Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXVIII, págs. 1149-1160 (artículo completo)
Cristian García Bauza, Pablo Lotito, Lisandro Parente, Marcelo Vénere (Eds.)
Tandil, Argentina, 3-6 Noviembre 2009

ÁNALISIS NUMÉRICO DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO ELÍPTICO DISTRIBUIDO

Domingo A. Tarzia[a]

[a] *Departamento de Matemática - CONICET, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, DTarzia@austral.edu.ar*

Palabras Clave: Control óptimo distribuido, Problema elíptico, Condiciones de contorno mixtas, Discretización, Elementos finitos, Convergencia, Estimaciones de error.

Resumen. Sea un dominio acotado Ω de R^n con una frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ regular compuesta de dos porciones de frontera Γ_1 y Γ_2 con $\operatorname{med}(\Gamma_1) > 0$. En C.M. Gariboldi – D.A. Tarzia, Appl. Math. Optim., 47 (2003), 213-230 (ver también MAT - Serie A, 7 (2004), 31-42), se considera el siguiente problema de control óptimo distribuido para un sistema que puede representar el caso estacionario del problema de Stefan: hallar el $\min\limits_{g \in L^2(\Omega)} J(g)$ donde la función costo J viene dada por $J(g) = \frac{1}{2}\left\|u_g - z_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{M}{2}\left\|g\right\|^2_{L^2(\Omega)}$ con $M > 0$, $z_d \in H = L^2(\Omega)$ dado y u_g es el estado del sistema definido por la única solución de la siguiente ecuación variacional que corresponde a un problema elíptico con condiciones de contorno mixtas:

$$u \in K: \quad a(u,v) = (g,v) - \int_{\Gamma_2} qv\, ds, \quad \forall v \in V_0$$

donde g es la energía interna en Ω, b la temperatura sobre Γ_1 y q el flujo de calor sobre Γ_2 con:

$$V_0 = \left\{ v \in H^1(\Omega), \quad v/\Gamma_1 = 0 \right\}, \quad K = V_0 + b, \quad a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v\, dx, \quad (u,v) = \int_{\Omega} uv\, dx$$

Se prueba que existe un único control óptimo $g \in H$ y la condición de optimalidad se expresa por $g = -p_g / M$ en Ω, donde p_g es el estado adjunto del sistema, definido en función del u_g. Por otro lado, se prueba una condición suficiente para que el operador $W : H \to H$ definido por $W(g) = -p_g / M$ tenga un único punto fijo. El objetivo del presente trabajo es el de realizar el análisis numérico del problema de control óptimo y su correspondiente convergencia usando el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 constituido por elementos finitos de clase C^0 siendo h el parámetro que tiende a cero. Se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas que definen el estado del sistema y de su estado adjunto y además la función de costo. Se demuestra que existen únicos control $g_{h_{op}}$, sistema $u_{hg_{h_{op}}}$ y estado adjunto $p_{hg_{h_{op}}}$ óptimos discretos. Además, se demuestran los siguientes límites cuando $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\left\|u_{hg_{h_{op}}} - u_{g_{op}}\right\|_V = \lim_{h\to 0}\left\|p_{hg_{h_{op}}} - p_{g_{op}}\right\|_V = \lim_{h\to 0}\left\|g_{h_{op}} - g_{op}\right\|_H = 0$$

y se dan los órdenes de convergencia, en función de h, $\forall z_d \in H$ y para adecuados valores de M.

1 INTRODUCCIÓN

Sea un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con una frontera $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ regular compuesta por dos porciones de frontera Γ_1 y Γ_2 con $\mathrm{med}(\Gamma_1) > 0$. Se considera el siguiente problema elíptico con condiciones de frontera mixtas dado por:

$$-\Delta u = g \quad \text{en } \Omega \;; \quad u = b \quad \text{sobre } \Gamma_1 \;\; ; \;\; -\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{sobre } \Gamma_2 \tag{1}$$

donde g es la energía interna en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1, q es el flujo de calor sobre Γ_2. En Gariboldi and Tarzia (2003; 2004) se considera el siguiente problema continuo de control óptimo distribuido para el sistema (1) que puede representar el caso estacionario del problema de Stefan (Tabacman and Tarzia, 1989; Tarzia, 1988): hallar el control óptimo $g_{op} \in H$ de manera que:

$$J\left(g_{op}\right) = \min_{g \in H} J\left(g\right) \tag{2}$$

donde el funcional de costo $J : H \to \mathbb{R}_0^+$ viene dado por la siguiente expresión (Bergounioux, 1997; Lions, 1968)

$$J(g) = \frac{1}{2}\left\|u_g - z_d\right\|_H^2 + \frac{M}{2}\left\|g\right\|_H^2 \tag{3}$$

con $M > 0$ y $z_d \in H$ dados, $u_g \in K$ es el estado del sistema definido por el problema elíptico (1) cuya formulación variacional está dada por la siguiente ecuación variacional (Kinderlehrer and Stampacchia, 1980; Tarzia, 1981):

$$\begin{cases} a\left(u_g, v\right) = \left(g, v\right)_H - \int_{\Gamma_2} q v d\gamma, & \forall v \in V_0 \\ u_g \in K \end{cases} \tag{4}$$

y cuyo correspondiente estado adjunto $p_g \in V$ está definido por la ecuación variacional:

$$\begin{cases} a\left(p_g, v\right) = \left(u_g - z_d, v\right), & \forall v \in V_0 \\ p_g \in V_o \end{cases} \tag{5}$$

donde:

$$V = H^1(\Omega), V_0 = \left\{v \in V, \quad v / \Gamma_1 = 0\right\}, K = \left\{v \in V, \quad v / \Gamma_1 = b\right\} = v + V_0, \tag{6}$$

$$H = L^2(\Omega), \quad a\left(u, v\right) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx, \quad (u, v) = \int_\Omega uv\, dx\,. \tag{7}$$

El objetivo del presente trabajo es el de realizar el análisis numérico del problema de control óptimo (2) y su correspondiente convergencia usando el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 constituido por elementos finitos de clase C^0 siendo h el parámetro que tiende a cero. Se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas que definen el estado del sistema (4) y el estado adjunto (5) y además el funcional de costo (3). Se demuestra que existen únicos control $g_{h_{op}}$, sistema $u_{hg_{hop}}$ y estado adjunto $p_{hg_{hop}}$ óptimos discretos y se obtienen las correspondientes convergencias cuando $h \to 0$ y se dan los órdenes de convergencia, en función de h, $\forall z_d \in H$ y para adecuados valores de M (Casas and Mateos, 2002; Casas and Raymond, 2006)

En general, la solución de problemas elípticos con condiciones mixtas se encuentra en $H^r(\Omega)$ con $1 < r \leq 3/2 - \varepsilon \; (\varepsilon > 0)$ pero existen numerosos ejemplos para los cuales las soluciones están en $H^r(\Omega)$ con $2 \leq r$ que es lo que se supone en el presente trabajo (Azzam and Kreyszig, 1982 ; Lanzani, Capogna and Brown, 2008; Shamir, 1968).

2 DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

Se considera la siguiente discretización (Brenner and Scott, 1994; Ciarlet, 1978)

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n : \text{dominio poligonal acotado ; } b = \text{Const.}>0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ \tau_h : \text{triangulación regular de tipo no negativa constituida por elementos finitos,} \\ \qquad \text{afines equivalentes de clase } C^0, \\ h > 0 : \text{parámetro de la aproximación de elementos finitos que tiende a cero,} \\ h = \text{lado mayor de todos los triángulos } T \in \tau_h. \end{cases}$$

Se aproximan V, V_0 y K por:

$$\begin{cases} V_h = \left\{ v_h \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) / \, v_h/T \in P_1(T), \forall T \in \tau_h \right\} \\ V_{0h} = \left\{ v_h \in V_h \, / \, v_h/\Gamma_1 = 0 \right\}; \quad K_h = b + V_{0h} \end{cases} \tag{8}$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1. Se considera $\pi_h : V \to V_h$ el operador de interpolación lineal que posee las siguientes propiedades: $\exists c_0 > 0$ de manera que (Brenner and Scott, 1994):

$$\begin{cases} a) \left\| v - \pi_h(v) \right\|_H \leq c_0 h^r \left\| v \right\|_r, \quad \forall v \in H^r(\Omega), \quad r > 1 \\ b) \left\| v - \pi_h(v) \right\|_V \leq c_0 h^{r-1} \left\| v \right\|_r, \quad \forall v \in H^r(\Omega), \quad r > 1 \end{cases}. \tag{9}$$

El funcional de costo discreto $J_h : H \to \mathbb{R}_0^+$ se define por la expresión siguiente:

$$J_h(g) = \frac{1}{2}\left\| u_{hg} - z_d \right\|_H^2 + \frac{M}{2}\left\| g \right\|_H^2 \tag{10}$$

donde u_{hg} es el estado del sistema discreto definido como la solución de la ecuación variacional discreta siguiente (Kinderlehrer and Stampacchia, 1980; Tarzia, 1996; Tarzia, 1999):

$$\begin{cases} a\left(u_{hg},v_h\right)=\left(g,v_h\right)_H-\int\limits_{\Gamma_2} qv_h d\gamma, \quad \forall v_h \in V_{0h} \\ u_{hg} \in K_h \end{cases} \tag{11}$$

y su correspondiente estado adjunto discreto p_{hg} se define como la solución de la siguiente ecuación variacional discreta:

$$\begin{cases} a\left(p_{hg},v_h\right)=\left(u_{hg}-z_d,v_h\right), \quad \forall v_h \in V_{0h} \\ p_{hg} \in V_{0h}. \end{cases} \tag{12}$$

Se define u_{h0} como la solución particular de la ecuación variacional discreta (11) para el caso $g=0$, es decir:

$$\begin{cases} a\left(u_{h0},v_h\right)=-\int\limits_{\Gamma_2} qv_h d\gamma, \quad \forall v_h \in V_{0h} \\ u_{h0} \in K_h. \end{cases} \tag{13}$$

El correspondiente problema de control óptimo discreto consiste en hallar $g_{h_{op}} \in H$ de manera que:

$$J_h\left(g_{h_{op}}\right)=\underset{g\in H}{Min}\ J_h\left(g\right). \tag{14}$$

Lema 1
(i) Existen únicos $u_{hg} \in K_h$, $u_{h0} \in K_h$ y $p_{hg} \in V_{0h}$ soluciones de las ecuaciones variacionales (11), (13) y (12) respectivamente $\forall g \in H, \forall q \in L^2\left(\Gamma_2\right), b>0$ sobre Γ_1.
(ii) El operador $g \in H \to u_{hg} \in V$ es Lipschitziano,i.e.

$$\left\|u_{hg_2}-u_{hg_1}\right\|_V \le \frac{1}{\lambda}\left\|g_2-g_1\right\|_H, \quad \forall g_1,g_2 \in H, \forall h>0, \tag{15}$$

donde $\lambda>0$ es la constante de coercividad de la forma bilineal, simétrica y continua a, es decir:

$$\lambda\left\|v\right\|_V^2 \le a(v,v), \quad \forall v \in V \tag{16}$$

(iii) El operador $C_h : H \to V_{0h}$ definido por:

$$C_h\left(g\right)=u_{hg}-u_{h0} \tag{17}$$

es lineal y continuo, es decir:

$$\left\|C_h\ (\mathrm{g})\right\|_V = \left\|u_{hg}-u_{h0}\right\|_H \le \frac{1}{\lambda}\left\|g\right\|_H, \quad \forall g \in H\ ; \tag{18}$$

además es Lipschitziano en H *y satisface la siguiente propiedad:*

$$a\left(p_{hg,}C_h\left(f\right)\right)=\left(u_{hg}-z_d,C_h\left(f\right)\right)_H=\left(f,p_{hg}\right)_H, \quad \forall g,f\in H. \tag{19}$$

(iv) Se tiene la siguiente propiedad:

$$u_{h(c_1g_1+c_2g_2)}=c_1u_{hg_1}+c_2u_{hg_2}+\left(1-c_1-c_2\right)u_{h0,} \quad \forall c_1,c_2\in\mathbb{R},\forall g_1,g_2\in H,\forall h>0 . \tag{20}$$

(v) El operador $G_h:H\times H\to\mathbb{R}$ *definido por:*

$$G_h\left(g,f\right)=\left(C_h\left(g\right),C_h\left(f\right)\right)_H+M\left(g,f\right)_H \tag{21}$$

es bilineal, simétrico, continuo y coercivo en H, i.e.

$$M\left\|g\right\|_H^2\leq G_h\left(g,g\right)=\left\|c_h\left(g\right)\right\|_H^2+M\left\|g\right\|_H^2, \quad \forall g\in H,\forall h>0. \tag{22}$$

(vi) El funcional $L_h:H\to\mathbb{R}$ *definido por:*

$$L_h\left(g\right)=\left(C_h\left(g\right),z_d-u_{h0}\right)_H \tag{23}$$

es lineal y continuo en H.

(vii) Se tiene la siguiente propiedad:

$$\left\|u_{hg}-b\right\|_V\leq\frac{1}{\lambda}\left[\left\|g\right\|_H+\left\|q\right\|_{L^2(\Gamma_2)}\left\|\gamma_0\right\|\right]=Const., \quad \forall h>0 \tag{24}$$

donde $\gamma_0:V\to H^{1/2}\left(\Gamma_1\right)$ *es el operador traza .*

(viii) El operador $g\in H\to p_{hg}\in V_{0g}$ *es Lipschitziano y estrictamente monótono ,i.e.*

$$\begin{cases}(a) \quad \left(p_{hg_2}-p_{hg_1},g_2-g_1\right)_H=\left\|u_{hg_2}-u_{hg_1}\right\|_H^2\geq 0, \quad \forall g_1,g_2\in H,\forall h>0 & (25)\\ (b) \quad \left\|p_{hg_2}-p_{hg_1}\right\|_V\leq\frac{1}{\lambda}\left\|u_{hg_2}-u_{hg_1}\right\|_V\leq\frac{1}{\lambda^2}\left\|g_2-g_1\right\|, \quad \forall g_1,g_2\in H,\forall h>0 & (26)\end{cases}$$

Demostración Se utilizan el Teorema de Lax-Milgram, las definiciones (17), (21) y (22), las ecuaciones variacionales (11), (12) y (13), la coercividad (16) siguiendo las ideas desarrolladas en Gariboldi and Tarzia, 2003 y Lions, 1968.

Teorema 2
(i) El funcional de costo discreto (10) puede expresarse como:

$$J_h\left(g\right)=\frac{1}{2}G_h\left(g,g\right)-L_h\left(g\right)+\frac{1}{2}\left\|u_{h0}-z_d\right\|_H^2, \quad \forall g\in H . \tag{27}$$

(ii) Se tiene que J_h *es una aplicación* H *- elíptica y por ende estrictamente convexa, es decir:*

$$(1\text{-}t)J_h(g_2)+tJ_h(g_1)-J_h(tg_1+(1-t)g_2)=\frac{t(1-t)}{2}\left\|u_{hg_2}-u_{hg_1}\right\|_H^2+M\frac{t(1-t)}{2}\left\|g_2-g_1\right\|_H^2$$
$$\geq M\frac{t(1-t)}{2}\left\|g_2-g_1\right\|_H^2, \quad \forall g_1,g_2\in H, \forall t\in[0,1]. \quad (28)$$

(iii) Existe un único control óptimo $g_{h_{op}}\in H$ *que satisface el problema de optimización* (14).

(iv) Se tiene que:

$$u_{h(g+tf)}=u_{hg}+tC_h(f), \quad \forall g,f\in H, \forall h>0, \forall t\in\mathbb{R}. \quad (29)$$

(v) J_h *es una aplicación diferenciable según Gateaux y su derivada* J_h' *está dada por la siguiente expresión:*

$$J_h'(g)=Mg+p_{hg}, \quad \forall g\in H, \quad \forall h>0. \quad (30)$$

(vi) La condición de optimalidad está dada por:

$$J_h'\left(g_{h_{op}}\right)=0\Leftrightarrow g_{h_{op}}=-\frac{1}{M}p_{hg_{h_{op}}}. \quad (31)$$

(vii) J_h' *es un operador Lipschitziano y estrictamente monótono, i.e.*

a) $$\left\|J_h'(g_2)-J_h'(g_1)\right\|_H\leq\left(M+\frac{1}{\lambda^2}\right)\left\|g_2-g_1\right\|_H, \quad \forall g_1,g_2\in H, \forall h>0 \quad (32)$$

b) $$\left\langle J_h'(g_2)-J_h'(g_1),g_2-g_1\right\rangle=\left\|u_{hg_2}-u_{hg_1}\right\|_H^2+M\left\|g_2-g_1\right\|_H^2$$
$$\geq M\left\|g_2-g_1\right\|_H^2, \quad \forall g_1,g_2\in H, \forall h>0 \quad (33)$$

Demostración Se utilizan las definiciones (10), (17), (21) y (23), las ecuaciones variacionales (11) y (12), la coercividad (16) siguiendo las ideas desarrolladas en Gariboldi and Tarzia, 2003. Además, el funcional J_h es una aplicación diferenciable Gâteaux, i.e.

$$\left\langle J_h'(g),f\right\rangle=\lim_{t\to0^+}\frac{J_h(g+tf)-J_h(g)}{t}=G_h(g,f)-L_h(f), \quad \forall g,f\in H. \quad (34)$$

Se define el operador

$$W_h:H\to V_{0h}\subset V_0\,/\,W_h(g)=-\frac{1}{M}p_{hg}. \quad (35)$$

Teorema 3 *Se tiene que:*
(i) W_h *es un operador Lipschitziano, es decir:*

$$\left\|W_h\left(g_2\right)-W_h\left(g_1\right)\right\|_V \leq \frac{1}{M\lambda^2}\left\|g_2-g_1\right\|_H, \quad \forall g_1, g_2 \in H, \quad \forall h>0. \qquad (36)$$

(ii) W_h *es un operador de contracción si y sólo si*

$$\mathrm{M} > \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (37)$$

(iii) Si M *verifica la desigualdad (37) entonces el control óptimo discreto* $g_{h_{op}} \in H$ *puede ser obtenido como el único punto fijo del operador* W_h*, es decir:*

$$g_{h_{op}} = -\frac{1}{M} p_{hg_{h_{op}}} \Leftrightarrow W_h\left(g_{h_{op}}\right) = g_{h_{op}} \qquad (38)$$

Demostración Se utiliza la definición (35) y las propiedades (25) y (31).

3 ESTIMACIONES DE ERROR

Se obtienen las siguientes estimaciones de error entre las soluciones continuas y discretas.

Teorema 4 $\forall g \in H$ *(fijo) se tienen las siguientes propiedades*:
(i) Se tiene:

$$a\left(u_g - u_{hg}, v_h\right) = 0, \quad \forall v_h \in V_{0h} \qquad (39)$$

$$a\left(u_g - u_{hg}, u_g - u_{hg}\right) \leq a\left(u_g - v_h, u_g - v_h\right), \quad \forall v_h \in K_h \qquad (40)$$

$$\left\|u_g - u_{hg}\right\|_V \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname*{Inf}_{v_h \in K_h} \left\|u_g - v_h\right\|_V \quad . \qquad (41)$$

(ii) Si el estado del sistema continuo tiene la regularidad $u_g \in H^r(\Omega)$ $\left(r>1\right)$ *entonces se obtiene*

$$\left\|u_g - u_{hg}\right\|_V \leq \frac{c_0}{\sqrt{\lambda}}\left\|u_g\right\|_r h^{r-1}, \quad \forall g \in H, h>0 \; . \qquad (42)$$

(iii) Se tiene la siguiente convergencia

$$\lim_{h \to 0^+}\left\|u_g - u_{hg}\right\|_V = 0, \quad \forall g \in H \; . \qquad (43)$$

Demostración Se utilizan las ecuaciones variacionales (4) y (11), $v_h = \pi_h\left(u_g\right)$ en la ecuación variacional (11), la coercividad (16) y las estimaciones (9).

Teorema 5 *$\forall g \in H$ (fijo) se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $a\left(p_g - p_{hg}, \pi_h\left(p_g\right) - p_{hg}\right) = \left(u_g - u_{hg}, \pi_h\left(p_g\right) - p_{hg}\right)$ (44)

(ii) Si el estado del sitema y el estado adjunto continuos tienen las regularidades siguientes $u_g \in H^r\left(\Omega\right), \quad p_g \in H^r\left(\Omega\right) \quad \left(r > 1\right)$ entonces se obtiene la estimación:

$$\left\| p_g - p_{hg} \right\|_V^2 \le c_1 \left\| p_g - p_{hg} \right\| h^{r-1} + c_2 h^{2r-1} \tag{45}$$

con

$$c_1 = \frac{c_0}{\lambda}\left[\left\| p_g \right\|_r + \frac{\left\| u_g \right\|_r}{\sqrt{\lambda}}\right], \; c_2 = \frac{c_0^{\;2}}{\lambda^{3/2}} \left\| u_g \right\|_r \left\| p_g \right\|_r \tag{46}$$

y

$$\left\| p_g - p_{hg} \right\|_V \le c_3\left(h\right) h^{r-1} \tag{47}$$

con

$$c_3\left(h\right) = \sqrt{c_1^2 + 2c_2 h} \le c_3 = \sqrt{c_1^2 + 2c_2}\,, \quad \forall h \le 1 \;. \tag{48}$$

(iii) Se tiene la siguiente convergencia:

$$\lim_{h \to 0^+} \left\| p_g - p_{hg} \right\|_V = 0, \quad \forall g \in H \;. \tag{49}$$

Demostración Se utilizan las ecuaciones variacionales (3) y (12), $v_h = \pi_h\left(p_g\right)$ en la ecuación variacional (12), la coercividad (16) y las estimaciones (9).

Teorema 6
(i) Si el estado del sistema y el estado adjunto continuos tienen las regularidades $u_{g_{op}}, p_{g_{op}} \in H^r\left(\Omega\right)(r > 1)$ y la constante M verifica la desigualdad (37) entonces se tienen las siguientes estimaciones de error:

$$\left\| g_{h_{op}} - g_{\;op} \right\|_V \le \frac{c_3}{M\lambda^2 - 1} h^{r-1}, \left\| u_{hg_{h_{op}}} - u_{g_{op}} \right\|_V \le c_4 h^{r-1}, \left\| p_{hg_{h_{op}}} - p_{g_{op}} \right\|_V \le c_5 h^{r-1} \tag{50}$$

donde c_3, c_4 y c_5 son constantes independientes de h.

(ii) Se obtienen los siguientes límites:

$$\lim_{h \to 0^+} \left\| g_{h_{op}} - g_{\;op} \right\|_V = 0, \quad \lim_{h \to 0^+} \left\| u_{hg_{h_{op}}} - u_{g_{op}} \right\|_V = 0, \quad \lim_{h \to 0^+} \left\| p_{hg_{h_{op}}} - p_{g_{op}} \right\|_V = 0 \,. \tag{51}$$

Demostración Se siguen los siguientes pasos:

(i) $\forall h>0,$ se tiene:

$a)\quad \|u_{h0}-b\|_V \le \dfrac{\|\gamma_0\|}{\lambda}\|q\|_{L^2(\Gamma_2)}, \quad \forall h>0$ y $\|u_{h0}\|_V \le Const$,

$b)\quad \dfrac{1}{2}\left\|u_{hg_{h_{op}}}-z_d\right\|_H^2+\dfrac{M}{2}\left\|g_{h_{op}}\right\|_H^2 \le \dfrac{1}{2}\|u_{h0}-z_d\|^2 \le Const,$

con lo cual

$$\left\|u_{hg_{h_{op}}}\right\|_H \le Const, \qquad \left\|g_{h_{op}}\right\|_H \le Const, \quad \forall h>0 .$$

(ii) Se tiene:

$$\left\|u_{hg_{h_{op}}}-b\right\|_V \le \frac{1}{\lambda}\left[\left\|g_{h_{op}}\right\|_H+\|q\|_{L^2(\Gamma_2)}\|\gamma_0\|\right] \le Const, \quad \forall h>0 .$$

(iii) Se tiene:

$$\left\|p_{hg_{h_{op}}}\right\|_V \le \frac{1}{\lambda}\left\|u_{hg_{h_{op}}}-z_d\right\|_H \le Const, \quad \forall h>0 .$$

(iv) De las acotaciones anteriores se deduce que:

$$\begin{cases} a) \quad \exists f \in H \,/\, g_{h_{op}} \to f \quad \text{convergencia débil en } H \text{ cuando } h\to 0^+ \\ b) \quad \exists \eta \in V \,/\, u_{hg_{h_{op}}} \to \eta \quad \text{convergencia débil en } V \text{ (fuerte en } H\text{) cuando } h\to 0^+ \\ c) \quad \exists \xi \in V \,/\, p_{hg_{h_{op}}} \to \xi \quad \text{convergencia débil en } V \text{ (fuerte en } H\text{) cuando } h\to 0^+ \end{cases}$$

(v) Utilizando las tres convergencias anteriores se puede pasar al límite cuando $h\to 0^+$, obteniéndose por unicidad de las inecuaciones variacionales (11) y (12) que:

$a)\quad \eta = u_f$

$b)\quad \xi = p_f$

$c)\quad f = g_{op}$

(vi) Por otro lado se tienen:

$a)\quad \lambda\left\|u_{hg_{h_{op}}}-u_{g_{op}}\right\|_V^2 \le \left(g_{op}, u_{g_{op}}-u_{hg_{h_{op}}}\right)_H+\left(g_{h_{op}}-g_{op}, u_{hg_{h_{op}}}-b\right)_H-\int_{\Gamma_2} q\left(u_{g_{op}}-u_{hg_{h_{op}}}\right)d\gamma \to 0,$

cuando $h\to 0^+$ y por lo tanto se deduce que:

$$\lim_{h\to 0^+}\left\|u_{hg_{h_{op}}}-u_{g_{op}}\right\|_V = 0\,;$$

$b)\quad \lambda\left\|p_{hg_{h_{op}}}-p_{g_{op}}\right\|_V^2 \le \left(u_{hg_{h_{op}}}-u_{g_{op}}, p_{hg_{h_{op}}}\right)_H - a\left(p_{g_{op}}, p_{hg_{h_{op}}}-p_{g_{op}}\right) \to 0,$ cuando $h\to 0^+$ y por lo tanto se obtiene:

$$\lim_{h\to 0^+}\left\| p_{hg_{h_{op}}} - p_{g_{op}} \right\|_V = 0 .$$

(vii) Utilizando la definición (10) se puede pasar al límite cuando $h \to 0^+$ y se deduce que:

$$\lim_{h\to 0^+}\left\| g_{h_{op}} \right\|_H = \left\| g_{op} \right\|_H .$$

(viii) De la convergencia débil (iv) y de la propiedad (vii) se deduce que:

$$\lim_{h\to 0}\left\| g_{h_{op}} - g_{op} \right\|_H = 0 ,$$

con lo cual la prueba queda completada.

Lema 7 *Si M verifica la desigualdad (37) se puede obtener otra prueba de:*

$$f = g_{op}.$$

Demostración Utilizando la caracterización de punto fijo (38), se tiene:

$$\begin{tikzcd} g_{h_{op}} \arrow[d, "\text{en H débil}"] & = & -\frac{1}{M}\, p_{hg_{h_{op}}} \arrow[d, "\text{en H fuerte}"] \\ f & & -\frac{1}{M}\xi = -\frac{1}{M}\, p_f \end{tikzcd}$$

y por ende $f = -\frac{1}{M} p_f$. Por unicidad del control óptimo $g_{op} \in H$ se deduce que $f = g_{op}$.

Teorema 8 *(Estimaciones explícitas del error cuando $M > \frac{1}{\lambda^2}$) Si M verifica la desigualdad (37) y las soluciones de los problemas continuos verifican las propiedades de regularidad:*

$$u_{g_{op}} \in H^r(\Omega), \quad p_{g_{op}} \in H^r(\Omega), \quad (r > 1)$$

entonces se tienen las siguientes propiedades:

$$\left\| g_{h_{op}} - g_{op} \right\|_V \le Ch^{r-1}, \left\| u_{hg_{h_{op}}} - u_{g_{op}} \right\|_V \le Ch^{r-1}, \left\| p_{hg_{h_{op}}} - p_{g_{op}} \right\|_V \le Ch^{r-1} \tag{52}$$

donde C representan constantes independientes de h.

Demostración Se siguen los siguientes pasos:

$i)\quad \left\| g_{h_{op}} - g_{op} \right\|_H \leq \dfrac{\lambda^2 c_3}{M\lambda^2 - 1} h^{r-1}, \quad \forall h \leq 1.$

$ii)\quad a\left(u_{hg_{h_{op}}} - u_{g_{op}}, v_h\right) = \left(g_{h_{op}} - g_{op}, v_h\right)_H, \quad \forall v_h \in V_{0h}.$

$iii)\quad \left\| u_{hg_{h_{op}}} - u_{g_{op}} \right\|_V^2 \leq c_4 \left\| u_{hg_{h_{op}}} - u_{g_{op}} \right\|_V h^{r-1} + c_5 h^{2r-1}$ donde

$$c_4 = \frac{c_3\lambda}{M\lambda^2 - 1} + \frac{c_0}{\lambda}\left\| u_{g_{op}} \right\|_r, \quad c_5 = \frac{c_3\lambda}{M\lambda^2 - 1} c_0 \left\| u_{g_{op}} \right\|_r .$$

$iv)\quad \left\| u_{hg_{h_{op}}} - u_{g_{op}} \right\|_V \leq c_6 h^{r-1}, \quad \forall h \leq 1$ con $c_6 = \sqrt{c_4^2 + 2c_5}$.

$v)\quad a\left(p_{hg_{h_{op}}} - p_{g_{op}}, v_h\right) = \left(u_{hg_{h_{op}}} - u_{g_{op}}, v_h\right)_H, \quad \forall v_h \in V_{0h}.$

$vi)$ Si se toma $v_h = \pi_h\left(p_{g_{op}}\right) - p_{hg_{h_{op}}} \in V_{0h}$, se tiene:

$$\left\| p_{hg_{h_{op}}} - p_{g_{op}} \right\|_V^2 \leq c_7 \left\| p_{hg_{h_{op}}} - p_{g_{op}} \right\| h^{r-1} + c_8 h^{2r-1}, \quad \forall h \leq 1$$

con

$$c_7 = \frac{c_6 + c_0 \left\| p_{g_{op}} \right\|_r}{\lambda}, \quad c_8 = \frac{c_0 c_6}{\lambda}\left\| p_{g_{op}} \right\|_r .$$

$vii)\quad \left\| p_{hg_{h_{op}}} - p_{g_{op}} \right\|_V \leq c_9 h^{r-1}, \quad \forall h \leq 1$ con $c_9 = \sqrt{c_7^2 + 2c_8}$,

con lo cual la prueba queda completada.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PIP Nº 0460 de CONICET-UA y "Fondo de Ayuda a la Investigación de la UA", Rosario, Argentina.

REFERENCES

Azzam, A., and Kreyszig, E., On solutions of elliptic equations satisfying mixed boundary conditions, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 13: 254-262, 1982.

Bergounioux, M., Optimal control of an obstacle problem, *Applied Mathematics and Optimization*, 36 : 147-172, 1997.

Brenner, S., and Scott, L.R., *The mathematical theory of finite element theory*, Springer, New York, 1994.

Casas, E., and Mateos, M., Uniform convergence of the FEM. Applications to state constrained control problems, *Computational and Applied Mathematics*, 21: 67-100, 2002.

Casas, E., and Raymond, J.P., Error estimates for the numerical approximation of Dirichlet boundary control for semilinear elliptic equations, *SIAM Journal on Control and Optimization,* 45: 1586-1611, 2006.

Ciarlet, P.G., *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

Gariboldi, C.M., and Tarzia, D.A., Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity, *Applied Mathematics and Optimization*, 47: 213-230, 2003.

Gariboldi, C.M., and Tarzia, D.A., A new proof of the convergence of the distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems, *MAT – Serie A*, 7: 31-42, 2004.

Kinderlehrer, D., and Stampacchia, G., *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.

Lanzani, L., Capogna, L., and Brown, R.M., The mixed problem in L^p for some two-dimensional Lipschitz domain, *Math. Annalen*, 342: 91-124, 2008.

Lions, J.L., *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

Shamir, E., Regularization of mixed second order elliptic problems, *Israel Journal of Math.*, 6: 150-168, 1968.

Tabacman, E.D., and Tarzia, D.A., Sufficient and/or necessary condition for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem, *Journal of Differential Equations*, 77: 16-37, 1989.

Tarzia, D.A., *Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre*, CLAMI-CONICET, No. 5, Buenos Aires, 1981.

Tarzia, D.A., An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem, *Engineering Analysis*, 5: 177-181, 1988.

Tarzia, D.A., Numerical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem to obtain a discrete steady-state two-phase Stefan problem, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33: 1257-1265, 1996.

Tarzia, D.A., Numerical analysis of a mixed elliptic problem with flux and convective boundary conditions to obtain a discrete solution of non-constant sign, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 15: 355-369, 1999.