

TRANSMISIBILIDAD DE LOSAS AISLADAS DE VIBRACIONES Y SOMETIDAS A TRENES DE ONDAS ARMÓNICAS

José E. Stuardi, Marcelo A. Ceballos y Julio C. Massa

*Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba,
Departamento de Estructuras - Casilla de Correo 916 - 5000 Córdoba - Argentina,
jstuardi@gmail.com, <http://www.efn.uncor.edu>*

Palabras clave: losas flotantes, aislamiento de base, aislamiento de vibraciones.

Resumen. La instalación de equipos sensibles a las vibraciones en plantas industriales requiere a menudo del diseño de un sistema de aislamiento de la inmisión, que permita cumplir con las especificaciones de los fabricantes en cuanto al nivel de vibraciones máximo tolerado. Los diseños cubren una amplia gama que va desde los bloques inerciales rígidos, apoyados sobre medios elásticos, a las losas flotantes que abarcan superficies de gran tamaño. Cuando la cantidad de equipos a aislar es grande se opta generalmente por una sala provista de un piso sobre fundación elástica ó losa flotante. A la mayor flexibilidad de layout que provee esta alternativa, se suman las ventajas técnicas de construir una losa de grandes dimensiones y masa, lo que beneficia la estabilidad del sistema. El medio elástico consiste generalmente en una manta continua de elastómero o bloques discretos de menor tamaño, contruidos del mismo material, o mediante resortes y amortiguadores viscosos.

Con frecuencia son utilizados modelos simplificados de un grado de libertad para el diseño de losas flexibles y algunas conclusiones son extrapoladas desde estos modelos en cuanto a la eficiencia del aislamiento y la transmisibilidad fundación-losa. Como consecuencia se desprecia la influencia de la flexibilidad flexional de las losas y la contribución a la respuesta de los modos flexionales. La excitación de base rígida es, por otro lado, una simplificación frente a la excitación real consistente en trenes de ondas propagadas por la superficie de base donde apoyan los aisladores. Estas hipótesis resultan algo groseras en casos reales de cierta envergadura.

En el presente trabajo se investiga la respuesta dinámica de losas aisladas de vibraciones montadas sobre fundaciones viscoelásticas y excitadas desde la base por ondas superficiales propagadas en el semiespacio homogéneo de suelo, teniendo además en cuenta la flexibilidad flexional de las losas. Asumiendo que las fuentes perturbadoras se encuentran a una distancia relativamente grande se considera como excitación a ondas viajeras superficiales con un frente de onda plano. La efectividad del aislamiento se cuantifica a partir de la respuesta dinámica máxima de la losa calculada en el dominio de la frecuencia para una excitación con ancho de banda dentro del rango de interés de los equipamientos comerciales típicos.

En primera instancia, se estudia un tren de ondas que se propaga en una dirección coincidente con un lateral de losa –supuesta rectangular–, por lo que el modelo puede reducirse a una viga sobre fundación elástica con desplazamiento impuesto desde la base. En esta etapa, se identifican los parámetros generales que gobiernan la respuesta del sistema y se analiza su influencia sobre la transmisibilidad. A continuación se considera un ángulo genérico de incidencia del frente de onda y se estudia el acoplamiento de los modos flexionales de la losa en ambas direcciones. Se discute además la influencia de algunas singularidades geométricas en la topografía del terreno de apoyo de la losa. Datos experimentales, provenientes de mediciones llevadas a cabo sobre la losa flotante de la sala de metrología de una planta automotriz, permiten comparar las predicciones de la respuesta de los modelos utilizados y validar las hipótesis utilizadas. Finalmente, y como conclusiones del trabajo se destacan recomendaciones de diseño que surgen del análisis realizado.

1 INTRODUCCIÓN

La transmisibilidad de vibraciones a un sistema dinámico desde la base es a menudo descrita en función de la frecuencia de excitación y utilizando como parámetro a la relación de amortiguamiento del sistema aislado. Este modelo de oscilador simple resulta aplicable en masas suspendidas, constituidas por máquinas, equipamientos y fundaciones, que en sí mismas pueden asumirse como rígidas dentro del rango de frecuencias de interés del sistema de aislamiento. Las losas protegidas mediante aislamiento de base, que son utilizadas para el montaje de equipos sensibles, constituyen sin embargo un tipo de estructura que requiere de consideraciones más detalladas.

Los modos flexionales pueden adquirir una influencia notable en la transmisibilidad vertical de la losa, si la fuente excitatriz posee contenidos de frecuencias próximas a las frecuencias propias del sistema y producir resonancias capaces de degradar la efectividad del sistema de aislamiento. Los efectos de las resonancias de losas flotantes utilizadas en el aislamiento de vibraciones generadas por vibraciones inducidas por trenes han sido estudiados a partir del comienzo de su construcción, en la década del 70.

En trabajos posteriores, como el de [Saurenmann et al. \(1982\)](#) se estableció que los efectos debidos a la flexibilidad de las losas impiden reducciones mayores a 20dB. [Lombaert et al. \(2000, 2006\)](#) estudia la efectividad de sistemas de losas flotantes diseñadas para el control de vibraciones inducidas por trenes, estableciendo que la vibración en el campo libre es altamente dependiente de las propiedades la losa y del suelo. [Kawaharazuka et al. \(1996\)](#) realiza mediciones de vibraciones en modelos de losas flotantes en escala real notando la degradación de la eficiencia por los modos flexionales y [Cox et al. \(2006\)](#) estudia las vibraciones medidas en un modelo, llegando a similares conclusiones respecto de los picos en la respuesta obtenidos. [Hui y Ng. \(2009a, 2009b\)](#) estudian la eficiencia de pisos y salas flotantes para controlar la transmisión de vibraciones y ruido estructural, reportando mejoras en la transmisibilidad mediante la incorporación de rigidizadores que aumentan las frecuencias propias flexionales y por el posicionamiento de los aisladores en los nodos de los primeros modos.

Si bien esos antecedentes se refieren en general al aislamiento de la emisión generada por trenes, en donde existen condicionamientos derivados de la dinámica de losa, deflexión, fatiga de rieles, estabilidad, etc., que no existen en el caso tratado, comparten la misma problemática referente a la transmisibilidad. Un aspecto original del presente trabajo, consiste en la consideración de trenes de ondas armónicas propagados en el suelo como fuente de excitación: para el estudio de la transmisibilidad se asume que los aisladores se encuentran apoyados sobre un semiespacio homogéneo de suelo caracterizado por una velocidad de propagación de ondas superficiales (ondas de Rayleigh). Se asume además que la fuente excitatriz se encuentra suficientemente alejada del sistema aislado respecto a sus dimensiones, lo que permite adoptar un frente de onda plano y perpendicular a la dirección de propagación, mientras que el decaimiento de amplitudes del movimiento de la superficie del terreno es despreciado. Estas hipótesis permiten reducir el número de parámetros involucrados sin desmejorar las conclusiones obtenidas.

La identificación de los principales parámetros que afectan la transmisibilidad de las losas aisladas sometidas a trenes de ondas armónicas constituye un objetivo primario del presente trabajo. Partiendo del oscilador simple y considerando sistemas de complejidad creciente se define la influencia de los nuevos parámetros sobre la transmisibilidad. Los sistemas reales presentan además ciertas características constructivas, que influyen al sistema más débilmente. Por esta causa se ha prescindido la inclusión de su análisis, por medio de nuevos parámetros de control del fenómeno. Entre estas características cabe citar el hecho que los aisladores no

apoyan en forma directa sobre el terreno, sino a través de fundaciones individuales o eventualmente por medio de una losa de base, que posee normalmente una débil interacción suelo-estructura.

Por otro lado, la necesidad de una batea de fundación excavada para alojar al sistema de aislamiento, y a su vez mantener el nivel de superficie idéntico al del suelo, genera discontinuidades en el perfil del terreno. Durante el estudio de transmisibilidad se asumen además aisladores uniformemente distribuidos, sin embargo, el espaciamiento eventualmente variable de los aisladores puede modificar la forma “digitalizada” de la señal de excitación por parte de la losa.

La influencia de las hipótesis adoptadas se discuten en la etapa de calibración del modelo de un caso real, en donde se reconoce la importancia de respetar consideraciones generales de diseño basadas en parámetros de mayor relevancia, también atento a que algunas variables de ajuste pueden verse modificadas con el paso del tiempo y en casos son de difícil determinación.

2 TRANSMISIBILIDAD DE UN OSCILADOR SIMPLE

El movimiento de un oscilador simple con base vibratoria que se muestra en la [Figura 1](#) se describe mediante la siguiente ecuación diferencial

$$Ku + C \frac{du}{dt} + M \frac{d^2u}{dt^2} = Kv + C \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

donde K , C y M representan la rigidez, el coeficiente de amortiguamiento viscoso y la masa del sistema respectivamente, mientras que $u(t)$ es desplazamiento de la masa y $v(t)$ es el desplazamiento impuesto en la base.

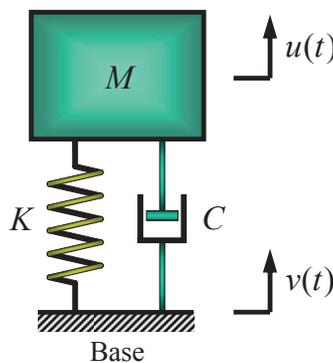


Figura 1. Oscilador simple con movimiento impuesto en la base.

La ecuación de movimiento en función de los parámetros modales resulta

$$\omega_n^2 u + 2\xi \omega_n \frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2} = \omega_n^2 v + 2\xi \omega_n \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \xi = \frac{C}{2\omega_n M} \quad (3)$$

son respectivamente la frecuencia natural y relación de amortiguamiento. La Ec. (2) expresada en términos del tiempo adimensional $\tau = \omega_n t$ resulta

$$u + 2\xi \frac{du}{d\tau} + \frac{d^2u}{d\tau^2} = v + 2\xi \frac{dv}{d\tau} \tag{4}$$

Una forma conveniente de obtener la transmisibilidad es considerando una variación armónica tanto del movimiento de la base como de la respuesta de la masa

$$\left. \begin{aligned} v &= v_{\max} e^{i\omega t} = v_{\max} e^{i\Omega\tau} \\ u &= u_{\max} e^{i\omega t} = u_{\max} e^{i\Omega\tau} \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

donde $\Omega = \omega/\omega_n$ representa la frecuencia excitatriz adimensional. Reemplazando (5) en (4) y eliminando la variación temporal se obtiene

$$(1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2)u_{\max} = (1 + 2i\xi\Omega)v_{\max} \tag{6}$$

de donde se obtiene la función de transferencia entre la respuesta de la masa y el movimiento impuesto en la base, que resulta compleja

$$H(\Omega) = \frac{u_{\max}}{v_{\max}} = \frac{1 + 2i\xi\Omega}{1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2} \tag{7}$$

La transmisibilidad queda definida como el módulo de la función de transferencia $H(\Omega)$:

$$TR = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\Omega)^2}}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \tag{8}$$

La Figura 2 muestra curvas de nivel que representan la transmisibilidad en función de la relación de frecuencias y la relación de amortiguamiento viscoso. La transmisibilidad toma un valor unitario independientemente de la relación de amortiguamiento para $\Omega = \sqrt{2}$.

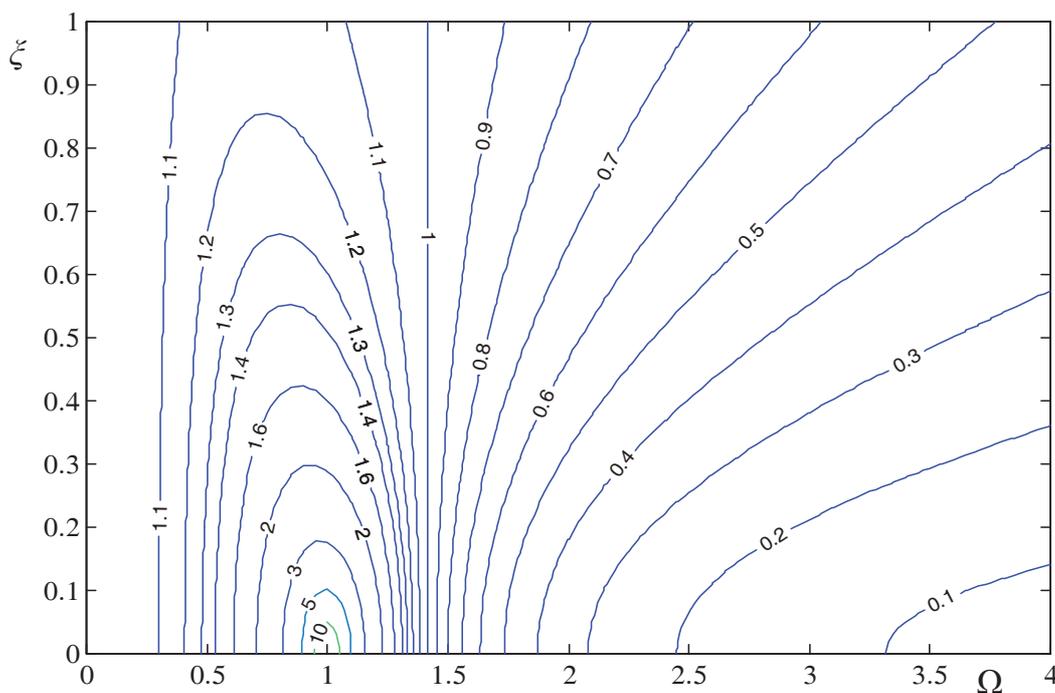


Figura 2. Transmisibilidad de un oscilador simple.

3 TRANSMISIBILIDAD DE VIGAS SOBRE FUNDACIONES ELÁSTICAS

Debido a la complejidad del análisis, el estudio de las losas requiere un tratamiento numérico, del que no surge en forma explícita la relación entre los parámetros que influyen sobre la transmisibilidad. El análisis de vigas, en cambio, permite relacionar el caso básico del oscilador simple con losas apoyadas sobre elementos discretos, mostrando el acoplamiento entre la excitación armónica espacial en la base de los aisladores con los modos flexionales de la estructura.

Se considera a continuación como sistema de estudio a una viga apoyada sobre un sistema elástico continuo sometida por su base a ondas armónicas, por lo que cobra importancia la longitud de onda de excitación propagada en la base y su velocidad de propagación sobre la superficie del terreno. En primera instancia se estudia el caso de una viga considerada infinitamente rígida, para obtener la influencia de la longitud de onda independientemente del efecto de la rigidez flexional. El análisis de las vigas flexibles permite incorporar luego la rigidez flexional como parámetro adicional del problema.

3.1 Viga rígida

El estudio de este caso permite identificar el efecto de la longitud de onda propagada sobre el movimiento de translación y rotación de cuerpo rígido de la viga y calcular la transmisibilidad máxima en los puntos extremos de la viga. La Figura 3 muestra una viga infinitamente rígida de longitud L y masa por unidad de longitud m , apoyada sobre aisladores con rigidez k y amortiguamiento c por unidad de longitud y uniformemente distribuidos, con excitación impuesta en la base. La relación entre la longitud de onda λ , el número de onda k , la frecuencia excitatriz de una carga armónica ω , y la velocidad de propagación de ondas superficiales V_R es la siguiente

$$\lambda = \frac{2\pi V_R}{\omega} \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{V_R} \quad (9)$$

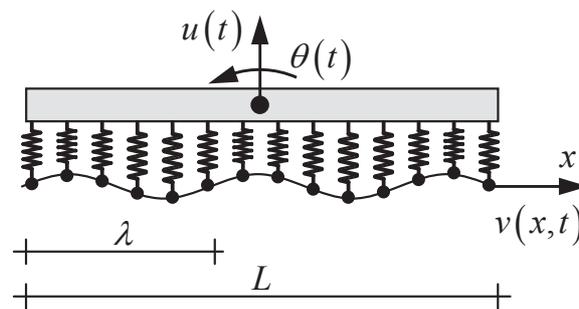


Figura 3. Viga rígida apoyada sobre aisladores uniformemente distribuidos.

El movimiento de la viga rígida puede describirse en función del desplazamiento y el giro del centro de la viga, asumidos con variación armónica

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= u_{\max} e^{i\omega t} \\ \theta(t) &= \theta_{\max} e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad v(x,t) = e^{i\omega(t-x/V_R)} \quad (10)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen en base al equilibrio de fuerzas y de momentos respecto al centro de gravedad de la viga rígida

$$\int_{-L/2}^{L/2} k(u(t) + \theta(t)x - v(x,t)) dx + \int_{-L/2}^{L/2} c(\dot{u}(t) + \dot{\theta}(t)x - \dot{v}(x,t)) dx + mL\ddot{u}(t) = 0 \quad (11)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} k(u(t) + \theta(t)x - v(x,t)) x dx + \int_{-L/2}^{L/2} c(\dot{u}(t) + \dot{\theta}(t)x - \dot{v}(x,t)) x dx + \frac{mL^3}{12} \ddot{\theta}(t) = 0 \quad (12)$$

donde (·) indica derivada respecto al tiempo. El desarrollo de la Ec. (11) considerando las expresiones (10) produce

$$(k + i\omega c)u_{\max} e^{i\omega t} L - \omega^2 mLu_{\max} e^{i\omega t} = (k + i\omega c)e^{i\omega t} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-i\omega x/V_R} dx \quad (13)$$

Esta ecuación de movimiento resulta sólo función del desplazamiento de cuerpo rígido. Dividiendo por $Le^{i\omega t}$ se obtiene

$$(k + i\omega c - \omega^2 m)u_{\max} = (k + i\omega c) \frac{\sin(\omega L/2V_R)}{(\omega L/2V_R)} \quad (14)$$

donde el desplazamiento máximo resulta

$$u_{\max} = \frac{(k + i\omega c)}{(k + i\omega c - \omega^2 m)} \frac{\sin(\omega L/2V_R)}{(\omega L/2V_R)} \quad (15)$$

La definición de los siguientes parámetros modales de la viga rígida

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi = \frac{c}{2\omega_n m} \quad (16)$$

permite expresar el desplazamiento máximo como

$$u_{\max} = \frac{(1 + 2i\xi\Omega)}{(1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2)} \frac{\sin(\kappa\Omega/2)}{(\kappa\Omega/2)} \quad (17)$$

donde el parámetro adimensional

$$\kappa = \frac{\omega_n L}{V_R} = \frac{k L}{\Omega} \quad (18)$$

puede interpretarse como la cantidad de radianes de onda propagada en la longitud de la viga, para una frecuencia excitatriz que coincide con la frecuencia natural del aislamiento. El desarrollo de la Ec. (12) considerando las expresiones (10) produce

$$(k + i\omega c)\theta_{\max} e^{i\omega t} \frac{L^3}{12} - \omega^2 \frac{mL^3}{12} \theta_{\max} e^{i\omega t} = (k + i\omega c)e^{i\omega t} \int_{-L/2}^{L/2} x e^{-i\omega x/V_R} dx \quad (19)$$

Esta ecuación de movimiento resulta sólo función del giro de cuerpo rígido. Dividiendo por $L^3/12 \cdot e^{i\omega t}$ se obtiene

$$(k + i\omega c - \omega^2 m)\theta_{\max} = \frac{(k + i\omega c)}{L^3/12} \left(i \frac{\cos(\omega L/2V_R)}{(\omega/LV_R)} - 2i \frac{\sin(\omega L/2V_R)}{(\omega/V_R)^2} \right) \quad (20)$$

donde el giro máximo resulta

$$\begin{aligned} \theta_{\max} &= \frac{(k + i\omega c)}{(k + i\omega c - \omega^2 m)} \frac{6i}{L(\omega L/2V_R)} \left(\cos(\omega L/2V_R) - \frac{\sin(\omega L/2V_R)}{(\omega L/2V_R)} \right) \\ &= \frac{(1 + 2i\xi\Omega)}{(1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2)} \frac{6i}{L(\kappa\Omega/2)} \left(\cos(\kappa\Omega/2) - \frac{\sin(\kappa\Omega/2)}{(\kappa\Omega/2)} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Ya que la rigidez dinámica de las Ecs. (14) y (20) coinciden, lo hacen también los parámetros

modales definidos en la Ec. (16), que son también válidos para el problema rotacional. Por otro lado, el desplazamiento máximo en la Ec. (15) es un valor real mientras que el giro máximo en la Ec. (21) es un valor imaginario, implicando que ambos presentan un desfase de 90° entre sí. La transmisibilidad máxima se calcula como el módulo de la relación entre el desplazamiento máximo del extremo de la viga y el desplazamiento máximo de la base

$$TR_{\max} = \left| u_{\max} \pm \frac{L}{2} \theta_{\max} \right| = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\Omega)^2}}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \Gamma(\kappa\Omega) \quad (22)$$

donde

$$\Gamma(\kappa\Omega) = \sqrt{\frac{\sin(\kappa\Omega/2)^2}{(\kappa\Omega/2)^2} + 9 \left(\frac{\cos(\kappa\Omega/2)}{(\kappa\Omega/2)} - \frac{\sin(\kappa\Omega/2)}{(\kappa\Omega/2)^2} \right)^2} \quad (23)$$

La comparación entre las Ecs. (22) y (8) muestra que la transmisibilidad máxima de la viga rígida es igual a la transmisibilidad del oscilador simple multiplicada por un *factor de transmisibilidad de viga rígida* $\Gamma(\kappa\Omega)$. De acuerdo con la Ec. (18) es $\kappa\Omega = kL$ por lo que el mencionado factor de transmisibilidad es función de la cantidad de radianes de onda propagada que caben a lo largo de la viga.

Valores pequeños del parámetro κ (número de onda pequeño, velocidad de propagación relativamente grande ó longitud de la viga L pequeña en relación a la longitud de la onda propagada λ), generan factores $\Gamma(\kappa\Omega)$ cercanos a la unidad y la transmisibilidad coincide con la de un sistema de 1 GL. La Figura 4 es una gráfica de la variación del factor de transmisibilidad $\Gamma(\kappa\Omega)$, que pasa por un máximo de 1.39 para $\kappa\Omega = 1.17\pi$. En virtud de este factor, la transmisibilidad final se reduce a menos de la mitad con respecto al oscilador simple, si se consideran valores $\kappa\Omega \geq 2.24\pi$.

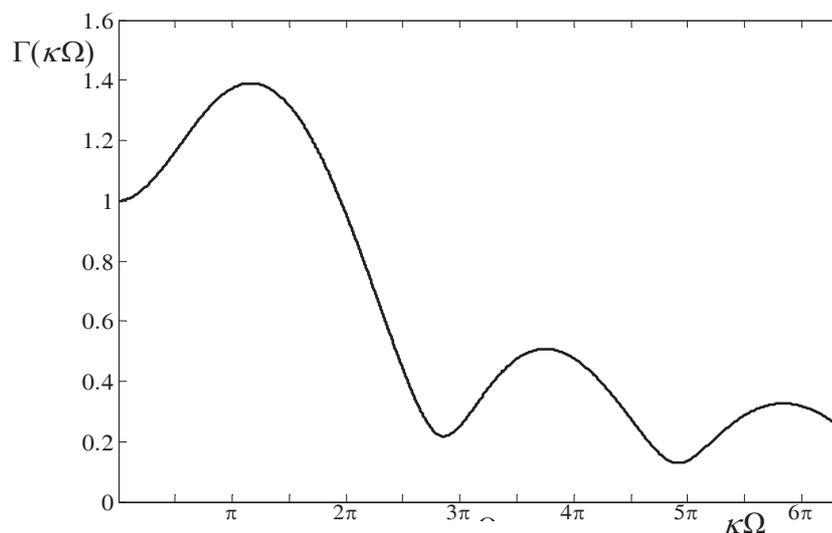


Figura 4. Factor de transmisibilidad de viga rígida.

La Figura 5 muestra los valores de transmisibilidad máxima de una viga rígida en función de la relación de frecuencias Ω y el parámetro κ para amortiguamientos de $\xi = 0.05$ (izquierda) y $\xi = 0.25$ (derecha). Se grafican además en esta figura las hipérbolas correspondientes a los tres primeros máximos de la curva de $\Gamma(\kappa\Omega)$.

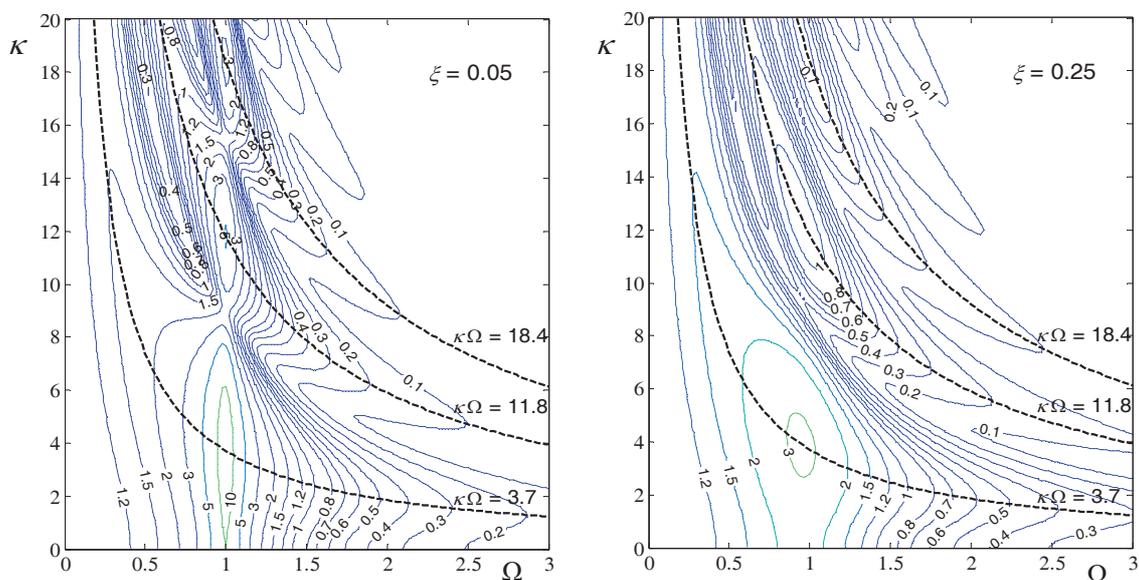


Figura 5. Transmisibilidad máxima de una viga rígida.

3.2 Viga flexible

La ecuación diferencial de una viga flexible (Clough y Penzien, 1993), considerada con amortiguamiento del tipo histerético, sobre una fundación flexible con amortiguamiento viscoso y excitada por su base resulta

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x,t) + EI\eta \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \dot{u}(x,t) \right) \left| \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x,t) \right| + ku(x,t) + c\dot{u}(x,t) + m\ddot{u}(x,t) = kv(x,t) + c\dot{v}(x,t) \quad (24)$$

donde EI es la rigidez flexional y η representa el factor de pérdida del material de la viga. Los distintos modelos de amortiguamiento utilizados responden a las características de los distintos medios que proveen disipación. Basado en la existencia de una solución del tipo sincrónica, el movimiento transversal de la viga se expresa en forma separada como el producto de dos funciones: una que responde a la variación temporal y la otra a la variación espacial, manteniéndose la misma hipótesis para el movimiento impuesto en la base de los aisladores, esto es

$$u(x,t) = y(x) f(t) \quad v(x,t) = z(x) f(t) \quad (25)$$

Análisis en el dominio de la frecuencia

Sea

$$f(t) = e^{i\omega t} \quad (26)$$

$$z(x) = e^{-i\omega x/V_R} \quad (27)$$

Considerando la Ec. (26) se puede expresar que, en el segundo término de la Ec. (24) el

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \dot{u}(x,t) \right) = \frac{\frac{\partial^4}{\partial x^4} \dot{u}(x,t)}{\left| \frac{\partial^4}{\partial x^4} \dot{u}(x,t) \right|} = \frac{i \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x,t)}{\left| \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x,t) \right|} \quad (28)$$

Reemplazando las Ecs. (25), (26), (27) y (28) en la (24) y eliminando la variable temporal

se arriba a lo siguiente

$$EI(1+i\eta)\frac{\partial^4}{\partial x^4}y(x)+(k+i\omega c-\omega^2m)y(x)=(k+i\omega c)e^{-i\omega x/V_R} \quad (29)$$

Una forma adimensional de la ecuación diferencial (29) resulta

$$\alpha^4(1+i\eta)\frac{\partial^4}{\partial v^4}y(v)+(1+2i\xi\Omega-\Omega^2)y(v)=(1+2i\xi\Omega)e^{-i\kappa\Omega v} \quad (30)$$

donde se utilizan los siguientes parámetros adimensionales

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{k/m} & \xi &= c\omega_n/(2k) & \kappa &= \omega_n L/V_R \\ \nu &= x/L & \alpha &= (EI/kL^4)^{1/4} & \Omega &= \omega/\omega_n \end{aligned} \quad (31)$$

Operando se arriba a

$$\frac{\partial^4}{\partial v^4}y(v)-\left(\frac{D}{\alpha}\right)^4 y(v)=\left(\frac{D}{\alpha}\right)^4 He^{-i\kappa\Omega v} \quad (32)$$

donde

$$H=\left(\frac{1+2i\xi\Omega}{\Omega^2-1-2i\xi\Omega}\right) \quad D=\left(\frac{\Omega^2-1-2i\xi\Omega}{1+i\eta}\right)^{1/4} \quad (33)$$

La solución de la ecuación diferencial (32) resulta la suma de la solución particular, representada por el primer término de la Ec. (34), y la solución de la homogénea, que es la suma de los términos restantes, a saber

$$y(v)=\frac{He^{-i\kappa\Omega v}}{\left(\frac{\kappa\Omega}{D/\alpha}\right)^4-1}+C_1\sin\left(\frac{D}{\alpha}v\right)+C_2\cos\left(\frac{D}{\alpha}v\right)+C_3\sinh\left(\frac{D}{\alpha}v\right)+C_4\cosh\left(\frac{D}{\alpha}v\right) \quad (34)$$

En consecuencia, $y(v)$ depende de los de parámetros adimensionales $\kappa\Omega$ y D/α . Considerando las condiciones de contorno de bordes libres en ambos extremos se escribe

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial v^2}y(v)\right|_{v=0}=\left.\frac{\partial^2}{\partial v^2}y(v)\right|_{v=1}=\left.\frac{\partial^3}{\partial v^3}y(v)\right|_{v=0}=\left.\frac{\partial^3}{\partial v^3}y(v)\right|_{v=1}=0 \quad (35)$$

Las Ecs. (34) y (35) generan el siguiente el sistema de ecuaciones, del cual se obtienen las constantes indeterminadas C_1 , C_2 , C_3 , y C_4 .

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -\sin(D/\alpha) & -\cos(D/\alpha) & \sinh(D/\alpha) & \cosh(D/\alpha) \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos(D/\alpha) & \sin(D/\alpha) & \cosh(D/\alpha) & \sinh(D/\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \frac{\left(\frac{\kappa\Omega}{D/\alpha}\right)^2 H}{\left(\frac{\kappa\Omega}{D/\alpha}\right)^4-1} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\kappa\Omega} \\ -i\kappa\Omega(D/\alpha)^{-1} \\ -i\kappa\Omega(D/\alpha)^{-1}e^{-i\kappa\Omega} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Superposición modal

Se obtiene a continuación la solución de la ecuación diferencial de la viga sobre fundación elástica utilizando superposición modal, lo que permite un análisis más provechoso de la respuesta de la viga y la identificación de los factores que componen la función de transmisibilidad. En primer lugar, considerando $\eta=0$ y $c=0$ en la homogénea de la Ec. (24), dividiendo por m y reemplazando la solución sincrónica de la Ec. (25) se obtiene,

$$\left[\frac{EI}{m} \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x) + \frac{k}{m} y(x) \right] f(t) + \ddot{f}(t) y(x) = 0 \quad (37)$$

Utilizando ahora los parámetros adimensionales de la Ec. (31) se escribe la Ec. (37) como

$$\left[\alpha^4 \omega_n^2 \frac{\partial^4}{\partial \nu^4} y(\nu) + \omega_n^2 y(\nu) \right] f(t) + \ddot{f}(t) y(\nu) = 0 \quad (38)$$

Ordenando los términos que dependen del tiempo y del espacio por separado, es

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = - \left[\alpha^4 \omega_n^2 \frac{\partial^4}{\partial \nu^4} y(\nu) + \omega_n^2 y(\nu) \right] \frac{1}{y(\nu)} \quad (39)$$

ya que el lado izquierdo de la ecuación anterior depende sólo del tiempo, mientras que el derecho sólo del espacio, cada término debe ser igual a una constante, de manera que se pueden escribir dos problemas de valores propios independientes, a saber

$$- \left[\alpha^4 \omega_n^2 \frac{\partial^4}{\partial \nu^4} y(\nu) + \omega_n^2 y(\nu) \right] = \lambda y(\nu) \quad (40)$$

$$\ddot{f}(t) = \lambda f(t) \quad (41)$$

Reemplazando la Ec. (41) en la (38) se obtiene

$$\alpha^4 \omega_n^2 \frac{\partial^4}{\partial \nu^4} y(\nu) + \omega_n^2 y(\nu) = \tilde{\omega}_n^2 y(\nu) \quad (42)$$

$$\lambda = - \tilde{\omega}_n^2 \quad (43)$$

donde $\tilde{\omega}_n$ representa las frecuencias propias circulares de la viga sobre fundación elástica. Reacomodando términos se puede definir al problema de valores propios flexional de la viga sin fundación elástica, esto es, libre-libre como

$$\alpha^4 \omega_n^2 \frac{\partial^4}{\partial \nu^4} y(\nu) = (\tilde{\omega}_n - \omega_n^2) y(\nu) = \bar{\omega}_n^2 y(\nu) \quad (44)$$

donde $\bar{\omega}_n$ hace referencia a las frecuencias propias del problema libre-libre.

La Ec. (44) puede reescribirse como

$$\left(\alpha^4 \omega_n^2 \right) \frac{\partial^4}{\partial \nu^4} y(\nu) + \bar{\lambda} y(\nu) = 0 \quad (45)$$

donde los valores propios son (Balachandran y Magrab, 2009)

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda} &= - \bar{\omega}_n^2 \\ \bar{\omega}_n^2 &= (\alpha^4 \omega_n^2) b_n^4 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Los coeficientes b_n^4 pueden calcularse teniendo en cuenta las condiciones de borde de la Ec. (35), y calculando las raíces de la ecuación característica, que resulta

$$\cos(b_n) + \cosh(b_n) - 1 = 0 \quad (47)$$

mientras que los modos pueden escribirse como

$$\phi_n(v) = A_1 \cos(b_n v) + A_2 \sin(b_n v) + A_3 \cosh(b_n v) + A_4 \sinh(b_n v) \quad (48)$$

De la Ec. (44) resulta que los valores propios de la viga con fundación elástica son la suma de los valores correspondientes al problema flexional sin fundación elástica más el correspondiente al sistema de aislamiento

$$\tilde{\omega}_n^2 = \bar{\omega}_n^2 + \omega_n^2 \quad (49)$$

mientras que los modos son los mismos del problema de la Ec. (45).

Finalmente, las frecuencias adimensionales no amortiguadas de los modos flexionales resultan

$$\tilde{\Omega}_n = \tilde{\omega}_n / \omega_n = \sqrt{1 + \alpha^4 b_n^4} \quad (50)$$

A continuación se expande al movimiento transversal de la viga de manera que su variación espacial $y(v)$ quede expresada en función de la superposición de la respuesta Y_j de los modos $\phi_j(v)$ considerados, esto es

$$y(v) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(v) Y_j \quad (51)$$

donde los modos han sido normalizados de acuerdo con

$$\int_0^1 \phi_n^2(v) dv = 1 \quad (52)$$

Reemplazando las Ecs. (45), (46) y (51) en la (30), multiplicando por un modo genérico $\phi_n(v)$, integrando en la longitud de la viga y teniendo en cuenta a las propiedades de ortogonalidad de los modos y la Ec. (52) se arriba a

$$(\alpha^4 b_n^4 (1 + i\eta) + 1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2) Y_n = (1 + 2i\xi\Omega) \int_0^1 \phi_n(v) e^{-i\kappa\Omega v} dv \quad (53)$$

donde la respuesta de los modos resulta

$$Y_n = \frac{(1 + 2i\xi\Omega)}{(\alpha^4 b_n^4 (1 + i\eta) + 1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2)} \int_0^1 \phi_n(v) e^{-i\kappa\Omega v} dv \quad (54)$$

Transmisibilidad modal

Partiendo de la Ec. (25) puesta en función de v , junto con las Ecs. (26) y (51) resulta la transmisibilidad como la suma de las contribuciones modales

$$TR = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(v) Y_j \right| \quad (55)$$

A continuación se analizan las contribuciones de los distintos modos.

Contribución de modos de cuerpo rígido a la transmisibilidad

Los coeficientes b_n y los parámetros de las formas modales ϕ_n , según la Ec. (56), de los modos de cuerpo rígido se presentan en [Tabla 1](#)

$$\phi_n(v) = A + Bv \quad (56)$$

N	b_n	A	B
0 ₁	0	1	0
0 ₂	0	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

Tabla 1. Modos de cuerpo rígido.

Las amplitudes máximas de los modos normalizados de cuerpo rígido 0₁ y 0₂ son 1 y $\sqrt{3}$ respectivamente. Reemplazando los parámetros modales de la [Tabla 1](#) en (54) se arriba a

$$Y_{0_1} = \frac{(1+2i\xi\Omega)}{(1+2i\xi\Omega-\Omega^2)} \frac{i}{\kappa\Omega} (e^{-i\kappa\Omega} - 1) \quad (57)$$

$$Y_{0_2} = \frac{(1+2i\xi\Omega)}{(1+2i\xi\Omega-\Omega^2)} \frac{\sqrt{3}}{\kappa^2\Omega^2} ((i\kappa\Omega-2) + (i\kappa\Omega+2)e^{-i\kappa\Omega}) \quad (58)$$

La contribución de los modos de cuerpo rígido a la transmisibilidad máxima en el extremo de la viga se obtiene como

$$TR_0 = |Y_{0_1} + \sqrt{3}Y_{0_2}| = \frac{\sqrt{1+(2\xi\Omega)^2}}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \sqrt{\frac{\sin(\kappa\Omega/2)^2}{(\kappa\Omega/2)^2} + 9\left(\frac{\cos(\kappa\Omega/2)}{(\kappa\Omega/2)} - \frac{\sin(\kappa\Omega/2)}{(\kappa\Omega/2)^2}\right)^2} \quad (59)$$

La transmisibilidad máxima debida a la contribución de los modos de cuerpo rígido coincide con la calculada en la sección anterior, Ec. (22).

Contribución de modos flexionales a la transmisibilidad

La [Tabla 2](#) muestra los parámetros modales correspondientes a los modos flexionales, aplicables a las Ecs. (48) y (46).

n	b_n	A_1	A_2	A_3	A_4
1	4.73004	1.00000	-0.98250	1.00000	-0.98250
2	7.85320	1.00000	-1.00078	1.00000	-1.00078
3	10.9956	1.00000	-0.99997	1.00000	-0.99997
4	14.1372	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000
5	17.2788	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000
6	20.4204	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000
7	23.5619	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000
8	26.7035	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000

Tabla 2. Modos flexionales.

A continuación se presentan expresiones aproximadas de las frecuencias y formas modales normalizadas de los modos flexionales, las que permiten obtener fórmulas explícitas de la forma de la respuesta Y_n de los modos:

$$\hat{b}_n = \pi(n+1/2) \quad (60)$$

$$\hat{\phi}_n(\nu) = \cos(\hat{b}_n \nu) - \sin(\hat{b}_n \nu) + \exp(-\hat{b}_n \nu) - (-1)^n \cdot \exp(-\hat{b}_n(1-\nu)) \quad (61)$$

Mediante el uso de estas aproximaciones se obtiene para el primer modo un error de 0.37% respecto del exacto, mientras que el coeficiente de correlación de Pearson entre el

primer modo exacto y el aproximado difiere en sólo $5.E^{-07}$ de la unidad. Además para los modos de orden superior se consiguen errores que resultan monotonícamente menores.

Reemplazando las Ecs. (60) y (61) en (54) se arriba a

$$\hat{Y}_n = \Gamma_{1n} \Gamma_{2n} \quad (62)$$

$$\Gamma_{1n} = \frac{(1 + 2i\xi\Omega)}{\alpha^4 \pi^4 (n+1/2)^4 (1 + i\eta) + 1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2} \quad (63)$$

$$\Gamma_{2n} = \frac{\left[\begin{array}{l} \pi(n+1/2) \left(1 - (-1)^n e^{-i\kappa\Omega} \right) \left(2(\kappa\Omega)^2 + ((\kappa\Omega)^2 - \pi^2(n+1/2)^2) (-1)^n e^{-\pi(n+1/2)} \right) - \dots \\ i\kappa\Omega \left(1 + (-1)^n e^{-i\kappa\Omega} \right) \left(2(\kappa\Omega)^2 - ((\kappa\Omega)^2 - \pi^2(n+1/2)^2) (-1)^n e^{-\pi(n+1/2)} \right) \end{array} \right]}{(\kappa\Omega)^4 - \pi^4(n+1/2)^4} \quad (64)$$

donde para simplificar la notación se prescinde del símbolo ($\hat{\cdot}$) en Γ_{1n} y Γ_{2n} indicando aproximado.

El *factor de respuesta modal* Γ_{1n} además de ser una función de la frecuencia Ω depende de la rigidez flexional α , el amortiguamiento ξ y el factor de pérdida η y conserva la forma característica típica de la función de transmisibilidad de la Ec.(8). El *factor de respuesta modal* Γ_{2n} en cambio, depende de la integral del lado derecho de la Ec. (54), esto es, del producto interno de la forma modal y la onda excitatriz propagada.

La Figura 6 presenta el módulo del factor de $\Gamma_{2n}(\kappa\Omega)$ para la viga flexible. La curva de cada modo presenta un pico dominante de amplitud aproximada **0.7** y lóbulos posteriores y anteriores de menor amplitud. Sólo para modos de orden suficientemente alto es posible aproximar los máximos en correspondencia con los ceros del denominador de la Ec. (64), esto es

$$\kappa\Omega = \pi(n + 0.5) \quad (65)$$

Además utilizando la Figura 6 se calcula que el ancho de banda de los lóbulos principales, esto es el rango de $\kappa\Omega$ con amplitud igual a -3dB del máximo, es aproximadamente **5**. Este ancho de banda ha sido indicado en el gráfico para $n = 2$, a modo de ejemplo.

Transmisibilidad máxima envolvente modal

Partiendo de la ecuación de transmisibilidad (55) y analizando sólo la respuesta de un modo individualmente, se puede definir una envolvente de la respuesta máxima posible. Para esto se considera el valor local máximo posible de cada modo (valor 2), la Ec. (62) y el valor máximo de Γ_{1n} y Γ_{2n} . El valor máximo de Γ_{1n} se puede aproximar en correspondencia con la frecuencia natural no amortiguada de los modos flexionales según la ecuación

$$\alpha^4 \pi^4 (n+1/2)^4 = \Omega^2 - 1 \quad (66)$$

mientras que el máximo del factor Γ_{2n} según la Figura 6 se aproxima a **0.7**, por lo que resulta

$$TR_{env} = \frac{1.4 \sqrt{1 + 4\xi^2 \Omega^2}}{2\xi\Omega + \eta(\Omega^2 - 1)} \quad (67)$$

En la Figura 7 se grafican curvas $\kappa_n(\Omega)$, $n = 1, 2, 3$, representando la condición de ocurrencia de máximos de Γ_{2n} y curvas $\alpha_n(\Omega)$, $n = 1, 2, 3$, correspondientes a la condición de máximos de Γ_{1n} , según Ec. (66). Entrando al gráfico con el valor de α en la ordenada derecha, se

determinan las frecuencias propias en las intersecciones con las curvas $\alpha_n(\Omega)$, y a partir de estas puede verificarse la posibilidad de ocurrencia de máximos comparando el valor de κ con el de la curva $\kappa_n(\Omega)$ correspondiente.

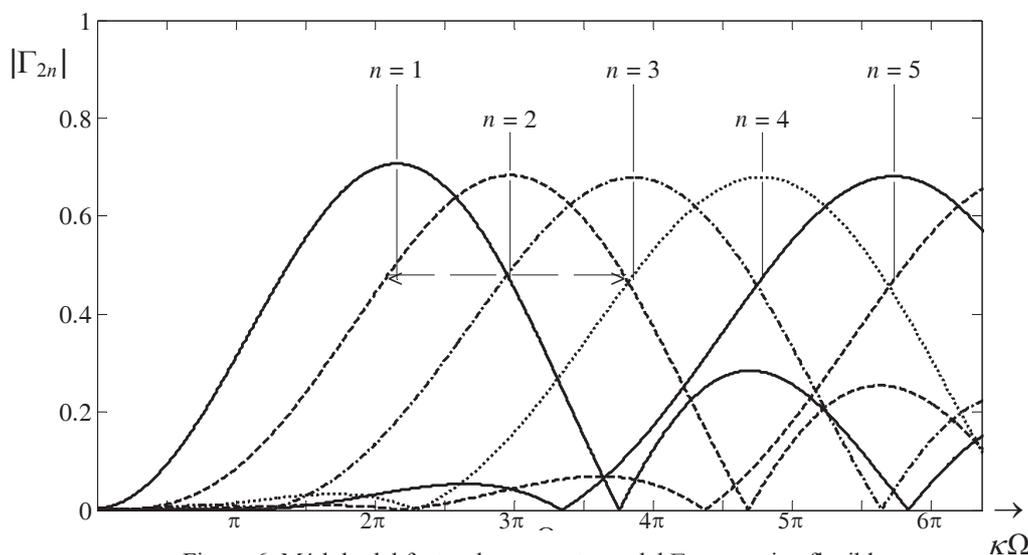


Figura 6. Módulo del factor de respuesta modal Γ_{2n} para viga flexible.

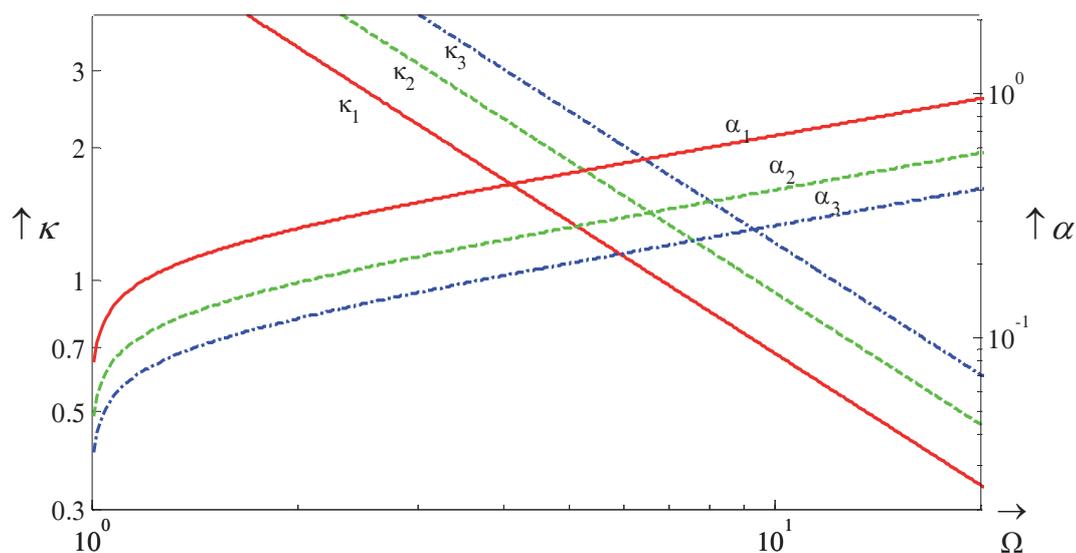


Figura 7. Condición de máximos de Γ_1 y Γ_2

La envolvente aproximada puede interpretarse como la transmisibilidad local máxima obtenible de una viga resonante para todas las frecuencias de excitación, donde además el número de onda propicia la máxima excitación, siendo además causada por un solo modo aislado. Ya que proporciona valores aproximados si se cumplen estas hipótesis, estas son analizadas a continuación. Respecto de la localización del punto de medición de la transmisibilidad es habitual que se pretenda utilizar toda la superficie de la losa y sin distinción de grado de aislamiento, mientras que por otro lado, se admite que existirán picos flexionales en resonancia dentro del rango de frecuencias analizados. De la Figura 6 se tiene que el ancho de banda de cada lóbulo de Γ_{2n} es aproximadamente $\kappa\Omega = 5$, de manera de la sensibilidad del valor de la envolvente a este parámetro es relativamente baja.

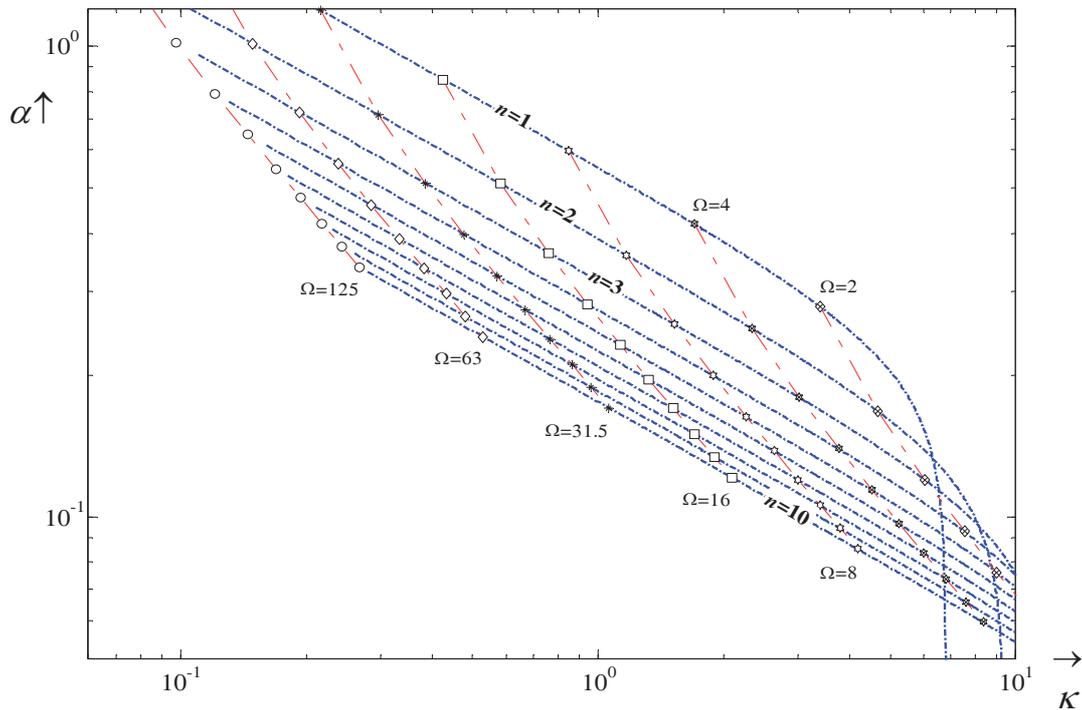


Figura 8. Zonas de resonancias con valores de transmisibilidades TR_{env}

En la Figura 8 se grafican las líneas de ocurrencia de la TR_{env} en coordenadas α - κ para n entre 1 y 10. Además se indica en estas curvas el valor de la frecuencia adimensional Ω para el que ocurre el máximo. Teniendo en cuenta lo expuesto respecto del ancho de banda de Γ_{2n} , los máximos de la envolvente no decaen más del 30% entre la curva n -ésima considerada y las inmediata inferior y superior. La zona definida entre las curvas n_{min} - n_{max} y Ω_{min} - Ω_{max} que corresponda al caso de diseño debe por lo tanto ser en lo posible evitada para evitar los valores de la envolvente.

Finalmente debe tenerse en cuenta que la envolvente se refiere a la contribución a la transmisibilidad de un solo modo, aproximando mejor los casos en donde los modos próximos están desacoplados. En casos reales bidimensionales, en donde es frecuente el acoplamiento modal, esta curva puede llegar a ser superada, véase por ejemplo el análisis numérico en el apartado siguiente.

Ejemplo de Aplicación

Se estudia la transmisibilidad de una viga calculada a partir de la Ec. (34) con los siguientes parámetros

$$\alpha = 0.247 \quad \eta = 0.05 \quad \xi = 0.08 \tag{68}$$

lo que corresponde a la reducción a la dirección longitudinal (largo) de la losa del caso real presentado más adelante. En la Figura 9 se muestra la transmisibilidad máxima obtenible a lo largo de la viga bajo la forma de curvas de nivel de un gráfico κ - Ω . Se observan máximos locales en el plano (lóbulos donde la transmisibilidad pasa por un máximo), aunque la tendencia general es una reducción de la transmisibilidad con el aumento de κ y Ω . Las frecuencias no amortiguadas de los modos flexionales libres-libres resultan

$$\bar{\Omega}_1 = 1.365 \quad \bar{\Omega}_2 = 3.762 \quad \bar{\Omega}_3 = 7.376 \quad \bar{\Omega}_4 = 12.19 \tag{69}$$

mientras que las frecuencias no amortiguadas de los modos flexionales sobre fundación

elástica se obtienen según (50) como

$$\tilde{\Omega}_1 = 1.692 \quad \tilde{\Omega}_2 = 3.893 \quad \tilde{\Omega}_3 = 7.444 \quad \tilde{\Omega}_4 = 12.23 \quad (70)$$

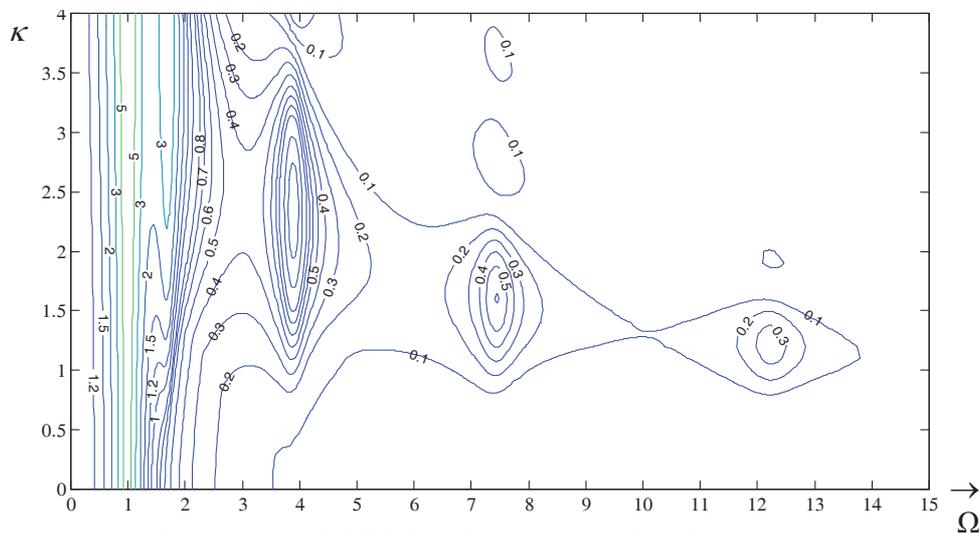


Figura 9. Transmisibilidad máxima de una viga flexible ($\alpha = 0.247$).

De igual forma en la Figura 10 se muestra la transmisibilidad máxima de una viga idéntica pero con $\alpha = 0.342$, lo que corresponde a la dirección transversal (ancho) de la losa antes mencionada. Las frecuencias no amortiguadas de los modos flexionales sobre fundación elástica resultan

$$\tilde{\Omega}_1 = 2.797 \quad \tilde{\Omega}_2 = 7.269 \quad \tilde{\Omega}_3 = 14.15 \quad \tilde{\Omega}_4 = 23.35 \quad (71)$$

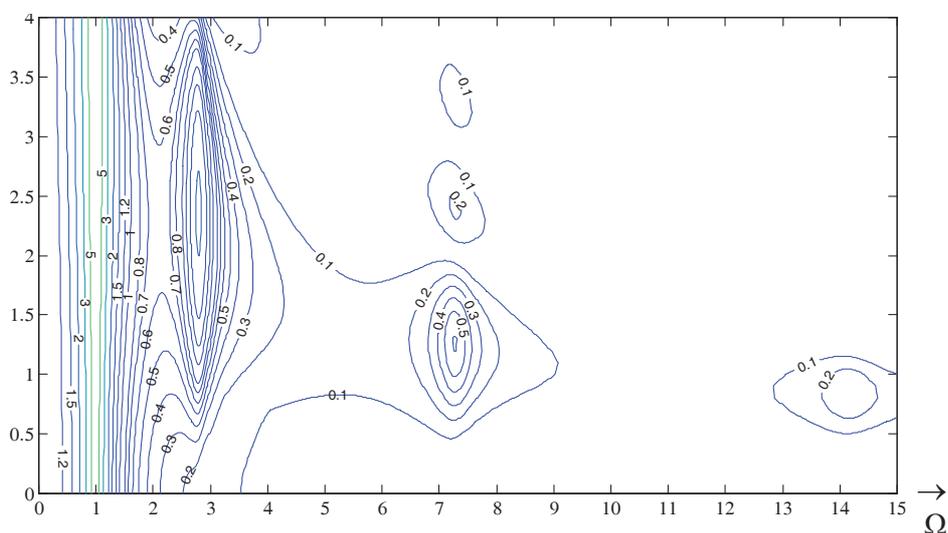


Figura 10. Transmisibilidad máxima de una viga flexible ($\alpha = 0.342$).

En la Figura 11 se muestran curvas de transmisibilidad, adoptando $\kappa = 1.322$ y $\alpha = 0.247$, y en forma paramétrica para distintos factores de pérdida $\eta = 0, 0.025$ y 0.05 . Se grafican además las curvas envolventes modales respectivas. El primer pico en $\Omega = 1$ está asociado a los modos del aislamiento, a continuación se observan los picos flexionales según la Ec. (70). Se observa una importante reducción de los picos flexionales debida al incremento del factor de pérdida de la viga.

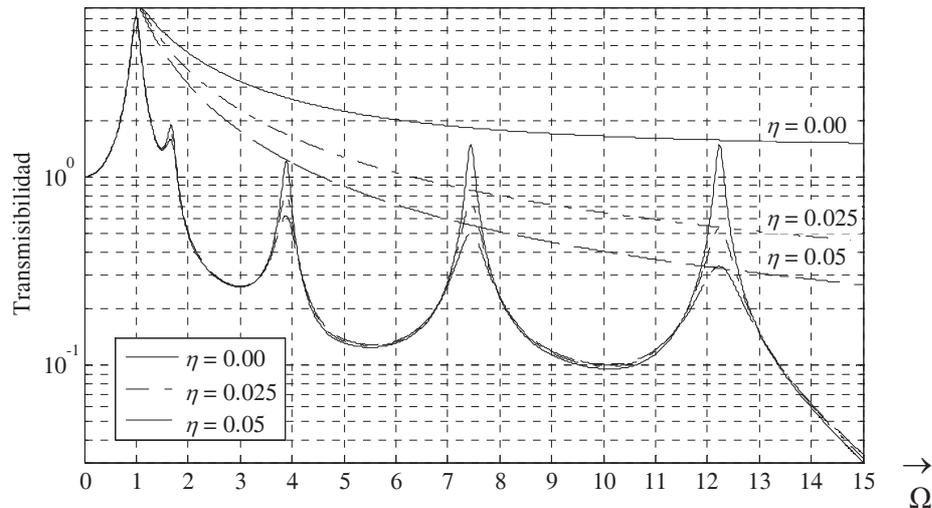


Figura 11. Transmisibilidad típica de una viga flexible.

4 TRANSMISIBILIDAD DE UNA LOSA SOBRE FUNDACION ELASTICA

El estudio de vigas flexibles sobre una fundación elástica continua permite identificar los parámetros más relevantes que gobiernan la transmisibilidad máxima del sistema aislado. Las losas presentan algunas particularidades que no pueden inferirse del modelo de una viga flexible. La aparición de una relativamente grande cantidad de formas modales bidimensionales acopladas en ambas direcciones se traduce en la densa población de picos flexionales con frecuencias próximas, por lo que el nivel general de transmisibilidad puede aumentar considerablemente.

El ángulo de incidencia de las ondas propagadas respecto del eje longitudinal de la losa modifica la participación de los modos transversales y los modos acoplados en la respuesta. El coeficiente de Poisson ν es el responsable del acoplamiento bidimensional, por lo que para un valor nulo de este parámetro los modos flexionales puros coinciden con los de la viga. Valores crecientes de ν aumentan los valores de las frecuencias naturales, mientras que los modos flexionales adquieren características bidimensionales.

En la Figura 12 se muestra una comparación de la transmisibilidad máxima entre la viga correspondiente a la Figura 11 con $\eta = 0.05$, y losas equivalentes con valores del coeficiente de Poisson $\nu = 0$ y $\nu = 0.2$ (valor medio para el hormigón).

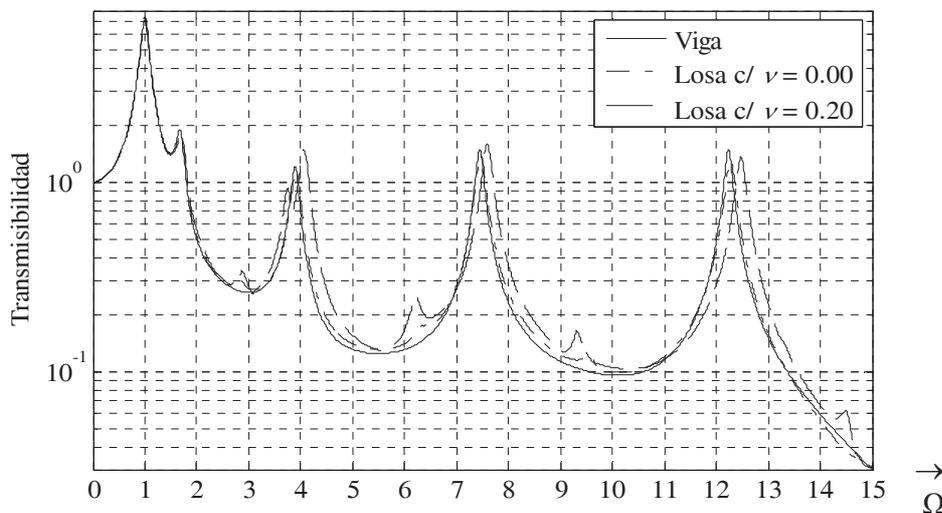


Figura 12. Transmisibilidades máximas de dos losas y una viga equivalente.

Se observa que las curvas de la viga y la losa con $\nu=0$ son prácticamente coincidentes, mientras que la curva de la losa con $\nu=0.2$ presenta los picos flexionales ligeramente desplazados hacia alta frecuencia y alguna participación secundaria de los nuevos modos bidimensionales.

Este incremento de las frecuencias naturales depende naturalmente de la capacidad de confinamiento lateral de la losa, es decir de la relación ancho/largo de la losa. Por lo que para anchos pequeños (losa que tiende a una viga) las frecuencias propias resultan insensibles a ν .

La separación discreta entre aisladores puede además producir un *aliasing* espacial que distorsiona la transmisibilidad para valores crecientes de κ . Siendo l la distancia entre aisladores en una dirección paralela a uno de los bordes de la losa. Las longitudes de onda no afectadas por *aliasing* deben satisfacer la siguiente condición

$$\lambda \geq 2l \quad (72)$$

Reemplazando las Ecs. (9) y (18) en la anterior, se obtiene

$$\kappa \Omega \leq \frac{\pi L}{l} \quad (73)$$

La expresión anterior define una hipérbola en el plano κ - Ω . Para valores mayores que la constante del lado derecho de la Ec. (73) aparece el fenómeno de plegado característico de *aliasing* por el cual la onda propagada en el terreno, discretizada espacialmente mediante un peine de apoyos discretos, es interpretada como ondas con frecuencias de aliasing (menor frecuencia). El efecto negativo del *aliasing* resulta evidente si se considera que las transmisibilidades globalmente disminuyen con Ω y κ , pero se incrementan al reflejarse en las hipérbolas.

La Figura 13 muestra la transmisibilidad máxima de una losa con $\nu=0.2$, relación de ancho/largo 0.723, distancia entre aisladores 1.80 m, ángulo de incidencia de onda nulo y con el resto de sus propiedades idénticas a la viga de la Figura 9, a efectos comparativos. Las figuras difieren sólo en el ligero aumento de los picos flexionales, a la leve contribución de los modos bidimensionales de la losa –téngase aquí en cuenta que los modos transversales no son excitados por una excitación longitudinal– y al efecto de aliasing en la zona superior derecha del gráfico.

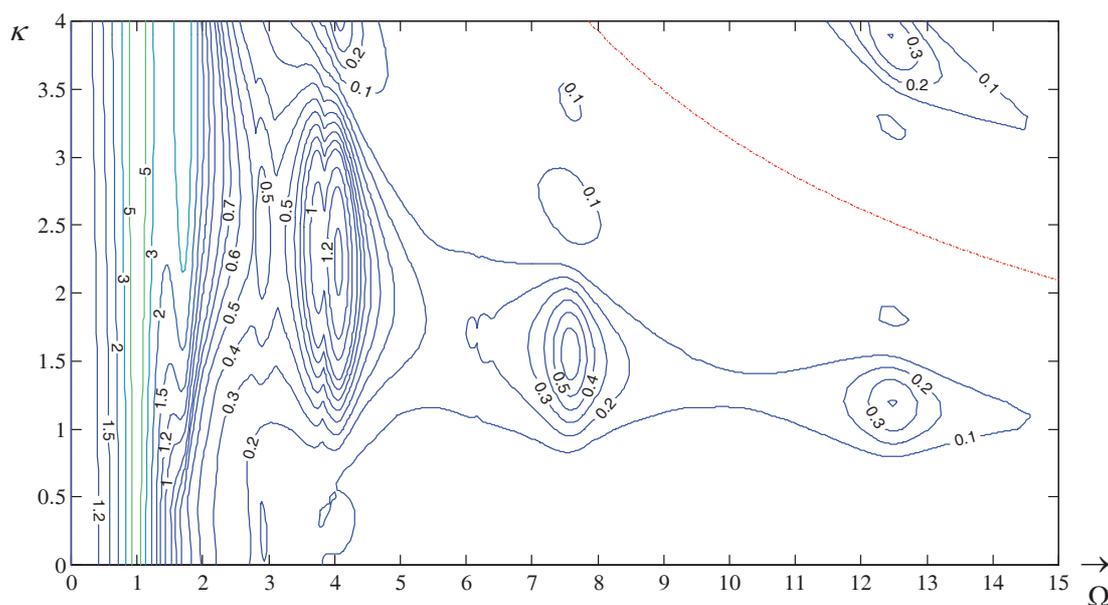


Figura 13. Efecto de aliasing espacial en la transmisibilidad máxima de una losa flexible.

5 RESULTADOS

5.1 Análisis de un caso real

Descripción general

A continuación se resumen los estudios realizados en el piso flotante de la Sala de Metrología de la planta automotriz Volkswagen en Córdoba, Argentina. La losa aislada fue construida en hormigón armado con dimensiones 16.24 x 11.74 m y con un espesor de 0.30 m, por lo que el peso propio resultó aproximadamente 1370 kN.

El sistema de aislamiento está constituido por una matriz de 9 por 7 aisladores embutidos en el seno de la misma losa y uniformemente distribuidos en la superficie con distancias entre aisladores de 1.80 m y 1.68 m respectivamente. Los aisladores están constituidos por un resorte helicoidal de acero y un amortiguador viscoso con una rigidez vertical de 0.92 kN/mm y una constante de amortiguamiento de 7.23 kN s/m, por lo que la frecuencia natural vertical teórica resultante es de 3,23 Hz, con una relación de amortiguamiento de 8 %.

Las mediciones fueron realizadas con acelerómetros inductivos y un analizador de señales de rango útil 0-100 Hz, el intervalo de digitalización de los registros fue de 3.91 ms. La excitación dinámica estaba constituida por dos diferentes fuentes operando simultáneamente, ambas en posiciones variables en distancia y ángulo de incidencia, a saber: dos máquinas compactadoras de suelo a rodillo trabajando a una distancia entre 20 a 40 m desde el centro de la losa y un martillo neumático trabajando en una calle de hormigón a una distancia 15 a 25 m medida en las mismas condiciones. Se tomaron registros en distintos puntos sobre la losa, la que se encontraba en condiciones operativas.

Otras particularidades

Durante el proceso constructivo, los aisladores fueron montados sobre una platea de base continua en hormigón armado de espesor 0.2 m que sirve de fundación. La losa fue construida sobre un perfil de terreno que presenta una discontinuidad de nivel de +0.70 m en un borde longitudinal y transversal contiguos, esto debido a la topografía del terreno. Discontinuidades de similar magnitud son en general habituales, si las losas se construyen con foso de fundación embutido (lo que es además deseable), de manera que el nivel final de la superficie del terreno y losa se mantenga y se genere espacio suficiente para la losa y los aisladores. Estudios realizados con el uso de zanjas para evitar la propagación de vibraciones reportan que estas tienen sólo efecto apreciable en la reducción de amplitudes si la profundidad es del orden de la longitud de onda propagada, (Leung et al, 1990, Shrivastava y Kameswara Rao, 2002) lo que, para el caso analizado, sucede sólo para bajas velocidades de propagación y altas frecuencias de excitación. Finalmente pequeñas discrepancias en el posicionamiento real de los aisladores respecto de una distribución uniforme fueron ignoradas.

Determinación y calibración de parámetros

En el estudio se tomaron como punto de partida los parámetros cuantificables con escaso margen de error y los previamente calibrados, tales como las dimensiones de la losa y rigidez de los aisladores. Mediante medición de desplazamiento estático se verificó la frecuencia propia vertical de diseño. Los amortiguamientos fueron medidos en forma experimental mediante mediciones previas a la transmisibilidad y mediante ensayos de vibración libre. Se determinaron valores de decaimiento que corresponden con una relación de amortiguamiento de 6-8 %. El factor de pérdida del material fue estimado en 2.5% como valor estándar de este tipo de construcciones, considerando que ajustes mayores no son necesarios en este caso. Finalmente la rigidez flexional de la losa fue ajustada en función de las frecuencias propias medidas.

Modelo numérico

Se construye un programa de Elementos Finitos que modela losas rectangulares con mallado automático y mediante elementos de placa en flexión de 3 GL por nudo formulados en forma explícita, Przemieniecki (1985) y que resuelve el problema de transmisión de trenes de ondas a la losa en el dominio de la frecuencia. El piso flotante analizado se modela mediante una malla de 20×14 elementos, lo que permite lograr una exactitud de 0.1% en frecuencias naturales de hasta 50 Hz. El modelo contempla aisladores en cada nodo de la malla, simulando un apoyo continuo y de forma de hacer posible comparaciones con el medio continuo. Se adopta una excitatriz constituida por una onda propagada en el terreno sin decaimiento y con un frente de onda plano.

Los registros de vibraciones considerados son pares entrada-salida del sistema y resultan del promedio de 8 muestras de 4 segundos cada una. A efectos ilustrativos se han seleccionado sólo 3 pares de registros representativos. En la Figura 14 se muestran los espectros de las señales de entrada correspondientes. En todos los casos han sido medidos sobre el suelo a una distancia de 2-3 metros del borde de la losa y en un punto perteneciente a la recta que une la excitatriz con el centro geométrico de la losa. Los contenidos de frecuencias más importantes de la excitatriz resultan en el rango de frecuencias entre 40 a 75 Hz aproximadamente. Las curvas de transmisibilidad experimentales fueron leídas directamente desde el analizador de señales. Este instrumento calcula la transmisibilidad a partir de las funciones de correlación de las aceleraciones, lo que proporciona funciones idénticas a las obtenibles utilizando los desplazamientos, ya que la transmisibilidad resulta independiente del parámetro de medición. Los registros se muestran en forma condicionada y sólo para frecuencias en donde los valores correspondientes de coherencia entre excitación y respuesta son mayores a 0.85, siendo el resto de los puntos ignorados a ex profeso.

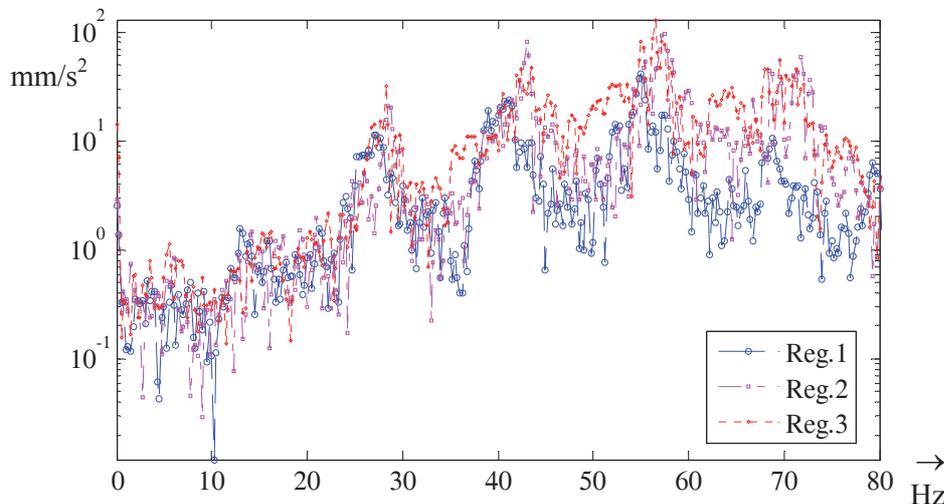


Figura 14. Espectros de aceleraciones medidos sobre el suelo

La comparación entre transmisibilidades experimentales con las calculadas con el modelo en puntos específicos de la losa resulta poco conveniente por varias razones. Entre estas cabe citar a la gran cantidad de parámetros de ajuste del problema, la fuerte variación de la curva de transmisibilidad en puntos relativamente cercanos (debido a la contribución de modos de alta frecuencia), la carencia de datos precisos de posicionamiento y del ángulo de incidencia de los puntos experimentales medidos, y fundamentalmente por carecer de sentido práctico, si se considera como objetivo al diseño. Por este motivo, la Figura 15 presenta una comparación entre registros experimentales de transmisibilidad y envolventes de series de valores

obtenidos utilizando el modelo numérico de la losa; en este caso se muestran las máximas transmisibilidades obtenidas para cualquier nodo y para distintos ángulos de incidencia de la excitación, variables entre 0 y 90° y de a 15° grados (7 casos en total). Los valores medidos de transmisibilidad se encuentran en todas las frecuencias por debajo de la envolvente de máximos que corresponde a factores de pérdida de la losa de 0.025 y en el caso del Registro 3, coincide con la curva envolvente para factor de pérdida 0.05 en la zona de frecuencias mayores a 70 Hz.

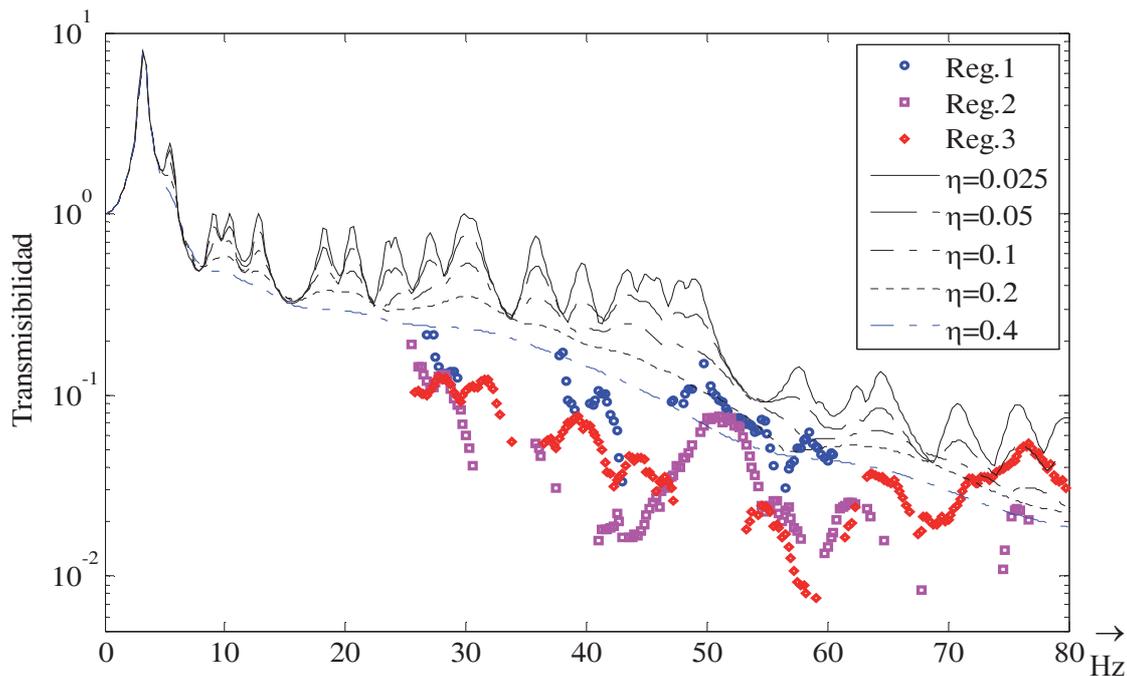


Figura 15. Comparación de transmisibilidades numéricas y experimentales.

Finalmente en la Figura 16 se muestra en forma comparativa las envolventes para distintos factores de pérdida junto con la curva de transmisibilidad del sistema de 1 GLD y la TR_{env} de la viga flexible de la Ec. (67), esta última calculada para factor de pérdida 0.025. Del análisis del gráfico queda demostrado en todos los casos que la curva de 1 GLD puede subestimar en forma grosera las transmisibilidades máximas obtenibles en losas reales, por lo que no puede ser utilizada como referencia. Además la curva de transmisibilidad envolvente modal de viga flexible TR_{env} es alcanzada y hasta superada por las curvas calculadas en forma numérica con factores de pérdida de 0.05 y 0.025 en el rango 25 a 50 Hz.

5.2 Consideraciones sobre el amortiguamiento propio de la losa

La Figura 15 muestra las curvas de transmisibilidad reales esperables en una losa flotante, a partir de los parámetros dimensionales básicos tomados como ejemplo. Admitiendo la imposibilidad del control fino del factor de transmisibilidad Γ_{2n} , esto es, que en un caso genérico son inevitables resonancias flexionales, queda como herramienta de control el amortiguamiento propio de la losa, que afecta al factor de transmisibilidad Γ_{1n} . De las curvas anteriormente citadas se hace obvia la conveniencia del aumento del factor de pérdida intrínseco del hormigón armado, lo que puede lograrse por medio de una técnica de tratamiento superficial.

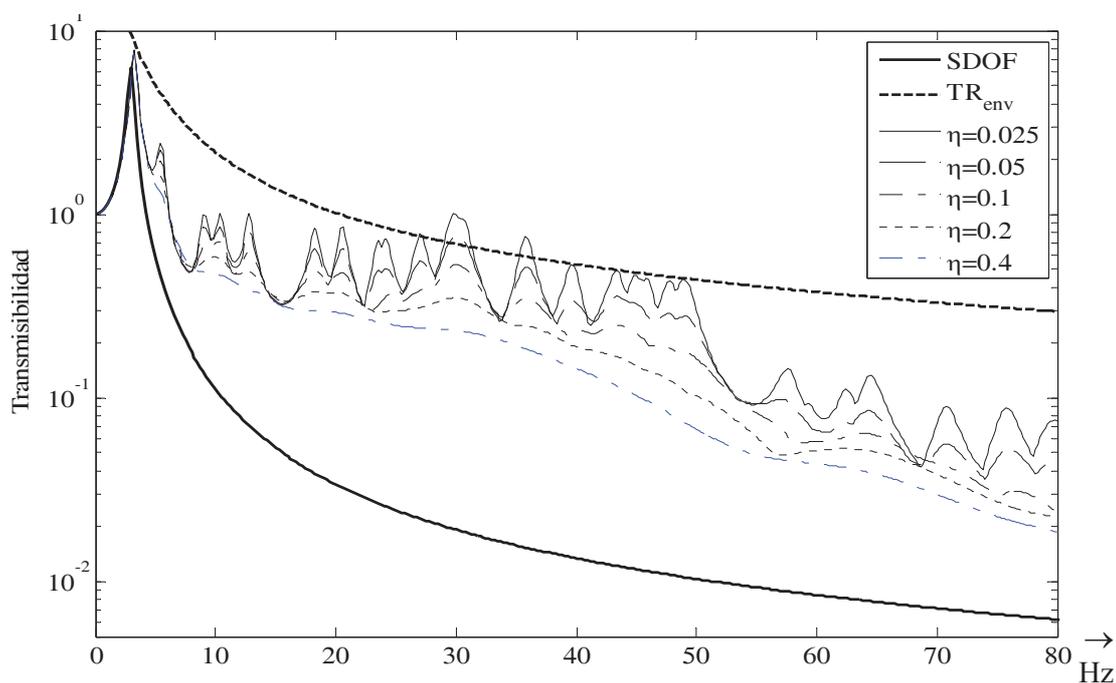


Figura 16. Comparación de transmisibilidades envolventes numéricas, TR_{env} y modelo de 1GLD.

El agregado de una o más capas de material viscoelástico de alta disipación mejora el comportamiento dinámico del conjunto, existiendo una variedad de métodos para considerar el efecto del amortiguamiento en sistemas de placas multicapas. En el presente trabajo se utilizan las ecuaciones de [Ross, Ungar y Kerwin \(1959\)](#), que fueron desarrolladas para un total de 3 capas de material y considera deformaciones tanto flexionales como extensionales. Estas ecuaciones son válidas para vigas apoyadas y vibrando en una frecuencia natural, pero pueden obtenerse valores aproximados de referencia de incremento de factor de amortiguamiento y rigidez para el presente caso de placas sobre fundación elástica. Ya que la capa superior, que sirve de confinamiento del material viscoelástico, resulta de suma importancia para incrementar el amortiguamiento es lógico pensar en términos de un rediseño de la losa más que en un tratamiento superficial, en función de la necesidad del amortiguamiento y el incremento de rigidez flexional lograda.

El diseño optimizado puede resultar algo complicado en función de la cantidad de parámetros intervinientes, sumada a la fuerte dependencia del factor de pérdida con los modos a amortiguar, parametrizados en el número de semiondas del modo n , (Mead, 1999). Para el caso analizado es por ejemplo posible reemplazar el diseño original de losa de 0.30 m de espesor, por una losa sándwich compuesta de una losa base de 0.20 m de espesor, 12 mm de material viscoelástico y una losa superior de tránsito 0.10 m. De esta forma, utilizando el mismo volumen de hormigón, se mantiene aproximadamente la misma rigidez flexional para los primeros modos, pero el factor de pérdida es aumentado de aprox. 0.02 a valores mayores a 0.1 (valores válidos dentro del rango de frecuencias de interés).

Las propiedades del material utilizado en este estudio son las correspondientes al material comercial Sylodamp HD 300, con factor de pérdida 0.6 y módulo de Young E entre 5 y 20 MN/m². En la [Figura 17](#) se muestra el factor de pérdida final (columna izquierda) y la rigidez relativa de la losa sándwich a la rigidez del proyecto original (columna derecha), en función de los espesores de capa viscoelástica y espesor de capa de confinamiento. Se ha utilizado como parámetro el número de semiondas de deformación en la losa, mostrando en la primera

fila de gráficos el caso de una semionda y en la segunda fila cinco semiondas. La elección de una losa base del mismo espesor que la losa de confinamiento hubiese ciertamente mejorado la performance del sistema, sin embargo se ha supuesto en el ejemplo que otros condicionamientos del montaje pueden hacer esto no factible en la práctica.

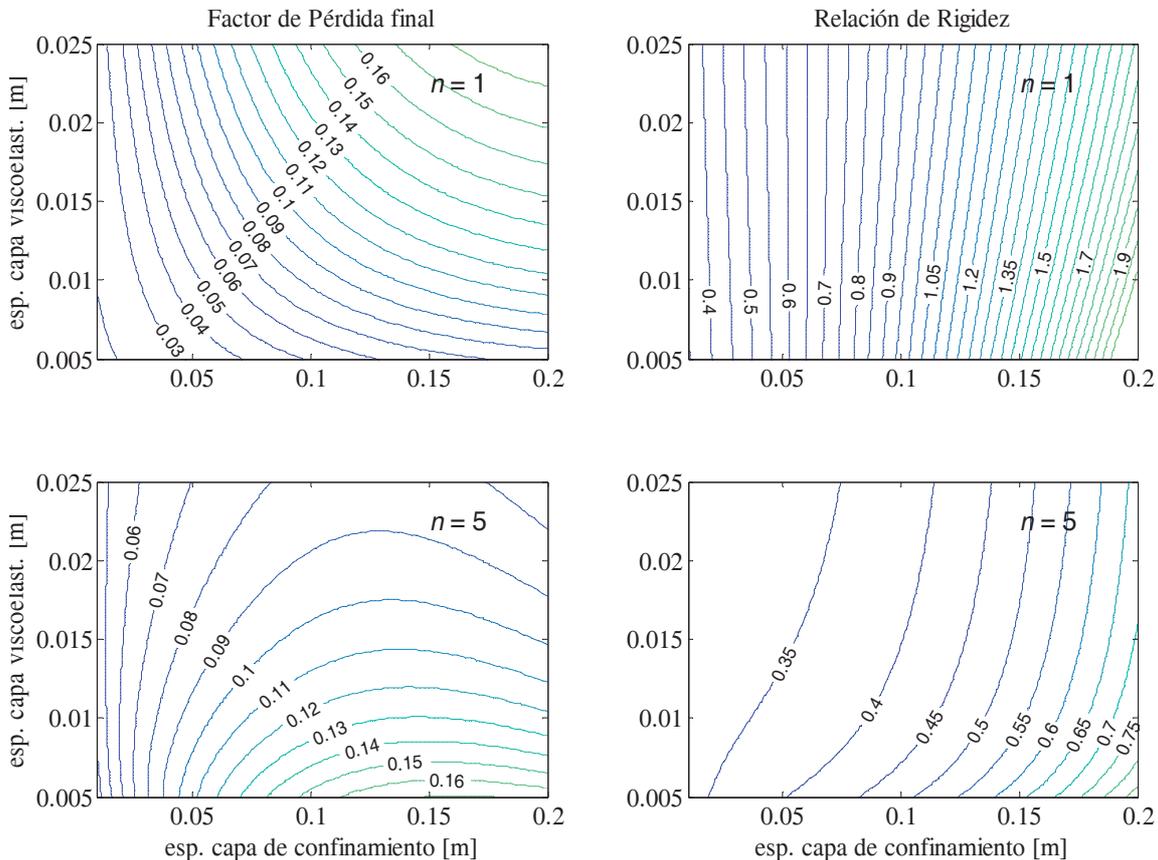


Figura 17. Factor de pérdida final (izq.) y Factor de rigidez comparativa (der.) obtenibles en el tratamiento superficial con capa viscoelástica.

5.3 Consideraciones finales de diseño

En el presente trabajo se analiza la respuesta dinámica vertical de losas consideradas flexibles y aisladas del medio mediante dispositivos viscoelásticos en su base, los que se disponen de forma que el sistema puede aproximarse a un apoyo continuo. Del análisis surgen numerosos parámetros adimensionales que el proyectista debe tener en cuenta para lograr un buen diseño. Se considera en este apartado la cuantificación de los valores prácticos de diseño, teniendo en cuenta la aplicación de interés.

Las dimensiones (largo, ancho) de losas de hormigón armado se establecen entre 5 y 20 m y los espesores entre 0.2 y 0.6 m en función de las dimensiones en planta. Otros parámetros de diseño son: la frecuencia propia vertical, asumidas entre 3 y 7 Hz, velocidades de propagación de ondas en el suelo entre 100 y 300 m/s y frecuencias excitatrices entre 0-50 Hz, que corresponde al rango más sensible del equipamiento, en general. De acuerdo con lo expresado se logran números de onda k entre 0 y 3 y factores Ω entre 0 y 15 aprox. Los valores del parámetro α considerados se sitúan entre 0.2 y 0.7., mientras que κ toma valores entre 0.3 y 6.

En función de lo anteriormente expuesto se resumen los parámetros de importancia, su efecto en la transmisibilidad y los criterios de manipulación.

- La frecuencia propia vertical del aislamiento, que escala a las frecuencias de excitación presentes definiendo al parámetro Ω , y la relación de amortiguamiento del sistema de aislamiento (supuesto viscoso) ζ son parámetros estándar en aislamiento de vibraciones de cuerpos rígidos. Como en este último caso, es menester reducir en lo posible a ambos, sin embargo, debe llegarse a un compromiso frente a elevados desplazamientos estáticos o a las excesivas amplificaciones dinámicas en resonancia que una disminución de estos parámetros puede causar, respectivamente.
- El ángulo de incidencia de las ondas modifica la proporción de excitación de los modos longitudinales y transversales, mientras que las dimensiones largo y ancho de las losas definen básicamente distintos parámetros κ según la Ec.(18). La excitación de los modos acoplados longitudinal-transversal resulta relevante cuando el ángulo de incidencia de las ondas propagadas no es múltiplo de $\pi/2$.
- Los parámetros κ suficientemente pequeños contribuyen a mitigar los efectos de la flexión de las losas, sin embargo, el control sobre este parámetro puede resultar bastante limitado. En efecto, la longitud de la losa sólo puede reducirse por medio de la partición de la superficie original en superficies parciales y de forma que estas respondan independientemente. Vinculaciones entre losas asociadas a una menor cantidad de GL restringidos (articulaciones, barras de corte, por ej.) no necesariamente mejoran en forma significativa la respuesta, por no reducir efectivamente el parámetro en relación con las complicaciones de diseño originadas. Además la velocidad de propagación del medio local puede sólo aumentarse en forma aparente construyendo losas de fundación unificadas para lograr un apoyo de los aisladores, y aprovechando la mayor velocidad de propagación en el hormigón.
- De la Ec. (63) se tiene que el factor de pérdida de la losa η amortigua a la respuesta flexional con un factor $\alpha^4 \pi^4 (n+0.5)^4 / \Omega$ respecto al amortiguamiento viscoso del aislamiento, supuesto $\eta = 2\zeta$. Para valores usuales, este factor toma valores bastante mayores a la unidad, lo que pone en evidencia la utilidad de controlar el parámetro. De acuerdo con el análisis efectuado, factores de pérdida finales de la losa en el rango de 0.05-0.2 son razonables de manera de eliminar la mayor parte del efecto indeseable de las amplificaciones.
- El parámetro α debe aumentarse en lo posible, evitando los picos flexionales dentro del rango de frecuencias de interés y acoplamiento con las frecuencias propias del aislamiento, lo que parece más factible en losas de protección acústica, que para la presente aplicación en particular.
- La Figura 8 establece las zonas de máxima transmisibilidad en función de los parámetros α , κ , Ω y n , por lo que puede utilizarse para verificar cualquier combinación de parámetros y estimar la frecuencia y magnitud de los puentes de transmisibilidad.
- Finalmente debe tenerse en cuenta que la distancia entre aisladores contiguos debe ser lo suficientemente pequeña para que no aparezcan efectos de *aliasing espacial* dentro del rango de frecuencias de análisis. La aparición de este fenómeno conlleva a encontrar transmisibilidades mayores en zonas de altas frecuencias, espejadas desde la zona de menores frecuencias.

6 CONCLUSIONES

El estudio de la respuesta dinámica de pisos aislados de vibraciones, mediante la construcción de losas flexibles con sistemas de apoyos elásticos en la base, se extiende a frecuencias de análisis relativamente altas y gran cantidad de modos, por lo que las transmisibilidades dependen fuertemente de la localización del punto de análisis sobre la losa, además de otros numerosos parámetros. Por este motivo se utiliza en este trabajo el concepto de transmisibilidad máxima, que resulta conservativa y útil para el diseño de sistemas.

Se realiza un exhaustivo análisis paramétrico con el fin de mejorar la comprensión del fenómeno de transmisibilidad de vibraciones en placas flexibles excitadas con trenes de ondas desde la base y disponer de criterios para mejorar el diseño. La posibilidad de optimización resulta en ocasiones limitada porque algunos parámetros son difícilmente modificables. Del análisis cuantitativo de los parámetros usuales resulta como conclusión que en el caso de pisos aislados resulta antieconómico aumentar las frecuencias de los modos flexionales (vinculadas al parámetro α) lo suficiente para evitar excitarlos, tal como suele ser la condición de diseño de los bloques de soporte de maquinaria pesada. Por esta razón se trata de cuantificar, controlar y minimizar los efectos de las resonancias en el diseño. En lo posible resulta conveniente disminuir el parámetro κ evitando dimensiones de la losa excesivas en planta.

El incremento del factor de pérdida de la losa resulta una medida efectiva para disminuir la transmisibilidad, de acuerdo con el análisis previo realizado, y puede materializarse mediante el agregado de una capa de material viscoelástico confinada. El uso de este tratamiento resulta económicamente factible y recomendable, aunque sea menester un rediseño completo del sistema, debido al importante espesor de la capa de confinamiento necesario para lograr amortiguamientos que minimicen la respuesta. Una concepción amortiguada de la losa, compuesta por una losa principal de soporte, una capa de material viscoelástico con alto factor de pérdida y una losa superficial de tránsito resulta una medida eficaz para atenuar los efectos de las resonancias. Una ventaja adicional es que la capa de confinamiento aísla a la losa de base por medio del material viscoelástico y ella misma resulta amortiguada. Esto resulta de importancia para evitar las amplificaciones generadas en el tránsito, que pueden generar niveles de vibraciones indeseados. El incremento de amortiguamiento del sistema de aislamiento, en cambio, no resulta efectivo y es antiproducente a estos efectos.

Las mediciones de vibraciones en una losa flotante de uso industrial han validado los resultados provenientes de los diferentes modelos de cálculo utilizados, en especial de los provenientes del modelo numérico. En efecto, las transmisibilidades experimentales provenientes de registros tomados en algunos puntos de la losa de análisis, se comparan con los valores calculados y se encuentran por debajo de la envolvente de cálculo numérico correspondiente a los valores constructivos.

Por medio de modelos simplificados de viga resulta posible la definición de una *transmisibilidad modal envolvente*, que resulta función de la frecuencia. Debido al carácter de envolvente, sus valores no son esperables en todo el rango de frecuencias, sino en la forma de “puentes de transmisibilidad” en el sistema, que tienen lugar bajo condiciones de relaciones de parámetros adimensionales, que son verificables en la etapa de diseño. Los puentes de transmisibilidad pueden así ser eventualmente evitados, o en su defecto, la transmisibilidad máxima de los picos estimada. Las envolventes de transmisibilidad modal calculadas para una viga equivalente con el factor de pérdida en forma paramétrica puede utilizarse como referencia conservativa de diseño en estructuras similares. El rango de aplicación de la envolvente puede ser verificada en forma gráfica en función de los parámetros adimensionales. Las magnitudes de las envolventes

muestran que aun en presencia de tratamientos para incrementar el amortiguamiento, los valores posibles y esperables de transmisibilidad son varias veces superiores a lo calculable con el sistema de 1 GLD.

Algunos aspectos prácticos no han sido tratados en detalle en el presente trabajo y constituyen un tema de investigación futura. Entre ellos cabe citar el efecto de la construcción de plateas de base de los aisladores, que contribuyan a aumentar la velocidad aparente de propagación de ondas, o el uso de fundaciones embebidas, que generan discontinuidades en el tren de ondas propagadas y que, por lo tanto, reducen la amplitud y alteran la forma espacial de la excitación.

7 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el CONICET y la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba.

REFERENCIAS

- Balachandran, B. and Magrab, E.B., *Vibrations*, Thomson Learning, 2009.
- Clough, R.W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, Second edition, McGraw Hill, 1993.
- Cox S.J., Wang A., Morrison C., Carels P, Kelly R. and Bewes O.G. A test rig to investigate slab track structures for controlling ground vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3-5):901-909, 2006
- Hui C.K. and Ng C.F., Attenuation of flexural vibration for floating floor and floating box induced by ground vibration. *Applied Acoustics*, 70(6):799-812, 2009a.
- Hui C.K. and Ng C.F., The effects of floating slab bending resonances on the vibration isolation of rail viaduct. *Applied Acoustics*, 70, pp.830-844, 2009b.
- Kawaharazuka T, Hiramatsu T., Ohkawa H. and Koyasu M., Experimental study on vibration reduction by isolated railway. *Internoise*, pp.1549-1552, 1996.
- Leung K.L., Beskos D.E. and Vardoulakis I.G., Vibration isolation using open or filled trenches, Part 2. *Computational Mechanics*, 7:137-148, 1990.
- Lombaert G, Degrande G. and Clouteau D., Numerical modelling of free field traffic induced vibrations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 19(7):473-488, 2000.
- Lombaert G, Degrande G, Vanhauwere B, Vandeborghet B. and François S. The control of ground-borne vibrations from railway traffic by means of continuous floating slabs. *Journal of Sound and Vibrations*; 297(3-5):946-961, 2006.
- Mead Denys J., *Passive Vibration Control*, John Wiley & Sons Ltd., 1999
- Przemieniecki, J.S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw Hill, 1985.
- Ross D., Ungar E.E. and Kerwin E.M. Jr., Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate. *Structural Damping*, ASME, New York, pp. 49-88, 1959.
- Saurenmann H.J., Nelson J.T. and Wilson G.P., Handbook of urban rail noise and vibration control. *Report UMTA-MA-06-0099-82-2*, 1982.
- Shrivastava R.K. and Kameswara Rao N.S.V., Response of soil media due to impulse loads and isolation using trenches. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22(8):695-702, 2002.