

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN Y CONVECCIÓN DE CALOR MEDIANTE EL MÉTODO CV-RBF

Carlos A. Bustamante^a, Whady F. Flórez^a, Mauricio Giraldo^a y Henry Power^b

^a*Grupo de Energía y Termodinámica, Universidad Pontificia Bolivariana, Circ. 1 No.73-34 Medellín, Colombia, whady.florez@upb.edu.co, <http://www.upb.edu.co>*

^b*School of Mechanical, Materials and Manufacturing Engineering, University of Nottingham, NG7 2RD Nottingham, United Kingdom, henry.power@nottingham.ac.uk, <http://www.nottingham.ac.uk/schoolm3>*

Palabras Clave: Volúmenes Finitos, Funciones de Base Radial, Conducción, Convección.

Resumen. En este trabajo se presenta una variación del Método de Volúmenes Finitos (FVM) para la solución de problemas de valores en la frontera, consistente en la implementación de un esquema de interpolación Hermítica utilizando Funciones de Base Radial (RBFs), en lo que se conoce como el método CV-RBF (Control Volume- Radial Basis Function). El esquema de interpolación es una aplicación local del Método Simétrico utilizado en los métodos Sin Malla, en el cual se realiza una aproximación de la función empleando información de la ecuación diferencial parcial (EDP) gobernante y las condiciones de frontera que definen el problema global. Se utiliza la RBF multicuádrica con un parámetro de forma hallado experimentalmente. De acuerdo a la naturaleza sin malla del esquema de interpolación empleado, se llega a una estrategia de discretización espacial sumamente versátil en cuanto a geometrías, mallas y condiciones de frontera. El esquema CV-RBF es acoplado con el método de Newton-Raphson y el esquema de discretización temporal de Crank-Nicholson para la solución de problemas no lineales y en estado transitorio. Como aplicación del método se soluciona la ecuación de calor bidimensional para diferentes geometrías y tipos de condiciones de frontera. Se obtienen los resultados para el problema de Dirichlet en conducción de calor, convección de calor con campo de velocidad conocido, conducción en estado transitorio y conducción no lineal. Se verifican los resultados con respecto a soluciones exactas y numéricas validadas, usando mallas estructuradas y no estructuradas. Los errores relativos obtenidos son adecuados en todos los casos estudiados.

1. INTRODUCCIÓN

El Método de Volúmenes Finitos (FVM) se ha convertido en la estrategia de discretización preferida por investigadores en el área de los fenómenos de transporte. La aproximación de flujos difusivos y convectivos en las caras de los volúmenes representaron un claro aspecto de mejoramiento del FVM. La compilación de estrategias realizada por [Patankar \(1980\)](#), y posteriormente por [Versteeg y Malalasekera \(1995\)](#) y [Wesseling \(2001\)](#) ha sido depurada y ampliada en una cantidad de metodologías que buscan disminuir el orden del error de truncamiento de las aproximaciones y por lo tanto aumentar la exactitud de las soluciones numéricas. Además, los esquemas de interpolación en mallados no estructurados se han convertido en un interesante y necesario campo de investigación enmarcado en el problema de encontrar las soluciones a problemas de fenómenos de transporte en dominios con geometrías curvas.

Las mallas no estructuradas parecen ser la mejor opción en cuanto a geometría se trata, pues en estas no es necesario que los volúmenes conserven una orientación definida con respecto a sus vecinos y por lo tanto sus lados son completamente libres para aproximar las curvas presentes en el dominio. La primera complicación es la necesidad de usar mallas desplazadas, estrategia estudiada por [Vidovic et al. \(2004\)](#), o en su defecto esquemas de interpolación que garanticen un buen acoplamiento entre las variables dependientes del problema, tal como lo implementan [Perron et al. \(2004\)](#), en la solución de las ecuaciones de Navier Stokes. Al implementar esquemas de alto orden, [Lilek y Peric \(1995\)](#) evadieron la dificultad de utilizar mallas desplazadas. Otros desarrollos en el uso de mallados no estructurados empleando FVM se pueden apreciar en [Zhao y Zhang \(2000\)](#), [Kim y Choi \(2000\)](#) y [Wang y Liu \(2000\)](#). La combinación de aproximaciones con mallas desplazadas para flujos convectivos y mallas colocadas para difusivos es desarrollada por [Ge y Sotiropoulos \(2007\)](#), mejorando el tiempo de cómputo pero requiriendo una óptima reconstrucción de los gradientes para así no afectar la exactitud lograda con las aproximaciones de alto orden utilizadas. Este último aspecto motiva a [Abgrall \(1994\)](#) a insistir en la posibilidad de reconstruir flujos en mallados triangulares por medio de funciones polinomiales bidimensionales. Por su parte, [Jayantha y Turner \(2005\)](#) investigan la forma de reconstruir los flujos por medio funciones de mínimos cuadrados (*Least Square Reconstruction Technique*, LSRT), mientras [Truscott y Turner \(2004\)](#) y [Manzini y Putti \(2007\)](#) hacen lo mismo utilizando la técnica de reconstrucción de gradientes Gauss-Green (*Gauss Green Reconstruction Technique*, GGRT) en combinación con la aproximación LSRT.

Se puede afirmar que al combinar aproximaciones de orden superior con un adecuado tratamiento de las geometrías, es posible lograr códigos de solución que resuelven las ecuaciones de convección difusión para un gran número de problemas particulares que representan situaciones reales de fenómenos de transporte. El procesamiento geométrico necesario para la definición de aproximaciones de flujos, es la causante de mayores tiempos de cómputo y de la notoria dependencia de los esquemas de interpolación con el tipo de malla utilizada. La interpolación por colocación con Funciones de Base Radial (RBFs) constituye una estrategia que no depende directamente de la configuración espacial de la información y que garantiza altos ordenes de exactitud en las aproximaciones de los flujos.

Actualmente las RBFs son ampliamente utilizadas en la interpolación de datos dispersos por colocación y constituyen la estrategia base de algunos de los procedimientos numéricos que se enmarcan en los métodos Sin Malla para la solución de EDPs. Es [Kansa \(1990\)](#) quien fundamenta el método Sin Malla mediante RBFs, al desarrollar el esquema asimétrico o Método de Kansa, e insiste en la relación intrínseca entre el esquema de interpolación y las ecuaciones diferenciales a solucionar. La principal dificultad encontrada en este trabajo fue el mal condi-

cionamiento de la matriz resultante, que empeora hasta hacer inútil el método con el aumento del número de puntos de colocación. Posteriormente diversas alternativas fueron probadas por Kansa y Hon (2000) con el fin de mejorar el condicionamiento de las matrices resultantes y así lograr la solución de la ecuación de Laplace. Jumarhon et al. (2000) desarrolla una variante del método de Kansa utilizando la interpolación Hermítica, conocida como Método Simétrico. En este se concluye que las RBFs además de funcionar en la interpolación de una función dada, también permiten reconstruir sus derivadas, y que mediante el método simétrico se obtienen errores menores. Posteriormente, el esquema simétrico ha sido empleado en la solución de la ecuación de convección difusión por medio del método de la solución fundamental (*Method of Fundamental Solution* MFS) por LaRocca et al. (2005), y utilizando una doble colocación en los puntos ubicados en las fronteras por LaRocca y Power (2008), con el objetivo de satisfacer la condición de frontera y la ecuación gobernante en dichos puntos.

Debido al límite impuesto por el mal condicionamiento de las matrices resultantes que se puede presentar en las estrategias de interpolación global con RBFs, se introduce la idea de mejorar la exactitud de los métodos clásicos. El Método de Diferencias Finitas (FDM) es modificado por Wright y Fornberg (2006), trabajo en el que se obtienen aproximaciones de orden superior por medio de la interpolación Hermítica con RBFs. El Método de Volúmenes Finitos (FVM) es mejorado mediante la interpolación de los gradientes empleando RBFs en un problema de difusión no lineal en material anisotrópico, tanto en dos, Moroney y Turner (2006), como en tres dimensiones, Moroney y Turner (2007). Orsini et al. (2008) resuelve la ecuación de difusión convección por medio de FVM conjugado con una interpolación Hermítica con RBFs para encontrar expresiones para los flujos convectivos y difusivos en términos de los vecinos.

El uso de RBFs en FVM, en lo que se conoce como *Control Volume-Radial Basis Function* (CV-RBF), permite aprovechar las ventajas de la interpolación Hermítica sin la necesidad de invertir matrices de gran tamaño susceptibles al mal condicionamiento. Además comprende un método en desarrollo que no ha sido implementado en la solución de sistemas acoplados. Siguiendo esta línea de desarrollo, se emplea el método CV-RBF para solucionar diversas situaciones de transferencia de calor. En la siguiente sección se presenta el modelo matemático que modela los fenómenos de transferencia de calor por conducción y convección. Después se explica el método CV-RBF desde su fundamento matemático hasta la ecuación final discretizada para situaciones de convección difusión. Posteriormente se ilustra el acople con el método de Crank-Nicholson para problemas transitorios y el método Newton-Raphson para problemas no lineales. En la última sección se obtienen los resultados numéricos, y se realiza una comparación entre estos y las soluciones analíticas y resultados numéricos validados. Desde el análisis de los errores obtenidos se demuestra la aplicabilidad del método en mallas estructuradas y no estructuradas, y en problemas definidos por condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann.

2. TRANSFERENCIA DE CALOR

Al realizar un balance de energía en un medio continuo despreciando la componente mecánica y estableciendo relaciones entre las propiedades termodinámicas, es posible obtener la ecuación de cambio para la temperatura (1) en un medio incompresible, sea fluido Newtoniano o sólido. En esta los coeficientes son la densidad ρ y capacidad calorífica \hat{C}_p . La ecuación (1) corresponde a la relación entre los mecanismos de transferencia de calor y el cambio en las propiedades termodinámicas del sistema. El vector \vec{q} representa el flux de calor y constituye la contribución por conducción, \vec{v} es la velocidad del medio que hace parte del término convectivo,

y S_T contiene los efectos provocados por las fuentes y sumideros de calor.

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \hat{C}_p v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + S_T \quad (1)$$

El fenómeno molecular responsable del flujo de calor por conducción en un medio cualquiera, puede ser cuantificado a nivel macroscópico mediante la ley de Fourier (2). Según esta expresión el flux de calor es proporcional al gradiente de la distribución de temperatura en el sistema evaluado. El coeficiente de proporcionalidad k es conocido como la conductividad térmica. Esta corresponde a una propiedad que depende principalmente del material que constituye el medio y de la temperatura. Si se trata de una material isotrópico la conductividad se puede expresar como una función escalar.

$$q_i = -k(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2)$$

3. MÉTODO CV-RBF

El método CV-RBF es una mejora a FVM en cuanto a estrategias de interpolación. Actualmente, las RBFs han sido aplicadas por Moroney y Turner (2006), Moroney y Turner (2007) a la solución de la ecuación de difusión en un medio anisotrópico, utilizando la aproximación base del método de Kansa, mientras Orsini et al. (2008), basados en esta primera aproximación, definen el método CV-RBF implementando tanto el método simétrico como el asimétrico y aplicandolo a la solución de la ecuación genérica de convección difusión. A continuación se presenta un proceso de discretización genérico por FVM y la interpolación por colocación por Funciones de Base Radial (RBFs). Finalmente se expone el método resultante de acoplar FVM con la interpolación mencionada.

3.1. Método de Volúmenes Finitos

Se agrupan en el Método de Volúmenes Finitos (FVM) los procedimientos numéricos que tienen como objetivo resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) mediante dos procedimientos básicos: división del dominio en subdominios relativamente pequeños e integración directa de la ecuación sobre cada uno de los subdominios obtenidos. Al aplicar la ecuación gobernante en cada volumen o subdominio y definir sus correspondientes variables dependientes como el valor de la propiedad en un punto específico del subdominio y sus vecinos (centro del volumen, centro de las caras, vértices) se puede obtener un sistema de ecuaciones algebraicas con tantas variables y ecuaciones como volúmenes. A continuación se ilustra el procedimiento de discretización aplicado a una EDP genérica.

Se considera una ecuación de conservación genérica que establece el balance en estado estacionario entre flujos convectivos, flujos difusivos, flujo por reacción y un término fuente S independiente, para la propiedad genérica ϕ . La expresión (3) representa el balance local de la cantidad de interés en estado estacionario, teniendo en cuenta que \vec{U} , D y k_r son respectivamente velocidad del fluido, coeficiente de difusión y coeficiente reactivo.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial U_i \phi}{\partial x_i} + k_r \phi = S(\vec{x}) \quad (3)$$

Al integrar sobre un volumen finito genérico el balance local (3), y aplicar el teorema de la divergencia se obtiene la expresión (4), donde \vec{n} es el vector unitario normal a la superficie que define la frontera del volumen, orientado hacia fuera de este por convención. Tanto para

el término reactivo como para el término fuente, se estima un valor promedio en un punto específico del subdominio (centro para el caso *cell centered*) que al multiplicarlo por el volumen aproxima la integral de volumen, según la regla del punto medio.

$$\oint_S D \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i dS - \oint_S U_i \phi n_i dS + k_r V \bar{\phi}_p = \bar{S} V \quad (4)$$

Dependiendo del tipo de malla utilizada para subdividir el dominio, cada volumen corresponde a un polígono de N_s lados o superficies. Así la integral de superficie total será igual a la sumatoria de las integrales evaluadas en cada una de las áreas que delimitan el volumen. Posteriormente se aproximan las integrales mediante alguno de los métodos numéricos utilizados en la solución de integrales tales como regla del punto medio, regla de Simpson o cuadratura de Gauss. Por simplicidad, en este caso se emplea la regla del punto medio, en la cual la integral de superficie se aproxima al producto entre el valor del integrando evaluado en el punto medio del intervalo (centro de la cara respectiva) y el tamaño del intervalo, para obtener la ecuación discretizada (5).

$$\sum_{l=1}^{N_s} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i S \right) \Big|_l - \sum_{l=1}^{N_s} (U_i \phi n_i S) \Big|_l + k_r V \bar{\phi}_p = \bar{S} V \quad (5)$$

De acuerdo con la expresión (5), es necesario aproximar tanto el valor de la función desconocida como su gradiente en los puntos de integración considerados, en este caso los puntos medios de cada una de las caras. Estas aproximaciones deben relacionar el valor de la variable independiente ϕ y su gradiente con los valores nodales de esta evaluada en el centro del volumen y sus vecinos. De acuerdo con esta relación será posible definir el orden de exactitud del método.

3.2. Método sin Malla y Funciones de Base Radial

Los Métodos Sin Malla son procedimientos numéricos que resuelven EDPs valiéndose de una distribución de puntos en el dominio del problema. La interpolación mediante RBFs es una de las herramientas de uso común en los Métodos Sin Malla, pues una de sus cualidades es el buen comportamiento en el tratamiento de información dispersa en el espacio. Al utilizar RBFs para interpolar la variable dependiente de un problema, el objetivo, como en cualquier método de colocación, es encontrar los coeficientes que permiten a la función aproximada acercarse al valor de la solución exacta del problema. A continuación se ilustran los procedimientos y variantes del método clásico Sin Malla para la solución de EDPs.

Considerando una distribución espacial de puntos en los que se conoce información sobre una variable, es posible encontrar sus valores en cualquier otro punto del dominio que contenga la distribución de puntos iniciales, al hallar una función que se ajuste a los datos disponibles. Diversas estrategias pueden ser utilizadas para tal fin, pero el uso de RBFs constituye el método de mejor rendimiento en cuanto a precisión, eficiencia computacional y estabilidad, según la evaluación realizada por Franke (1982) a una muestra significativa de métodos.

Las RBFs se caracterizan por depender únicamente de la distancia euclidiana entre el argumento y el origen, lo que establece una simetría radial de la función, es decir, su valor no cambia al realizar rotaciones del sistema de coordenadas. Otras características importantes son el crecimiento o decrecimiento monótono de la función con respecto a la distancia del origen, suavidad fácilmente ajustable y excelentes propiedades de convergencia. En el presente desarrollo se utiliza la función Multicuádrica (6), donde $r = \|x - \xi_j\|$ es la distancia euclidiana entre

un punto del dominio x y un punto de prueba ξ_j .

$$\Psi(r) = (r^2 + c^2)^{m/2} \quad (6)$$

La función multicuádrica generalizada (MQ) converge exponencialmente pero es condicionalmente definida positiva de orden $m > 0$ ya que, en el momento de realizar la interpolación, es necesario agregar un polinomio de orden $m - 1$ con el fin de hacer la matriz resultante invertible. Además posee un parámetro de forma c que permite variar la pendiente de la función cerca del punto de colocación. Para valores de c pequeños la función tomará forma de cono que se irá aplanando con el incremento del parámetro.

La función de interpolación s se construye a partir de la combinación lineal de las RBFs $\Psi(r)$ evaluadas en N puntos de prueba, y los términos del polinomio de orden $m - 1$, según la expresión (7).

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Psi(\|x - \xi_j\|) + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+N} P_{m-1}^j(x) \quad (7)$$

Si se tiene la información de la función a aproximar S en los puntos de colocación x_i , es posible construir el sistema de ecuaciones lineales $A\alpha = B$ según (10) y (11), evaluando la función de interpolación en los puntos de colocación de acuerdo con la expresión (8) y agregando la restricción (9), para hacer el sistema invertible. Esta restricción es un artificio matemático que no posee significado físico.

$$S(x_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Psi(\|x_i - \xi_j\|) + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+N} P_{m-1}^j(x_i) \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j P_{m-1}^k(x_j) = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} \Psi & P_{m-1} \\ P_{m-1}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$B = \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Un problema de valores en la frontera lineal y no homogéneo está definido por las expresiones (12) y (13), donde L y B son operadores diferenciales lineales que aplican en el dominio Ω y en la frontera $\partial\Omega$, respectivamente; y ϕ es la variable dependiente. Se conocen dos procedimientos genéricos para llegar a la solución de este problema por medio de RBFs: Método Kansa o asimétrico y Método simétrico.

$$L[\phi(\vec{x})] = f(\vec{x}) \quad (12)$$

$$B[\phi(\vec{x})] = g(\vec{x}) \quad (13)$$

En ambos procedimientos, tal como en el caso de la interpolación, se requiere de un conjunto de N puntos ubicados en el dominio Ω y su frontera $\partial\Omega$, conocidos como puntos de prueba $\vec{\xi}_j$ con $j = 1, \dots, N$. Para llevar a cabo el proceso de colocación también es necesario un conjunto de puntos \vec{x}_i que normalmente coincide con el conjunto de puntos de prueba. Del conjunto de

N puntos dispersos, n se ubican a la frontera y $N - n$ en el interior del dominio; por lo tanto se conoce el valor de $B[\phi]$ en n ubicaciones y de $L[\phi]$ en $N - n$ como datos necesarios para llevar a cabo el proceso.

Se aproxima el valor de la variable dependiente mediante la combinación lineal de RBFs evaluadas en los puntos de prueba $\vec{\xi}_j$ (14). En este caso, se requiere encontrar los valores de los coeficientes α_j , no por medio de los valores de la función desconocida ϕ , si no por la información sobre su comportamiento, brindada por las expresiones (12) y (13).

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|) + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+N} P_{m-1}^j(\vec{x}) \quad (14)$$

Al aplicar los operadores lineales B y L a la expresión (14), y evaluar las funciones resultantes en cada uno de los n puntos de colocación \vec{x}_i para $B[\phi]$, y $N - n$ para $L[\phi]$ se obtiene el sistema de ecuaciones en su forma matricial $A\alpha = B$, después de agregar la restricción (9). A es una matriz no simétrica definida por (15) y el subíndice x hace alusión a la aplicación del operador con respecto a la variable \vec{x} . Aunque el método asimétrico ha sido utilizado para resolver numerosos problemas de valor de frontera, no existe una prueba rigurosa de existencia de la solución y convergencia. Además la matriz resultante puede ser extremadamente mal condicionada para ciertas distribuciones de puntos, lo que la hace no invertible y por lo tanto, el sistema no solucionable. Varias técnicas pueden ser aplicadas con el fin de hacer la matriz no singular, algunas basadas en una elección condicionada tanto de los puntos de prueba como de colocación, y otras perturbando estratégicamente el parámetro de forma de las RBFs utilizadas.

$$A = \begin{pmatrix} B_x[\Psi] & B_x[P_{m-1}] \\ L_x[\Psi] & L_x[P_{m-1}] \\ P_{m-1}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$B = \begin{pmatrix} g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Con el fin de llegar a una matriz A de colocación incondicionalmente invertible se plantea la posibilidad de aproximar la solución por medio de una interpolación Hermítica, basada en la formulación de Hermite-Birkhoff y probada por Schaback y Franke (1998) en la solución de EDPs. En el método simétrico la matriz obtenida es simétrica y del mismo tamaño que la resultante del método asimétrico.

A diferencia del método de Kansa, la variable dependiente del problema se aproxima según la ecuación (17), donde los operadores L_ξ y B_ξ aplican a las funciones de base radial con respecto a la variable $\vec{\xi}$. Por lo tanto se plantea una función de interpolación que contiene información acerca del comportamiento de la variables a aproximar tanto en el dominio como en su frontera.

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_\xi[\Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|)] + \sum_{j=n+1}^N \alpha_j L_\xi[\Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|)] + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+N} P_{m-1}^j(\vec{x}) \quad (17)$$

Al sustituir la ecuación (17) en (12) y (13), se obtienen las expresiones a ser evaluadas en los n puntos de colocación ubicados en las fronteras, y los $N - 1$ localizados al interior del dominio, respectivamente. Se llega al sistema lineal $A\alpha = B$ con las matrices A y B definidas

por (18) y (16). El paso adicional, con respecto a la formulación directa del método asimétrico, comprende el cálculo de los nuevos operadores $B_x B_\xi$, $B_x L_\xi$, $L_x B_\xi$ y $L_x L_\xi$.

$$A = \begin{pmatrix} B_x B_\xi[\Psi] & B_x L_\xi[\Psi] & B_x[P_{m-1}] \\ L_x B_\xi[\Psi] & L_x L_\xi[\Psi] & L_x[P_{m-1}] \\ B_x[P_{m-1}^T] & L_x[P_{m-1}^T] & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

La matriz resultante del método simétrico es no singular siempre y cuando no ocurra que dos puntos de colocación, compartiendo operadores diferenciales linealmente dependientes, sean ubicados en la misma locación; y se elija la RBF apropiada para los operadores diferenciales del problema, es decir, una función que no sea necesariamente nula al aplicarle los operadores.

El método sin malla basado en RBFs, para solución de ecuaciones diferenciales parciales a nivel global, comprende una temática de investigación en desarrollo, pues en la actualidad no se garantiza que el sistema resultante tenga solución para cualquier distribución arbitraria de puntos. El gasto computacional es alto, considerando que, tanto en el método de Kansa como en el Simétrico, la matriz obtenida es *fully populated*, es decir, valores diferentes de cero se encuentran dispersos en toda la matriz y por lo tanto no siguen un patrón determinado. Es por esto que el uso local de interpolación con RBFs en métodos clásicos de solución de EDPs permite explotar algunas de las características más importantes de las RBFs sin la necesidad de invertir matrices de gran tamaño susceptibles al mal condicionamiento.

3.3. El nuevo esquema de interpolación

Para continuar el proceso de solución de la ecuación de convección difusión mediante FVM, se interpola la función ϕ en las caras de un volumen genérico por medio del esquema Simétrico. Como primer paso se debe elegir el conjunto de puntos de prueba $\vec{\xi}_j$ y de colocación \vec{x}_i . En el método CV-RBF, se elige un subespacio que contenga el volumen sobre el cual se discretiza la ecuación genérica y, al menos, un volumen vecino que comparta la cara donde se ubica el punto en el que se interpola la función. Este subespacio recibe el nombre de *stencil* y se puede configurar de diversas formas, siempre y cuando contenga p puntos correspondientes a centros de volúmenes, n puntos de frontera (en el caso que el *stencil* esté limitado por la frontera del dominio) y $N - n - p$ puntos internos diferentes a los ya especificados. Orsini et al. (2008) prueba dos posibles configuraciones: *one stencil one cell* (Figura 1 a.), donde el *stencil* contiene el volumen central y todos los volúmenes vecinos; y *one stencil one face* (Figura 1 b.), en la cual el *stencil* contiene el volumen central y el vecino con el que comparte la cara en la que se realiza la interpolación. En este mismo trabajo se concluye que mediante la configuración *one stencil one cell* se obtienen menores errores en la solución de la ecuación de convección difusión. Es por esta razón que en el presente trabajo se utiliza este arreglo de puntos.

A diferencia del método simétrico convencional, la función ϕ en el punto de interés se aproxima según la interpolación Hermítica (19), resultado de una combinación necesaria entre el método de Kansa y el Simétrico, que permite expresar la aproximación por RBFs de la variable ϕ en el centro de la cara, en términos de los valores nodales desconocidos que le rodean.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) = & \sum_{j=1}^p \alpha_j \Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|) + \sum_{j=p+1}^n \alpha_j B_\xi[\Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|)] \\ & + \sum_{j=n+1}^N \alpha_j L_\xi[\Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|)] + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+N} P_{m-1}^j(\vec{x}) \quad (19) \end{aligned}$$

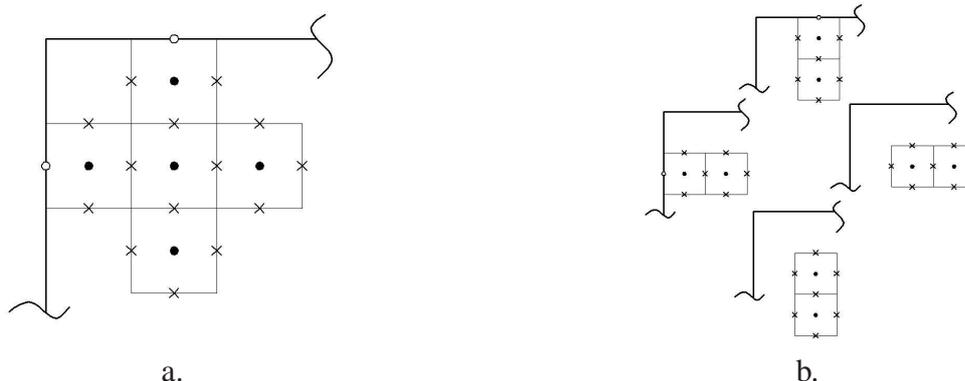


Figura 1: Posibles configuraciones del *Stencil* a. *one stencil one cell* b. *one stencil one face*. ● puntos donde se evalúa la variable, ○ puntos donde se aplica operador de frontera B , × puntos donde se aplica el operador L .

3.3.1. Colocación

Al reemplazar la aproximación (19) en la EDP lineal (12) y las condiciones de frontera (13), se llega al sistema de ecuaciones a resolver para los valores de los coeficientes α , mediante el proceso de colocación en el conjunto de puntos \vec{x}_i y considerando la restricción (9) impuesta al polinomio. Este conjunto contiene p ubicaciones en las que se pretende conocer los valores nodales de ϕ , n puntos en los que se conoce el valor de $g(\vec{x})$, y $N - n - p$ locaciones en las que se tiene la función $f(\vec{x})$. Es así como se llega a un sistema algebraico de ecuaciones de la forma $A\alpha = B$, donde la matriz simétrica A de tamaño $(N + m) \times (N + m)$ está estructurada según (20) y el vector columna B está dado por (21).

$$A = \begin{pmatrix} \Psi & B_\xi[\Psi] & L_\xi[\Psi] & P_{m-1} \\ B_x[\Psi] & B_x B_\xi[\Psi] & B_x L_\xi[\Psi] & B_x[P_{m-1}] \\ L_x[\Psi] & L_x B_\xi[\Psi] & L_x L_\xi[\Psi] & L_x[P_{m-1}] \\ P_{m-1}^T & B_x[P_{m-1}^T] & L_x[P_{m-1}^T] & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$B = \begin{pmatrix} \phi_{vol} \\ g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

La ecuación constituida por las matrices A y B no se puede solucionar aún para los valores de α , pues la matriz B contiene el vector columna ϕ_{vol} cuyos p componentes corresponden a los valores desconocidos de ϕ en los centros del volumen en cuestión y sus vecinos. El proceso de colocación termina cuando los coeficientes α quedan expresados en términos de los p valores nodales presentes en el *stencil* de acuerdo con la ecuación (22).

$$\alpha = A^{-1}B \quad (22)$$

3.3.2. Interpolación local y ensamble global

Conocidos los coeficientes α que definen la aproximación de la función en el *stencil*, es posible encontrar el valor de la función ϕ en cualquier punto de este, en términos de los valores

nodales que contiene el vector columna ϕ_{vol} . En virtud de la aproximación (19) y la linealidad de los operadores, el valor de la función y su gradiente podrán ser evaluados en cualquier punto del *stencil* \vec{x}_i según las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{x}_i} &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|)|_{\vec{x}=\vec{x}_i} + \sum_{j=p+1}^n \alpha_j B_\xi[\Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|)]|_{\vec{x}=\vec{x}_i} \\ &+ \sum_{j=n+1}^N \alpha_j L_\xi[\Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|)]|_{\vec{x}=\vec{x}_i} + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+N} P_{m-1}^j(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{x}_i} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_i} &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|) \right) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_i} + \sum_{j=p+1}^n \alpha_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} B_\xi[\Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|)] \right) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_i} \\ &+ \sum_{j=n+1}^N \alpha_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} L_\xi[\Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|)] \right) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_i} + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+N} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} P_{m-1}^j(\vec{x}) \right) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_i} \end{aligned} \quad (24)$$

En su forma matricial, las ecuaciones (23) y (24) pueden ser escritas de la siguiente forma.

$$[\phi(\vec{x})]_{\vec{x}=\vec{x}_i} = [C_{1l}]^T [\alpha] \quad (25)$$

$$\left[\frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{x}_i} = [C_{2il}]^T [\alpha] \quad (26)$$

Prosiguiendo con la solución de la ecuación mencionada, es necesario sustituir en la expresión (5) las N_s (número de superficies) aproximaciones de la función (25) y su gradiente (26). Estos se encuentran en términos de los valores nodales del *stencil* respectivo y se evalúan en el punto \vec{x}_l , que ahora corresponde al centro de la superficie l . El proceso de sustitución y el valor de la matriz α según (22), produce la ecuación de convección difusión más reacción discretizada por el método CV-RBF y aplicada a un volumen genérico (27).

$$\left(\sum_{l=1}^{N_s} (DC_{2i}^T n_i S)|_l - \sum_{l=1}^{N_s} (U_i C_1^T n_i S)|_l \right) A^{-1} B + kV \bar{\phi}_p = \bar{S}V \quad (27)$$

Al aplicar la ecuación (27) a cada uno de los volúmenes del dominio, será posible construir el sistema lineal global a resolver. El objetivo es hallar los valores de ϕ en todos los centros de los volúmenes, es decir las cantidades que conforman el vector columna ϕ_{vol} . Conocida la función en los nodos o centros, y reemplazando su valor en (22) para hallar los coeficientes α , se podrá conocer la función y su gradiente en cualquier punto del dominio, identificando el *stencil* que lo contiene y aplicando las expresiones (23) y (24).

Gracias a la interpolación Hermítica por RBFs, el método CV-RBF se constituye como una aproximación de alto orden que además contiene un esquema analítico de diferencias desplazadas (*upwind*), pues las aproximaciones contienen la información sobre el coeficiente convectivo U_i . Debido a la naturaleza Sin malla de la interpolación, otras cualidades importantes son la gran versatilidad en el tratamiento de fronteras, y la independencia con respecto al tipo de malla utilizado, pues no es necesario que esta sea estructurada.

4. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

4.1. Método de Crank-Nicholson

Para obtener la solución de problemas transitorios se hace necesario un acople entre un método clásico de discretización temporal (Crank-Nicholson) y el método CV-RBF, hasta ahora desarrollado para el análisis espacial. Con este objetivo se crea el código DCCVRBFt que tiene la capacidad de resolver la ecuación (28) que corresponde al modelo matemático para la convección difusión y reacción (de primer orden) en estado transitorio de una propiedad genérica ϕ en un medio incompresible. En esta expresión k_t es un coeficiente que acompaña el término de acumulación mientras los coeficientes restantes corresponden a las cantidades de la ecuación (3), con $S(\vec{x}) = 0$.

$$k_t \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial U_i \phi}{\partial x_i} + k_r \phi \quad (28)$$

En primer lugar se realiza la discretización temporal de la ecuación (28), de acuerdo con el método de Crank-Nicholson, para generar la expresión (29). θ es una constante de peso que puede dar al esquema la calidad de implícito ($\theta = 1$), explícito ($\theta = 0$) o una combinación de segundo orden en el tiempo mediante valores intermedios.

$$\begin{aligned} \frac{\phi(\vec{x}, t + \Delta t) - \phi(\vec{x}, t)}{\Delta t} = & \frac{\theta}{k_t} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \phi(\vec{x}, t + \Delta t)}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial U_i \phi(\vec{x}, t + \Delta t)}{\partial x_i} - k_r \phi(\vec{x}, t + \Delta t) \right) \\ & + \frac{(1 - \theta)}{k_t} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial U_i \phi(\vec{x}, t)}{\partial x_i} - k_r \phi(\vec{x}, t) \right) \quad (29) \end{aligned}$$

Esta nueva expresión es utilizada por LaRocca et al. (2005) para redefinir, en un esquema global, los operadores diferenciales parciales que constituyen la matriz Hermítica. En el caso local y empleando FVM no es necesario modificar los operadores ya que el efecto del avance en el tiempo es incluido en el esquema mediante la ecuación resultante de aplicar FVM. La ecuación (29) se lleva a la forma (30) realizando una discretización espacial por FVM y reemplazando los valores de la variable y su gradiente por aquellos que entrega la interpolación Hermítica. El término fuente corresponde al operador diferencial aplicado al valor de la variable en la iteración anterior ($n - 1$).

$$\begin{aligned} & \theta \Delta t \left(\left(\sum_{l=1}^{N_s} \left(\frac{D}{k_t} C_{2i}^T n_i S \right) \Big|_l - \sum_{l=1}^{N_s} \left(\frac{U_i}{k_t} C_1^T n_i S \right) \Big|_l \right) A^{-1} B - \left(\frac{k_r}{k_t} + \frac{1}{\theta} V \right) \bar{\phi}_p \right) \\ = & (\theta - 1) \Delta t \left(\sum_{l=1}^{N_s} \left(\frac{D}{k_t} \frac{\partial \phi^{n-1}}{\partial x_i} n_i S \right) \Big|_l - \sum_{l=1}^{N_s} \left(\frac{U_i}{k_t} \phi^{n-1} n_i S \right) \Big|_l - \left(\frac{k_r}{k_t} + \frac{1}{(\theta - 1)} V \right) \bar{\phi}_p^{n-1} \right) \quad (30) \end{aligned}$$

4.2. Método de Newton-Rapshon

Los modelos matemáticos que describen fenómenos de transporte mediante EDPs lineales son en general aproximaciones al comportamiento real de los sistemas. Los procesos reales de transporte de masa, energía y momentum son fundamentalmente no lineales, pues existe una fuerte dependencia entre las propiedades que caracterizan el sistema y los mecanismos

de transporte y acumulación. Ejemplo de no linealidad en procesos de transferencia de calor en medios incompresibles, es la dependencia de la conductividad y el calor específico con la temperatura. Para la solución por CV-RBF, se considera la EDP no lineal de la forma (31). Esta expresión modela un fenómeno de convección difusión reacción con coeficientes en términos de la variable dependiente ϕ , teniendo en cuenta que S_f es una término fuente que toma en cuenta el flujo de ϕ por reacción.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial U_i(\phi) \phi}{\partial x_i} + S_f(\phi) = S(\vec{x}) \quad (31)$$

De la misma manera que para el caso lineal, se lleva a cabo el proceso de discretización de la ecuación (31) según el método FVM. Se obtiene la función no lineal (32) que conforma el sistema de ecuaciones global al ser aplicada a cada uno de los volúmenes (de N_s lados) en que se divide el dominio.

$$f \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) = \sum_{l=1}^{N_s} \left(D(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i S \right) \Big|_l - \sum_{l=1}^{N_s} (U_i(\phi) \phi n_i S) \Big|_l + V(\bar{S}_f - \bar{S}) = 0 \quad (32)$$

La ecuación resultante (32) se resuelve utilizando el método de Newton-Raphson. Con los valores iniciales y empleando la interpolación Hermítica por RBF es posible evaluar la función no lineal en las locaciones requeridas. Se debe tener en cuenta que para la aplicación del esquema de interpolación es necesario llevar el operador diferencial parcial L_x a una de sus posibles formas lineales, en este caso, una ecuación de Poisson (33). El superíndice n se refiere al valor de la variable en la n -ésima iteración. Esta forma lineal del operador L_x resulta de extraer todas las cantidades que deban ser recalculadas iteración tras iteración, con el fin de realizar la inversión de matrices de interpolación solo una vez al inicio del algoritmo. La matriz Jacobiana se evalúa numericamente mediante un esquema de diferencias centradas.

$$L_x(\phi^n) = \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{D(\phi^{n-1})} \left(\frac{\partial U_i(\phi^{n-1}) \phi^{n-1}}{\partial x_i} - \frac{\partial D(\phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi^{n-1}}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^{n-1}}{\partial x_i} + S(\vec{x}) - S_f(\phi^{n-1}) \right) \quad (33)$$

5. RESULTADOS

El método CV-RBF en conjunto con la estrategias numéricas mencionadas, se aplican a la solución de la ecuación de calor (1) para diversas situaciones típicas en transferencia de calor, a modo de validación y aplicación. A continuación se ilustra la aplicabilidad del método CV-RBF y se evalúa su desempeño en problemas bidimensionales de conducción lineal, convección, conducción transitoria y conducción no lineal, empleando diferentes tipos de condiciones de frontera y mallas.

5.1. Placa Plana: Problema de Dirichlet

Se analiza a continuación la transferencia de calor por conducción en estado estacionario en una placa plana. Las características geométricas del problema a solucionar se ilustran en la Figura 2. Para este caso en el cual se aplica una condición tipo Dirichlet en todas sus fronteras, se define $\theta = T - T_1$. T_1 es el valor de la temperatura en las fronteras, excepto en $x_2 = W$

donde la temperatura es una función conocida $f(x_1)$. La solución analítica al problema se logra por medio del método de separación de variables y corresponde a la expresión (34).

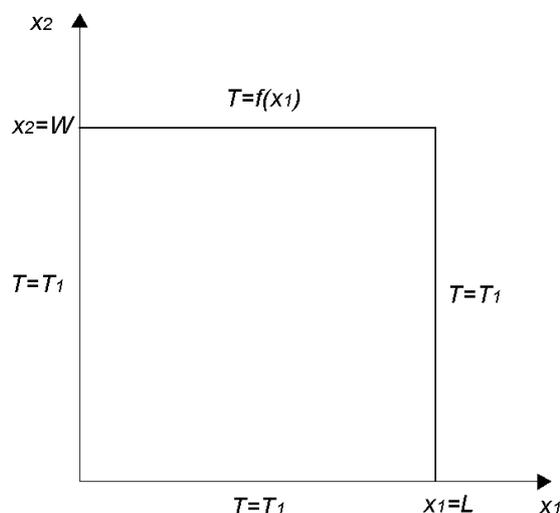


Figura 2: Geometría y condiciones de frontera para la conducción estacionaria de calor en una placa rectangular

$$\theta(x_1, x_2) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(n\pi x_2/L)}{\sinh(n\pi W/L)} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \int_0^L f(x_1) \sin\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) dx_1 \quad (34)$$

Con el fin de evaluar el rendimiento del código DCCVRBF en situaciones de conducción bidimensional, se utilizan las siguientes dos formas de la función $f(x_1)$ con sus respectivas soluciones particulares derivadas de la ecuación (34).

- $f(x_1) = T_2$
- $f(x_1) = T_2 \sin\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right)$

En el primer caso la solución analítica particular toma la forma (35), donde $\theta_f = T_2 - T_1$. Para el segundo caso se obtiene como solución la expresión (36), teniendo en cuenta un valor máximo de la variable dependiente en la frontera superior definido por $\theta_m = T_2 - T_1$ con T_2 representando el valor máximo de temperatura. Se consideran dimensiones $L = W = 1$, y valores para T_2 y T_1 iguales a 120 y 20 °C respectivamente.

$$\theta(x_1, x_2) = \theta_f \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \frac{\sinh(n\pi x_2/L)}{\sinh(n\pi W/L)} \quad (35)$$

$$\theta(x_1, x_2) = \theta_m \sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) \frac{\sinh(\pi x_2/L)}{\sinh(\pi W/L)} \quad (36)$$

Se utiliza el código creado DCCVRBF para obtener la solución numérica de ambos casos por medio del método CV-RBF. Para la primera situación se divide el dominio del problema en una malla estructurada homogénea de 10×10 volúmenes. En la Figura 3 se comparan los resultados obtenidos con la solución analítica en las líneas $x_2 = 0.25$, $x_2 = 0.50$ y $x_2 = 0.75$, y se ilustra el comportamiento del error en estas rectas. Se utiliza la función MQ con $m = 1$ para

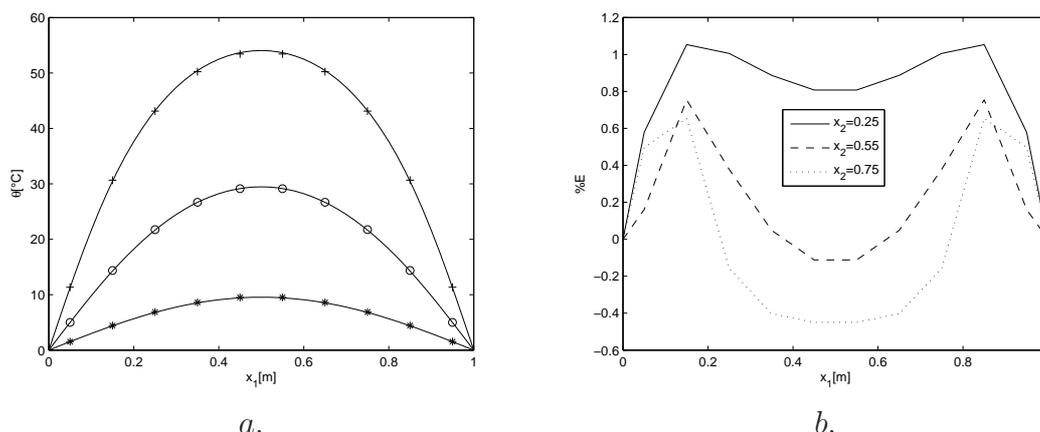


Figura 3: Valores de temperatura para el problema de conducción estacionaria en una placa plana (Primera situación). a) Comparación con la solución exacta (línea continua) en las rectas $x_2 = 0.25$ (*), $x_2 = 0.5$ (o) y $x_2 = 0.75$ (+) b) Comportamiento del error relativo

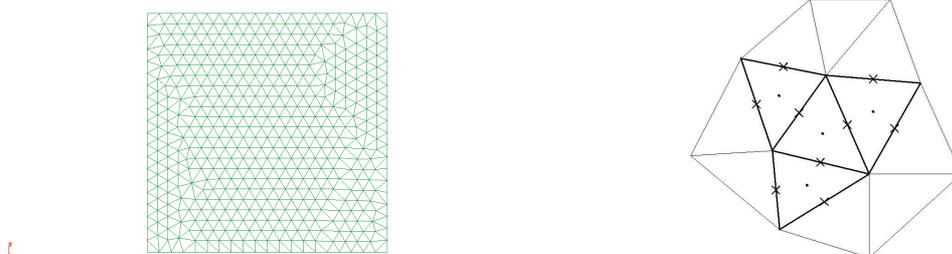


Figura 4: División del dominio en la segunda situación: a. Malla no estructurada, b. *Stencil* correspondiente

realizar la interpolación Hermítica propia del método simétrico, con parámetro de forma igual al tamaño del lado de cada volumen.

Con el objetivo de ilustrar la independencia del método con respecto a la malla, se utiliza una división no estructurada del dominio (Figura 4 a.) en la solución del segundo caso con condición de frontera tipo Dirichlet. En la Figura 4 b. se ilustra la configuración *one stencil-one cell* de un *stencil* interno en la malla no estructurada. Al igual que en el caso anterior se compara la solución numérica con la solución analítica y se evalúa la tendencia del error relativo en las líneas del dominio donde $x_2 = 0.25$, $x_2 = 0.50$ y $x_2 = 0.75$, como se puede apreciar en la Figura 5.

Se calculan el error RMS y el error máximo para cada uno de los casos analizados. La Tabla 1 muestra el valor y comportamiento de tales parámetros conforme aumenta la densidad de malla, tanto para el caso estructurado (primera situación) como para el no estructurado (segunda situación). Se observa como el error disminuye conforme aumenta la densidad de malla, lo cual además de asegurar la convergencia del método, verifica una relativa independencia del esquema con respecto al tipo de malla utilizado.

En las Figuras 3 a. y 5 a. se ilustra la forma de las distribuciones de temperatura obtenidas, las cuales mantienen la tendencia y valores dados por los resultados analíticos. La cercanía entre los valores se puede apreciar en las Figuras 3 b. y 5 b. donde se reporta el error relativo a la solución exacta, que tanto para la malla estructurada en la situación 1 y para la no estructurada en la 2 se encuentran valores menores al 1.2 % y 4 % respectivamente. De acuerdo con estos

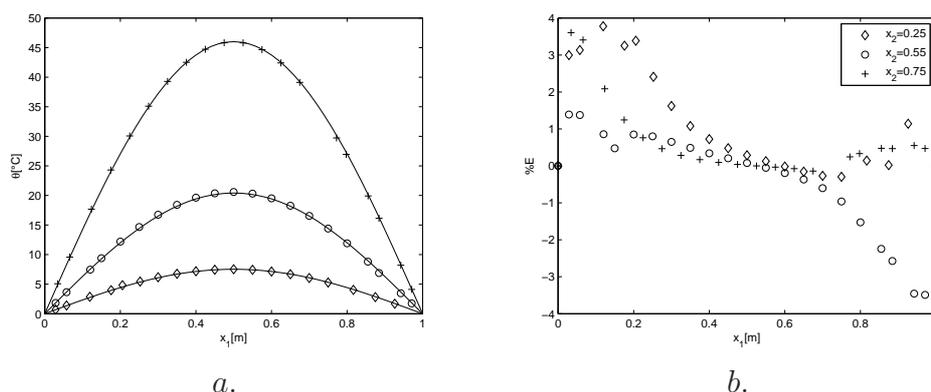


Figura 5: Valores de temperatura para el problema de conducción estacionaria en una placa plana (Segunda situación). a. Comparación con la solución exacta (línea continua) en las rectas $x_2 = 0.25$ (\diamond), $x_2 = 0.50$ (o) y $x_2 = 0.75$ ($+$) b. Comportamiento del error relativo

valores es posible afirmar que mediante el método CV-RBF se soluciona de manera adecuada el problema lineal de conducción de calor con condiciones de frontera tipo Dirichlet, utilizando una función Multicuádrica con $m = 1$ y mallas medianamente densas (100 volúmenes).

Tabla 1: Indicadores de la solución de la ecuación de conducción de calor bidimensional

Malla Situación 1	ϵ_{max}	ϵ_{RMS}	Malla Situación 2	ϵ_{max}	ϵ_{RMS}
5×5	0.0064	0.0023	32 vol	0.0422	0.0165
10×10	0.0034	0.0012	100 vol	0.0245	0.0105
20×20	0.0028	0.00067	384 vol	0.0136	0.0042
30×30	0.0028	0.00035	882 vol	0.0053	0.0013

5.2. Convección forzada en flujo Poiseuille

A continuación se estudia la situación de flujo de calor a través de un fluido que se encuentra en movimiento. Se analiza el comportamiento de la solución de las ecuaciones de convección difusión con coeficiente convectivo dependiente de la posición, obtenida mediante CV-RBF. Se consideran dos placas planas paralelas entre las cuales se mueve en la dirección x_1 un fluido Newtoniano e incompresible de propiedades constantes, tal como se muestra en la Figura 6. La primera placa esta ubicada en $x_2 = 0$ y a la otra en $x_2 = H$. El fluido está hidráulicamente desarrollado, se encuentra en estado estacionario y su velocidad es independiente de la temperatura. De acuerdo con la geometría y tipo de fluido, el campo de velocidad está descrito por el perfil parabólico (37), también conocido como Flujo Poiseuille plano.

$$u_1(x_2) = (u_1)_{max} \left(1 - \left(\frac{x_2 - 0.5H}{0.5H} \right)^2 \right) \quad (37)$$

La transferencia de calor se da desde los alrededores al fluido cuando este, que se encuentra a una temperatura uniforme T_0 , atraviesa la recta $x_1 = 0$ y es calentado por las placas que permanecen a una temperatura constante T_1 , y alcanza el estado estacionario. La ecuación que modela el fenómeno esta dada por la expresión (1) eliminando los términos de acumulación y fuentes. Las condiciones de frontera se definen según (38) y (40), y el dominio es dividido

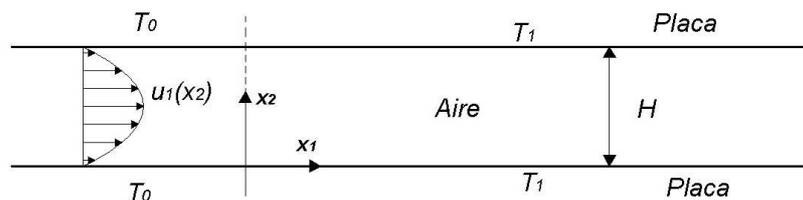


Figura 6: Configuración geométrica del problema de transferencia de calor entre placas

mediante una malla estructurada 30×90 . La solución analítica del presente modelo es conocida como el problema de Graetz en coordenadas rectangulares y aún no existe una forma cerrada de la solución. Por lo tanto la comparación de resultados se hace con respecto a los obtenidos por [Divo y Kassab \(2005\)](#) mediante método sin malla empleando interpolación global con RBF y a su vez comparados con la solución arrojada por el programa comercial Fluent.

$$T(0, x_2) = T_0 \quad (38)$$

$$T(x_1, 0) = T(x_1, L) = T_1 \quad (39)$$

$$\frac{\partial T(L, x_2)}{\partial x_1} = 0 \quad (40)$$

Se elige como fluido de trabajo aire con calor específico $\hat{C}_p = 1006.46 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$, densidad $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ y conductividad $k = 0.0242 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$. El perfil parabólico que describe el movimiento del fluido se caracteriza por una velocidad máxima $u_{1max} = 0.25 \text{ m/s}$.

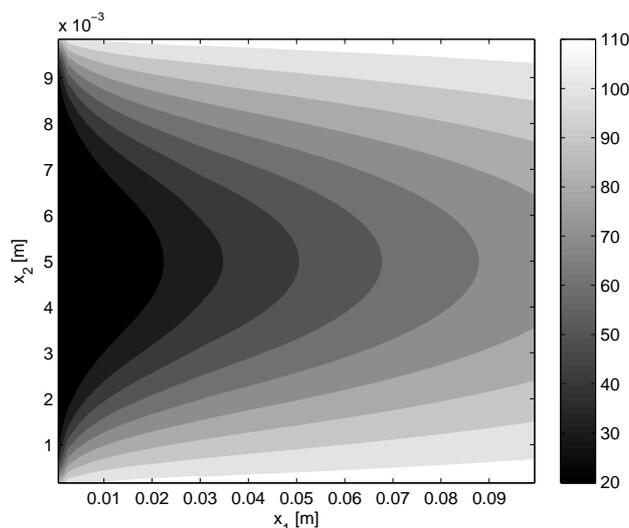


Figura 7: Distribución de temperatura en flujo Poiseuille plano con temperatura constante en paredes

El perfil de temperatura en desarrollo encontrado se ilustra en la Figura 7. La distribución obtenida ilustra el calentamiento del fluido debido a la diferencia de temperatura existente entre

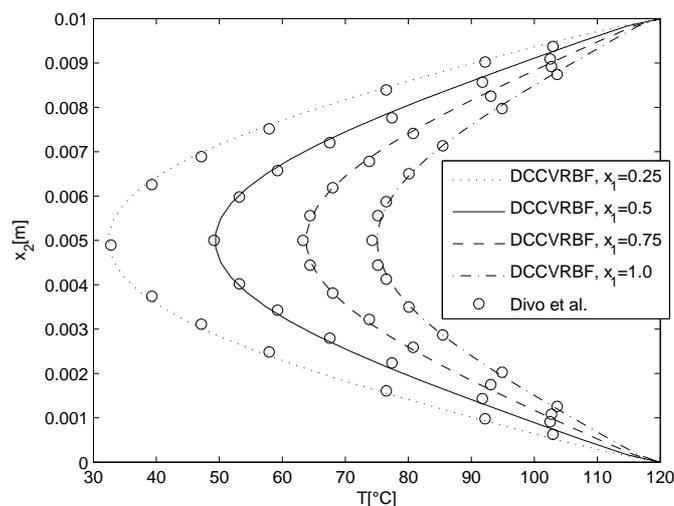


Figura 8: Perfiles de temperatura en desarrollo en un flujo Poiseuille plano

este y las paredes. El fluido, mediante el mecanismo de la convección forzada, extrae calor del medio circundante, en este caso, las placas. Se presenta la parte de perfil térmico en desarrollo, pues es de esperarse que a una longitud determinada de la entrada, la temperatura no varíe en la dirección x_1 para establecer un flujo térmica e hidráulicamente desarrollado. En la Figura 8 se muestra el proceso de desarrollo del perfil de temperatura conforme aumenta x_1 , además de la verificación de los resultados con la solución numérica referenciada.

El comportamiento de la solución de la ecuación es adecuado. El efecto convectivo es bien percibido por el esquema de interpolación, teniendo en cuenta un $Pe \approx 1200$. Las condiciones de frontera impuestas responden a la situación real, incluyendo la restricción tipo Neumann que predice la variación nula en la temperatura a la longitud que delimita el dominio. El parámetro de forma de la ecuación MQ $m = 1$ se hace constante en todo el dominio excepto en la zona ubicada cerca de la frontera $x_1 = 0.0$ donde ocurre un cambio sustancial de la temperatura, y en la cual el parámetro se hace 5 veces más grande.

5.3. Calentamiento de una placa plana

Una placa plana rectangular de lados $2l_{x_1}$ y $2l_{x_2}$ que se encuentra a temperatura ambiente T_0 , experimenta un proceso de calentamiento cuando sus fronteras son puestas en contacto con una fuente de calor a temperatura constante T_1 . Como se trata de una situación simétrica con respecto al centro de la placa, se analiza solo un cuadrante de la misma mediante la aplicación de una condición de frontera tipo Neumann en los planos de simetría. A continuación se describe de manera exacta las condiciones de frontera e iniciales para la solución de la ecuación de calor (1) en estado transitorio considerando $\vec{u} = \vec{0}$ y ausencia de fuentes.

$$T(x_1, x_2, 0) = T_0 \quad (41)$$

$$T(L_{x_1}, x_2, t) = T(x_1, L_{x_2}, t) = T_1 \quad (42)$$

$$\frac{\partial T(0, x_2, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial T(x_1, 0, t)}{\partial x_2} = 0 \quad (43)$$

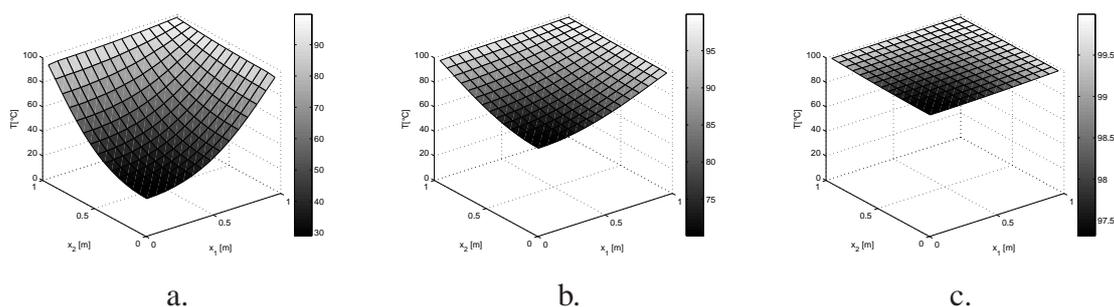


Figura 9: Distribuciones de temperatura en diferentes momentos del calentamiento de una placa plana: a. $Fo = 0.1$, b. $Fo = 0.3$, c. $Fo = 0.8$

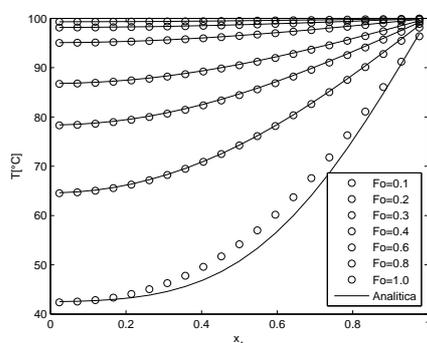


Figura 10: Perfiles de temperatura en $x_2 = 0.5$ en calentamiento de placa plana

El fenómeno se caracteriza mediante el número adimensional de Fourier $Fo = \alpha t / l_x$, y se consideran las propiedades constantes a $25\text{ }^\circ\text{C}$ de una aleación de Aluminio T6: $k = 180\text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$, $\hat{C}_p = 900\text{ J/kg }^\circ\text{C}$ y $\rho = 2800\text{ kg/m}^3$. La solución analítica está dada por la expresión (44), que es obtenida mediante el método de separación de variables. Se utiliza una función Multicuádrica con $m = 1$ y $c = 0.01h$ (h es una longitud característica de la malla). Se divide el dominio rectangular de $l_{x_1} = l_{x_2} = 1\text{ m}$ con una malla estructurada de 21×21 elementos, se estima un $\Delta t = 100\text{ s}$ y se utiliza un esquema semi-implícito fijando $\theta = 0.5$.

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n + \frac{1}{2}\pi\right)} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2 Fo} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x_2}{L_{x_2}} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\left(m + \frac{1}{2}\pi\right)} e^{-(m+\frac{1}{2})^2 \pi^2 Fo} \cos \left(\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x_1}{L_{x_1}} \right) \right) \quad (44)$$

En la Figura 9 se muestran las distribuciones de temperatura en tres diferentes momentos de la solución. La evolución de la temperatura es acorde con las propiedades físicas del medio y las condiciones de frontera establecidas. La solución analítica tiene problemas de convergencia para Fo cercanos a cero, por lo tanto se evalúa el comportamiento solo hasta $Fo = 0.1$, momento en el cual la temperatura en el centro de la placa, tanto numérica como exacta, es aproximadamente

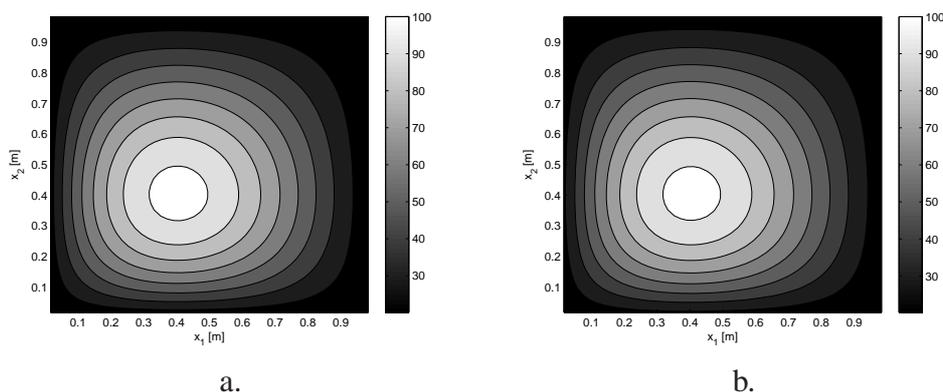


Figura 11: Solución del problema de conducción de calor en material de conductividad variable: a. Exacta, b. Numérica

de 41 °C. En la Figura 10 se ilustra el comportamiento de la solución en la recta $x_2 = 0.5$ para distintos momentos. Se puede apreciar la exactitud de los resultados numéricos excepto en $Fo = 0.1$ al aumentar x_1 , donde el error se hace notorio e indeterminado como consecuencia de la divergencia de la solución analítica.

5.4. Conducción de calor no lineal

Se considera una situación hipotética de conducción de calor en un material de conductividad dependiente de la temperatura y fuente independiente. El fenómeno es modelado mediante la ecuación (31) con $\phi = T - T_\infty$, $D = T^{1.3}$, $\vec{U} = \vec{0}$, $S_f = 0$ y S obtenida al sustituir en la EDP la solución impuesta (45). La geometría del problema y las condiciones de frontera son análogas a las mostradas en la Figura 2 teniendo en cuenta una $f(x_1) = T_1$ y $T_\infty = T_1$ y un valor de $L = W = 1$.

$$T(x_1, x_2) - T_\infty = 100T_\infty x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2) e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \quad (45)$$

Se evalúa el comportamiento de la solución numérica obtenida utilizando una MQ con $m = 1$ y un parámetro de forma $c = 0.1h$, donde h es una longitud característica de cada *stencil*. Se utiliza una malla estructurada de 30×30 volúmenes. En la Figura 11 se compara el contorno exacto con el numérico para observar la cercanía de la solución numérica. También se analiza con mayor detalle el valor de la temperatura en la recta $x_1 = 0.5$ mediante las Figuras 12 a. y 12 b., donde se aprecia la cercanía entre los resultados considerando un bajo error relativo. Este aumenta al acercarse a las fronteras pero sin afectar notoriamente el comportamiento global de la solución, pues se obtiene un $\epsilon_{RMS} = 0.54\%$.

Se reportan tendencias del error residual para el proceso iterativo en la que, según la Figura 12 c., se puede observar un comportamiento estable y una velocidad de convergencia relativamente alta. Por medio de las pruebas de convergencia y exactitud realizadas al código creado (DCCVRBFnl) se demuestra su validez y se asegura un buen funcionamiento.

6. CONCLUSIONES

Se solucionaron adecuadamente las EDPs que modelan situaciones básicas en transferencia de calor mediante códigos creados para la aplicación del método CV-RBF. Esta primera aproxi-

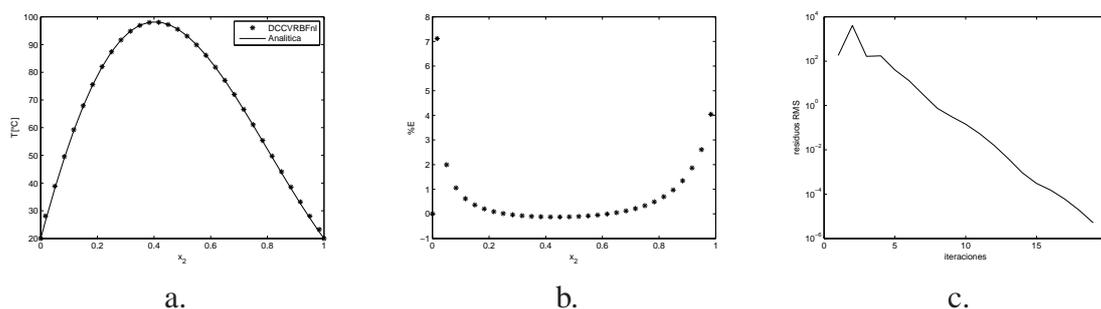


Figura 12: Problema de conducción de calor en material de conductividad variable, a. Temperatura en $x_1 = 0.5$, b. Error relativo en $x_1 = 0.5$, c. Error residual

mación al método resulta exitosa teniendo en cuenta los modelos estudiados y su fácil acople a los diferentes métodos numéricos clásicos como son el método de Newton-Raphson y el método de Cranck-Nicholson.

El método CV-RBF es una versión mejorada del esquema clásico de FVM al permitir una mayor versatilidad en el tratamiento de geometrías gracias a la interpolación Hermítica por RBF que garantiza la independencia con respecto al tipo de malla empleado. Los resultados obtenidos en las validaciones realizadas en mallas estructuradas y no estructuradas muestran gran correspondencia con los datos de referencia.

La función Multicuádrica MQ con $m = 1$ registra buen comportamiento en las simulaciones realizadas. El parámetro de forma es variable en el dominio y sus valores, para las simulaciones realizadas, son del orden de una décima parte del tamaño de malla, en promedio. Los valores registrados para el valor del parámetro de forma en la literatura relacionada aún no son universales y solo aplican para las situaciones y esquemas de interpolación específicos. Por lo tanto la labor experimental de encontrar los valores óptimos se hace mediante el análisis del error relativo o el error residual, en un proceso aún tedioso, que se convierte en un aspecto a mejorar en el método.

La capacidad de solución de problemas en mallas no estructuradas, un esquema de interpolación de alto orden con cualidades de esquemas de diferencias desplazadas (*upwind*), errores relativos bajos y una buena convergencia al ser acoplado con métodos tradicionales, son las principales fortalezas del método CV-RBF. Estas cualidades invitan a continuar su desarrollo encaminado a la modelación y simulación de situaciones reales mediante la solución de sistemas de EDPs acoplados.

REFERENCIAS

- Abgrall R. On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 114(1):45–98, 1994.
- Divo E. y Kassab A.J. A meshless method for conjugate heat problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(1):136–149, 2005.
- Franke R. Scattered data interpolation: tests of some methods. *Mathematical Computation*, 38(157):181–200, 1982.
- Ge L. y Sotiropoulos F. A numerical method for solving the 3d unsteady incompressible navier-stokes equations in curvilinear domains with complex immersed boundaries. *Journal of Computational Physics*, 225(2):1782–1809, 2007.

- Jayantha P.A. y Turner I.W. A second order control-volume-finite-element least-squares strategy for simulating diffusion in strongly anisotropic media. *Journal of Computational Physics*, 23(1):1–16, 2005.
- Jumarhon B., Amini S., y Chen K. The hermite collocation method using radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24(7–8):607–611, 2000.
- Kansa E.J. Multiquadrics -a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-ii solution to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with applications*, 19(8–9):127–145, 1990.
- Kansa E.J. y Hon Y.C. Circumventing the ill- conditioning problem with multiquadric radial basis functions: Applications to elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with applications*, 39(1):123–137, 2000.
- Kim D. y Choi H. A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 162(2):411–428, 2000.
- LaRocca A., Hernandez A., y Power H. Radial basis functions hermite collocation approach for the solution of time dependent convection-diffusion problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29:359–370, 2005.
- LaRocca A. y Power H. A double boundary collocation hermitian approach for the solution of steady state convection-diffusion problems. *Computers & Mathematics with applications*, 55(9), 2008.
- Lilek Z. y Peric M. Fourth-order finite volume method with collocated variable arrangement. *Computers & Fluids*, 24(1):239–252, 1995.
- Manzini G. y Putti M. Mesh locking effects in the finite volume solution of 2-d anisotropic diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 220(1):751–771, 2007.
- Moroney T.J. y Turner I.W. A finite volume method based on radial basis functions for two-dimensional nonlinear diffusion equations. *Applied Mathematical Modelling*, 30(10), 2006.
- Moroney T.J. y Turner I.W. A three dimensional finite volume method based on radial basis functions for the accurate computational modelling of nonlinear diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 225(2), 2007.
- Orsini P., Power H., y Morovan H. Improving volume element methods by meshless radial basis function techniques. *Computer modelling in Engineering and Sciences*, 769(1):1–21, 2008.
- Patankar S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences. Taylor & Francis, 1980.
- Perron S., Boivin S., y Hérard J. A finite volume method to solve the 3d navier stokes equations on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 33(10):1305–1333, 2004.
- Schaback R. y Franke C. Convergence order estimates of meshless methods using radial basis functions. *Advances in Computational Mathematics*, 8(4):381–399, 1998.
- Truscott S.L. y Turner I.W. An investigation of the accuracy of the control volume-element based on triangular prismatic elements for simulating diffusion in anisotropic media, part b: Fundamentals. *Numerical Heat Transfer*, 46(1):243–268, 2004.
- Versteeg H.K. y Malalasekera W. *Introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Longman Scientific & Technical, 1995.
- Vidovic D., Segal A., y Wesseling P. A superlinearly convergent finite volume method for the incompressible navier stokes equations on staggered unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 198(1):159–177, 2004.
- Wang J. y Liu R. A comparative study of finite volume methods on unstructured meshes for simulation of 2d shallow water wave problems. *Mathematics and Computers in Simulation*,

53(3):171–184, 2000.

Wesseling P. *Principles of computational fluid dynamics*. Computational Mathematics. Springer, 2001.

Wright G. y Fornberg B. Scattered node compact finite difference-type formulas generated from radial basis functions. *Journal of Computational Physics*, 212(1), 2006.

Zhao J. y Zhang B. A high-order characteristics upwind incompressible flow and heat transfer simulation on unstructured grids. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(5–7):733–756, 2000.