19
2	118.15	492.07	1980.57	117.27	492.62	1969.96
3	343.46	1383.59	5469.64	341.79	1382.74	5402.62
4	680.43	2725.98	10401.69	674.63	2673.20	10334.6

Tabla 5: Modos flexionales fuera del plano. Material con $m=1$, propiedades variando en dirección vertical.

Modos	Enfoque 3D			Enfoque 1D		
	h/L			h/L		
	0.025	0.05	0.1	0.025	0.05	0.1
1	14.82	59.37	237.74	15.04	59.80	237.25
2	85.68	362.97	1462.73	87.46	366.66	1461.48
3	248.25	1020.52	4046.95	252.99	1026.53	4015.65
4	490.99	2012.39	7713.62	499.06	2000.33	7669.83

Tabla 6: Modos flexionales fuera del plano. Material con $m=10$, propiedades variando en dirección vertical.

Se ha podido constatar que, para todas las relaciones de esbeltez h/L y todos los

exponentes m de la ley de distribución de propiedades empleados, la diferencia porcentual entre el enfoque de viga tridimensional por elementos finitos y el enfoque unidimensional, no supera el 2.5%.

Se debe destacar que las diferencias porcentuales observadas en la Sección 2 para el movimiento en el plano son menores que las observadas en este apartado. Una de las hipótesis que justifica tal situación se puede rastrear en la aproximación de la función de alabeo de la Eq. (12). Aunque este asunto ameritaría un estudio más profundo, ya que exige extender los enfoques de Lekhnitskii (1981) para analizar el comportamiento torsional de estructuras con no homogeneidad en el material.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha efectuado un estudio comparativo de la capacidad representativa de un modelo unidimensional de vigas construidas con materiales funcionalmente gradados. El modelo unidimensional ha sido desarrollado previamente y se ha comparado su eficiencia con validaciones experimentales (en los casos disponibles) de otros autores y principalmente validaciones computacionales que permiten resolver en forma flexible y simple las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales del problema homónimo en la elasticidad bidimensional o tridimensional. Se ha observado que el modelo unidimensional en comparación con los enfoques bidimensional y tridimensional, a pesar de ser de menor jerarquía tiene un más que aceptable rango de validación para un importante margen de relaciones geométricas con diferentes leyes constitutivas. Esto es oportuno en tanto que el modelo unidimensional implementado con formulaciones de elementos finitos ofrece ahorros de tiempo sustanciales manteniendo una buena calidad descriptiva respecto de su contraparte tridimensional para efectuar estudios con mayor demanda computacional como pueden ser los problemas de optimización estructural o bien los problemas de incertidumbre de propiedades.

REFERENCIAS

- Backstrom G., Deformation and Vibration by Finite Element Analysis. Editorial Studentlitteratur, Suecia. 1998.
- Benatta M.A., Mechab I., Tounsi A., Adda Bedia E.A., Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. *Computational Materials Science*, 44(2):765-773, 2008.
- Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., Reddy, J.N. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences* 45:519–539, 2003.
- Ding, H.J., Huang, D.J., Chen, W.Q. Elasticity solutions for plane anisotropic functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures* 44:176–196, 2007
- Dryden, J., Bending of inhomogeneous curved bars. *International Journal of Solids and Structures* 44: 4158–4166, 2007.
- Finot, M., Suresh, S., Bull, C., and Sampath, S. Curvature changes during thermal cycling of a compositionally graded Ni–Al₂O₃ multilayered material. *Material Science and Engineering A*, 205:59–71, 1996
- Kim C., White S.R., Thick-walled composite beam theory including 3D elastic effects and torsional warping. *International Journal Solids Structures*, 34:4237-4259, 1997.
- Kapurja S., Bhattacharyya M., Kumar A.N., Assessment of coupled 1D models for hybrid piezoelectric layered functionally graded beams. *Composites Structures*, 72:455-468, 2006.
- Kapurja S., Bhattacharyya M., Kumar A.N., Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation.

- Composites Structures*, 82:390-402, 2008.
- Koizumi, M. The concept of FGM, *Ceramic Transactions*, 34: 3-10, 1993.
- Lim, C.W., Yang, Q., Lü, C.F., Xu, R., Two-Dimensional Elasticity Solutions for Temperature-Dependent In-plane Vibration of FGM Circular Arches, *Composite Structures*, doi: 10.1016/j.compstruct.2009.03.014, 2009.
- Lekhnitskii S.G., Theory of Elasticity of Anisotropic Body. MIR Publishers Moscow. 1981.
- Malekzadeh, P., Two-dimensional in-plane free vibrations of functionally graded circular arches with temperature-dependent properties, *Composite Structures*, doi: 10.1016/j.compstruct.2009.04.034, 2009.
- Piovan, M.T. Estudio teórico y computacional sobre la mecánica de vigas curvas de materiales compuestos, con sección de paredes delgadas, considerando efectos no convencionales. Tesis Doctoral. Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, 2003.
- Piovan, M.T. Un modelo de viga curva para materiales con propiedades elásticas e inerciales variando funcionalmente. Reporte Interno s/n, Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada. Universidad Tecnológica Nacional, FRBB. 2009.
- Piovan M.T., Filipich C.P., Ramírez J.M., A model for shear deformable curved beam made of functionally graded materials. XVII ENIEF. San Luis (Argentina). *Mecánica Computacional*, 27:2053-2067, 2008.
- Piovan, M.T. and Sampaio, R., Dynamics of rotating beams made of functionally graded materials. Actas del 6o Congresso Nacional de Engenharia Mecanica (formato digital), CONEM 2008. Salvador de Bahía, Brasil, 2008.
- Piovan, M.T. and Sampaio, R., Dynamics of rotating curved beams made of functionally graded materials. Proceedings of XIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (Digital format), Angra dos Reis, Brasil, 2009.
- Ramírez, J.M., Piovan, M.T., Vibraciones libres de vigas de rigidez variable construídas con materiales de gradación funcional (Formato Digital) Actas de las Jornadas de Estudiantes Investigadores. UTN-FRBB. Bahia Blanca, 2008.
- Sankar, B.V. An elasticity solution for functionally graded beams. *Composites Science and Technology* 61:689–696, 2001.
- Tomota, Y., Kuroki, K., Mori, T., Tamura, I. Tensile deformation of two ductile-phase alloys: flow curves of a-c Fe-Cr-Ni alloys. *Material Science and Engineering A* 24:85–94, 1976.

APENDICE I

A continuación se muestra un ejemplo de archivo descriptor para plantear la solución de las ecuaciones de elasticidad en tres dimensiones, mediante el programa de resolución de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, denominado FlexPDE. En particular se trata del descriptor del problema combinado de las Secciones 4.3 y 4.4.

```
TITLE "Vibraciones libres de una viga curva construida con FGM"
SELECT
modes=10
errlim = 1E-3
COORDINATES
cartesian3
VARIABLES
Ux {X-displacement}
```

Uy {Y-displacement}

Uz {Z-displacement}

DEFINITIONS

L=0.4 {Longitud de arco}

h=0.02 {Altura}

b=0.01 {Base}

R=1 {Radio}

z0=-b/2

z1= b/2

mag=0.01 { factor de escala}

n=1

x1=Sin(L/R)*x0

y1=Cos(L/R)*x0

{Propiedades de los Materiales}

{Acero}

Em=2.14E11 {Modulo de Elasticidad Lineal}

Gm=8.22E10 {Modulo de Elasticidad Transversal}

num=0.3017 {Modulo de Poisson}

rhom=7800 {Densidad}

{Alúmina, cerámica}

Ec=3.9E11

Gc=1.37E11

nuc=0.42

rhoc=3200

E = Em+(Ec-Em)*ABS((2*((x^2+y^2)^(1/2)-R)/h))^n

G = Gm+(Gc-Gm)*ABS((2*((x^2+y^2)^(1/2)-R)/h))^n

rho = rhom+(rhoc-rhom)*ABS((2*((x^2+y^2)^(1/2)-R)/h))^n

nu= num+(nuc-num)*ABS((2*((x^2+y^2)^(1/2)-R)/h))^n

KK=E/(1+nu)/(1-2*nu)

Q11=KK*(1-nu)

Q22=KK*(1-nu)

Q33=KK*(1-nu)

Q12=KK*nu

Q13=KK*nu

Q23=KK*nu

Q66= G

Q44 = G

Q55 = G

{Constitutivas}

Sxx = (dx(Ux)*Q11+dy(Uy)*Q12+dz(Uz)*Q13)

Syy = (dx(Ux)*Q12+dy(Uy)*Q22+dz(Uz)*Q23)

Szz = (dx(Ux)*Q13+dy(Uy)*Q23+dz(Uz)*Q33)

Syz = Q44*(dz(Uy)+dy(Uz))

Sxz= Q55*(dz(Ux)+dx(Uz))

Sxy= Q66*(dy(Ux)+dx(Uy))

EQUATIONS

Ux: dx[Sxx] + dy[Sxy]+dz[Sxz]+lambda*rho*Ux = 0

Uy: dx[Sxy] + dy[Syy] +dz[Syz]+lambda*rho*Uy = 0

```
Uz: dx[Sxz]+dy[Syx]+dz[Szz]+lambda*rho*Uz=0
EXTRUSION
surface"b0" z=z0
surface"b1" z=z1
BOUNDARIES
REGION 1
mesh_density=70
start (0,R+h/2) load(Ux)=0 load(Uy)=0 load(Uz)=0 ARC(CENTER=0,0)
ANGLE=(-L/R*180/Pi)
load(Ux)=0 load(Uy)=0 load(Uz)=0 LINE TO (x1,y1)
load(Ux)=0 load(Uy)=0 load(Uz)=0 ARC(CENTER=0,0) ANGLE=(L/R*180/Pi)
value(Ux)=0 value(Uy)=0 value(Uz)=0 LINE TO CLOSE
MONITORS
grid(x+mag*Ux,y+mag*Uy,z+mag*Uz)
report sqrt(lambda)/(2*pi) as "Frecuencia [1/seg]"
PLOTS
grid(x+mag*Ux,y+mag*Uy,z+mag*Uz)
summary
report sqrt(lambda)/(2*pi) as "Frecuencia [1/seg]"
END
```