

REMALLADO MÍNIMO EN PROBLEMAS DE SPINNING-FORMING

Pablo J. Novara^a y Nestor A. Calvo^{a,b}

^a*Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, Ciudad Universitaria, Santa Fe, Argentina, zaskar_84@yahoo.com.ar*

^b*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería - CIMEC (INTEC). Parque Tecnológico Litoral Centro, Santa Fe, Argentina.*

Palabras Clave: Remallado, spinning forming

Resumen. En *spinning forming* una pieza giratoria se va conformando desde la periferia por presión de una herramienta móvil. Los nodos de la malla reciben un movimiento lagrangiano manteniendo sus conectividades de modo que cuando la deformación resulta excesiva la calidad de la malla se torna inaceptable para el cálculo. En estos problemas es de vital importancia reducir el número de remallados, pues la proyección de las soluciones de un paso de tiempo a una malla diferente genera diversos problemas de índole numérica y algorítmica. Se presentan los métodos utilizados para lograr un remallado que respete la estructura topológica de revolución pero a la vez repositone los nodos tanto en la periferia como en el interior permitiendo mejorar la calidad de la malla. También se describen los métodos utilizados para mapear la solución de los viejos a los nuevos puntos de Gauss.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se describen las técnicas y los algoritmos implementados para el remallado de una pieza deformada durante la simulación del proceso de *spinning forming*. El software anfitrión es un programa que simula el conformado de la pieza giratoria, por presión de contacto desde la periferia. En el proceso los nodos de la malla se van moviendo en forma lagrangiana, conforme avanza radialmente la herramienta. La malla se deforma, hasta que algún indicador de calidad mínima dispara una solicitud de remallado. Llegado ese punto de deformación, el programa pasa el control a las rutinas de remeshing con los datos necesarios para que el subsistema reconozca la geometría del problema. El desarrollo aquí presentado resuelve el problema de obtener una nueva malla de mejor calidad, interpolar los nuevos puntos de Gauss (PDG) sobre los viejos y devolver los datos y el control al programa padre.

El mecanismo de remallado debe ser utilizado la menor cantidad de veces posibles durante la simulación. Esto obedece a dos razones principales: 1) remallar excesivamente incrementa en forma considerable los tiempos de cálculo, y 2) los valores nodales y los valores asociados a los PDG de la geometría remallada resultan de interpolar los valores anteriores, por lo que inevitablemente se pierde un mínimo de precisión en la solución luego del remallado. Un criterio importante a considerar para medir la calidad de la malla es la longitud de la mínima arista, ya que la misma condiciona el paso de tiempo máximo utilizado en la simulación. Por lo dicho, es deseable que el remallado arregle los elementos aplastados en las zonas de mayor influencia de la herramienta de conformado.

La malla de la pieza a remallar corresponde a una estructura 2.5 dimensional, con simetría topológica axial, por lo que gran parte del procesamiento se realizará sobre la estructura 2D subyacente y luego se transmitirán los resultados a la malla 3D completa. El proceso se divide en cinco etapas. En la primera de ellas, se extrae una superficie representativa de la estructura 2.5 dimensional de la malla de la pieza para utilizar como referencia. En la segunda, se aplica un proceso de redistribución a los puntos de la frontera de la superficie. En el tercer paso, se aplican algoritmos de suavizado con y sin cambios topológicos alternadamente hasta obtener la calidad adecuada en el interior de la malla. Los dos últimos pasos consisten en aplicar los cambios realizados en la superficie de referencia a toda la estructura 3D, y obtener los datos necesarios para interpolar los nuevos PDG.

Finalmente, se analizarán cuestiones relativas a la implementación y se presentarán algunos resultados.

2. EXTRACCIÓN DE ESTRUCTURA 2D SUBYACENTE

Si bien la malla 3D es producto de aplicar una extrusión de revolución a una superficie 2D, la característica 2.5D sólo se mantiene en términos de conectividades luego del comienzo de la simulación, ya que en un paso de tiempo dado, la herramienta modeladora habrá afectado de diferente manera a los nodos de cada una de las capas. Sin embargo las diferencias no serán pronunciadas y se observarán mayormente en la zona cercana al punto de aplicación de la herramienta para cierto instante de tiempo. Es por esto que se buscará extraer la estructura 2D subyacente para realizar sobre la misma la mayor porción del proceso de remallado y luego transferir los resultados a todas las capas de la pieza 3D. Dado que la zona en contacto con la herramienta será presumiblemente la de mayor deformación, de todos los cortes 2D posibles, se utilizará el que contenga un nodo en contacto con la misma, o el que contenga al nodo más cercano a ésta, de acuerdo a los datos proporcionados por el software cliente de la rutina.

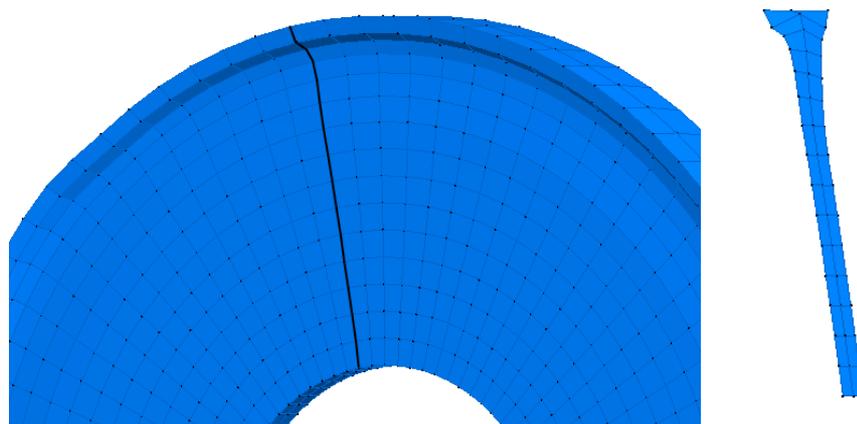


Figura 1: Extracción de un corte 2D representativo de las estructura subyacente en la malla 3D

2.1. Extracción del corte

La extracción del corte adecuado se realiza en dos etapas: primero se identifica un corte cualquiera y a través de éste se arma lo que se denomina encadenamiento de nodos; luego se utiliza dicho encadenamiento para encontrar el corte que contiene el nodo asociado a la mayor deformación (más cercano a la herramienta). El encadenamiento consiste en asociar cada nodo de una capa 2D al nodo topológicamente equivalente en la capa siguiente, lo cual se logra siguiendo la estructura conectiva de la malla en un dirección determinada. Esta dirección, también necesaria para determinar el plano del corte (perpendicular a la misma), se obtiene tomando por referencia la dirección del eje de giro de la pieza (que se ingresa como dato) y analizando las direcciones de las aristas más cercanas al mismo. Una vez determinado el siguiente eslabon de la cadena para cada nodo, se tienen implícitamente un conjunto de tantas listas circulares de nodos como nodos tenga un corte, que permite partiendo de una capa arbitraria avanzar hacia cualquier otra. Los nodos del corte que es finalmente extraído constituyen una nueva malla de superficie, que será proyectada sobre un plano medio para obtener finalmente la malla de plana referencia. Cada nodo de esta malla 2D mantiene una referencia al nodo 3D de la malla original del cual proviene, para utilizar posteriormente en la reconstrucción.

El algoritmo que extrae el primer corte recibe como dato el número de un elemento de frontera, y el índice de la cara que pertenecerá al corte. Luego, continúa buscando entre los vecinos del elemento las demás caras que correspondan al corte. Los vecinos que se consideran son todos menos los vecinos por la cara semilla y la cara opuesta. Por cada vecino, se determinan la cara común a ambos elementos (el elemento inicial y el vecino) y las caras que comparten la arista común del cuadrilátero inicial del primer elemento. La diferencia del segundo conjunto (caras que comparten la arista) menos el primero (cara común a ambos elementos) será la cara del elemento vecino que pertenecerá al corte. El mismo procedimiento se aplica recursivamente a cada vecino evitando pasar dos veces por el mismo elemento hasta que no quede ningún vecino sin procesar.

Para determinar cuales son el elemento y la cara inicial por donde comienza la búsqueda, se utilizan los datos correspondientes a la posición y orientación del eje sobre el cual gira la pieza. El “plano” del corte debe ser un semiplano que contenga al eje; el corte no representa exactamente un plano, sino que sigue una superficie interna de cuadriláteros que representan la frontera común a dos capas de elementos, siguiendo así la deformación de los mismos. Primero

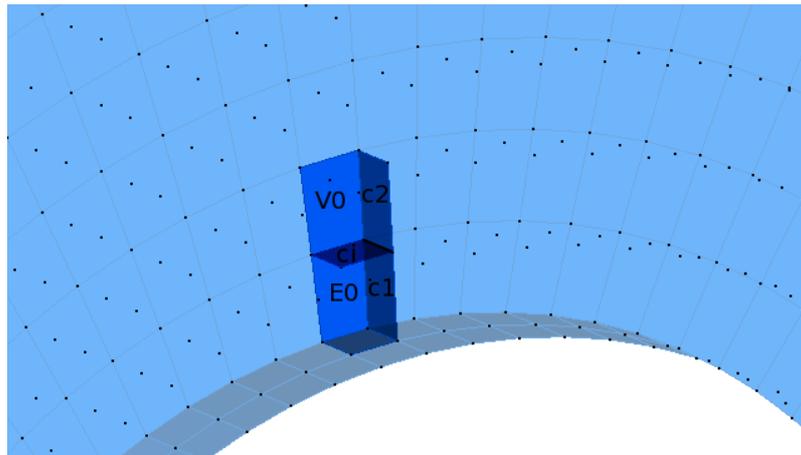


Figura 2: Elemento inicial (E0), primer vecino (V0), cara común (ci), caras del corte (c1 y c2).

se busca el nodo de la malla más cercano al centro del eje de rotación. El algoritmo de búsqueda utiliza un octree para generar una primera aproximación y luego avanza por los nodos conectados al nodo inicial siempre que la distancia al punto dado se acorte. Este algoritmo, sobre una pieza no convexa, puede no dar el nodo más cercano (da un mínimo local), pero aún así el nodo resultante será un nodo de frontera, por lo que esto no es un problema, y no se justifica implementar algoritmos más costosos para evitarlo; siendo que para este tipo de geometrías, el mínimo local será también global. Dado un nodo de frontera cercano al eje, se busca de entre sus aristas la que tenga dirección más parecida al eje, y la que tenga el nodo más alejado del mismo. Con estas dos se determina la cara inicial. El elemento inicial será cualquiera de los dos elementos de esa cara.

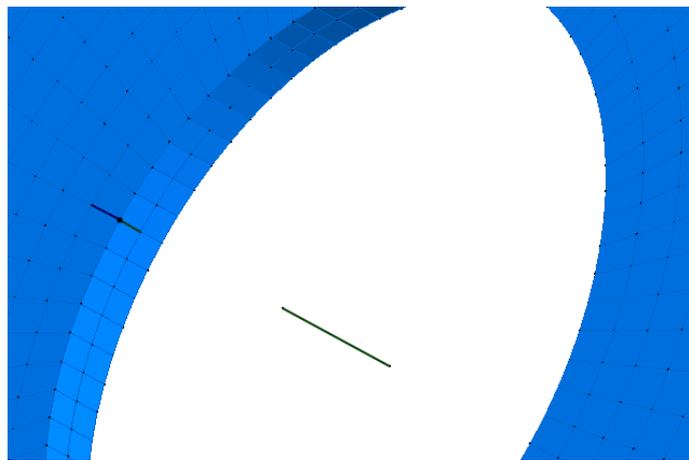


Figura 3: Eje de rotación de la pieza, nodo cercano y aristas de la cara inicial.

Una vez generado un corte, se puede avanzar a los elementos de los demás cortes para conformar el encadenamiento de nodos de la siguiente forma: dado un elemento del cual se extrajo una cara para el corte, se toma el vecino por esa cara, y en este elemento se selecciona la cara opuesta para reemplazar al cuadrilátero del corte original.

2.2. Proyección

La malla 2D es en general una superficie curva, ya que la estructura plana inicial se ve modificada por la acción de la herramienta modeladora (ver Figura 4), por lo que para remallarla habría que construir un sustrato analítico (ej: NURBS). Dado que la superficie no tiene una curvatura considerable, se justifica realizar un mapeo de la misma a un plano para reducir el costo y simplificar el proceso. Las potenciales opciones para dicha proyección son: plano medio (normal media), plano secante, plano radial y desarrollo cilíndrico. Por las características de las mallas analizadas se implementó la proyección sobre el plano de la normal media. La mayor curvatura se da en la periferia, en contacto con la herramienta. Al proyectar sobre el plano las aristas radiales se acortan; luego se suaviza en el plano y se remapea, con lo cual las aristas radiales resultan estiradas sobre la superficie. Esto no es una desventaja, sino que por el contrario provoca una anisotropía ventajosa al permitir mas pasos de aplastamiento.

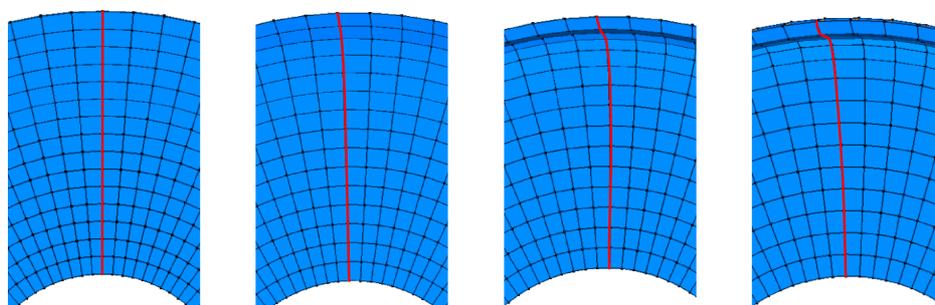


Figura 4: Deformación de la estructura plana luego de 0, 15, 35 y 41 pasos de tiempo en la simulación.

3. REMALLADO 2D

El algoritmo de remallado 2D también se realiza en dos etapas. Primeramente se analiza la frontera de la malla y se redistribuyen adecuadamente los nodos sobre la misma; luego se alternan procesos de suavizado con y sin cambios topológicos para mejorar el interior de la misma.

3.1. Redistribución de la frontera

Para redistribuir los nodos de la frontera y preservar la estructura geométrica del borde se construye una secuencia de splines. Cada spline está definida entre dos vértices geométricos, estos son los que tienen un ángulo interno desviado del llano en más que una tolerancia dada. Una spline es aquí una sucesión de curvas de Bézier de 3er grado (es el mínimo que permite definir una curva no-plana en el espacio), unidas con continuidad G^1 (tangente común). Cada tramo se define por cuatro puntos de control: los dos extremos (que son nodos) y dos puntos virtuales intermedios. Si fuese de grado 2, con un solo punto intermedio, los tres puntos definen un plano y no sería apto para curvas 3D. La desventaja de estas splines frente a las NURBS es que hay más puntos de control que los estrictamente necesarios, es decir que no hay problemas: el costo de eliminar knots y puntos de control sería superior al de trabajar con la secuencia calculada y los datos superfluos. Se utiliza el algoritmo balanceado de Overhauser para evitar overshooting (Buss, 2003) tomando como parámetro variable la longitud de cuerda (lineal) acumulada. El algoritmo define, en cada punto interior de la secuencia, una derivada vectorial para el segmento anterior y el posterior. La dirección común de las derivadas es un promedio

ponderado por proximidad de las direcciones de los segmentos rectilíneos y los módulos están fijados en proporción a las distancias. Para definir el vector tangente se utilizan los versores de las direcciones anterior y posterior. Denominamos v_0 al vector diferencia anterior y v_1 al posterior:

$$v = \frac{\frac{v_0}{|v_0|^2} + \frac{v_1}{|v_1|^2}}{\frac{1}{|v_0|} + \frac{1}{|v_1|}} = \frac{\frac{v_0}{|v_0|}|v_1| + \frac{v_1}{|v_1|}|v_0|}{|v_0| + |v_1|} \quad (1)$$

Los nuevos puntos de control P_0 y P_1 , deben estar en la línea definida por v , sus distancias a P_i son la tercera parte de la derivada de la curva respecto al parámetro canónico que varía entre 0 y 1. Se pretende que las velocidades sean proporcionales a las distancias, entonces los puntos se ubican en:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_i - \frac{|v_0|}{3}v \\ P_1 &= P_i + \frac{|v_1|}{3}v \end{aligned} \quad (2)$$

Esta asignación equivale a una reparametrización con la longitud de la cuerda.

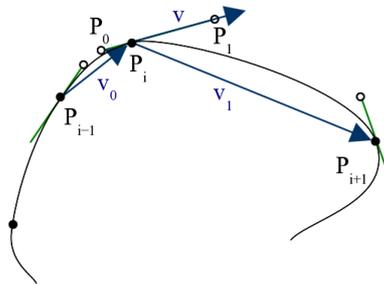


Figura 5: Construcción de las splines interpolantes.

Los puntos inicial y final no pueden recibir el mismo tratamiento pues no tienen anterior o posterior respectivamente. Para estos puntos se utiliza un solo punto virtual intermedio y se construye una curva de Bézier de segundo grado. Estas ecuaciones se utilizan aquí para la definición de las curvas planas pero también se aplicarán al remapear las curvas en el espacio.

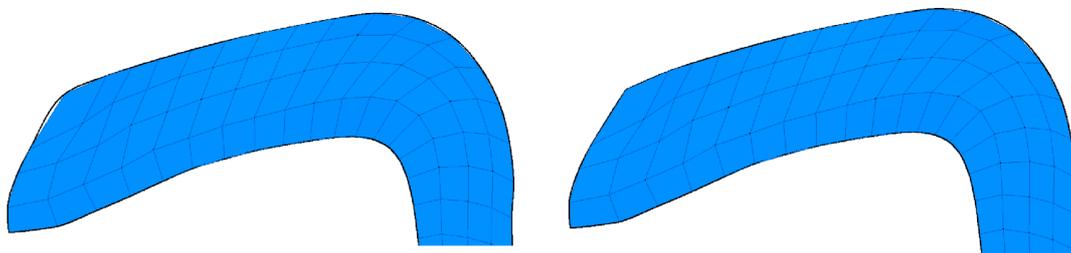


Figura 6: Spline de borde generado con diferentes umbrales para reconocer vértices geométricos

El paso siguiente consiste en redistribuir los puntos en la frontera. Dado que la redistribución se hace en cada spline (manteniendo los vértices) se buscan las de máximo y mínimo h real, para quitarle un punto a esta última y agregarlo en la primera, siempre que el resultado sea mejor. Con dicho procedimiento, realizado en forma iterativa, se logra definir cuantos nodos

contendrá cada spline. Finalmente los nodos se reposicionan, de a uno y en orden, paramétricamente equiespaciados en cada spline. La cantidad total de nodos de frontera permanece siempre constante.

3.2. Optimización de la calidad

En este punto se tiene una malla de cuadriláteros deformados e incluso invertidos. Primero se realiza la división en triángulos y luego una serie de pasos de suavizado e intercambios de diagonales (*swap*). La cantidad total de nodos interiores también permanece constante asumiendo que cada nodo representa una porción de volumen que debe permanecer más o menos invariante. Por suavizado entendemos aquí al reposicionamiento de los nodos sin cambios de conectividades. Para realizarlo utilizamos el laplaciano que consiste en llevar iterativamente cada nodo a la posición promedio de los nodos conectados. Este método se seleccionó frente a otros (Shewchuck, 2002) por su relación costo/beneficio para el tipo de mallas utilizadas. Al alternarse en cada paso con un método de optimización con cambios topológicos, algunos de sus defectos (por ejemplo, la potencial generación de elementos invertidos en concavidades) dejan de ser considerables. El siguiente paso consiste en regularizar las conectividades para mejorar la calidad de los elementos. Aquí se implementaron tres algoritmos:

- Delaunay: Si la circunferencia de un triángulo contiene al nodo opuesto de un vecino se intercambian las diagonales del cuadrilátero que conforman los dos elementos (Aurenhammer y Klei, 2000).
- ángulo: Entre dos triángulos vecinos se forma un cuadrilátero que se divide partiendo el mayor ángulo interno.
- Altura: Se elige la partición que maximice la mínima altura.

Si bien están disponibles los tres, se ha optado por maximizar alturas, ya que satisface mejor los requerimientos de calidad del programa anfitrión.

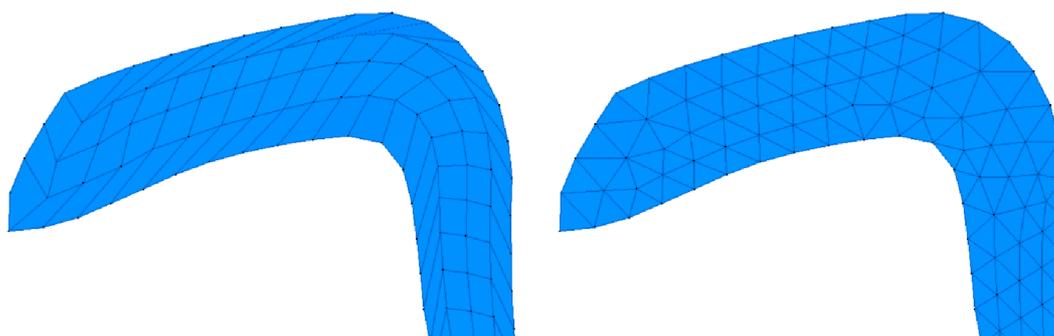


Figura 7: Reposicionamiento y reconexión de los nodos interiores.

Ambos algoritmos (suavizado y *swap*) se repiten en forma alterna mientras se continúen realizando cambios significativos y no se ejecuten más que un número límite de veces.

4. RECONSTRUCCIÓN DE LA MALLA 3D

La reconstrucción de la malla 3d involucra el mapeo de la estructura 2D obtenida en el paso anterior sobre cada capa de la malla 3D original, y la posterior transformación de los valores asociados a los PDG desde la vieja estructura hacia la nueva.

4.1. Remapeo

Para el mapeo de la estructura 2D sobre las capas de la malla 3D, para cada nodo interior de la nueva malla plana se calculan sus funciones de forma en los triángulos de la malla plana original. Con esas funciones de forma se interpolan los nodos en 3D en cada corte. Los nodos de frontera podrían quedar fuera obligando a extrapolar, pero debido a que es necesario respetar la geometría de la superficie, se realiza una sucesión de splines, equivalente a la 2D pero en cada corte 3D y se reposicionan los nodos de las mismas por equivalencia paramétrica.

4.2. Puntos de Gauss

Una vez resuelto el remallado, se deben proyectar los valores asociados a los PDG desde la malla vieja hacia los nuevos PDG de la malla nueva. En la figura 8 se muestra el proceso en 2D, pero el real se realiza en 3D.

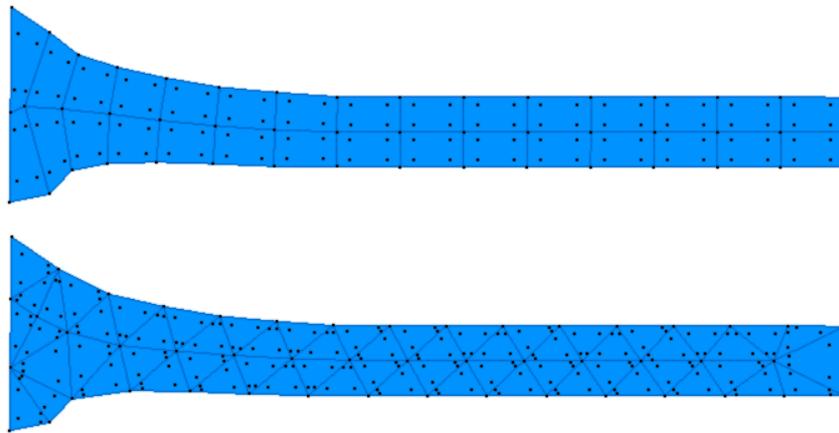


Figura 8: Proyección de los nuevos puntos de Gauss

Para poder realizar la proyección, se interpolan las posiciones de los nuevos PDG en una triangulación (tetraedrización) de los viejos. En la figura 9 se puede ver esta malla superpuesta sobre la original. La frontera de la malla se obtiene por la técnica de alpha-shape (Edelsbrunner y Mücke, 1994).

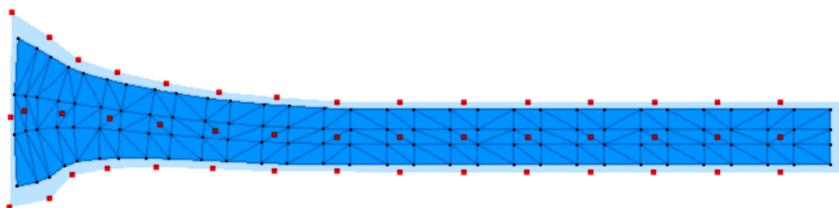


Figura 9: Malla de puntos de Gauss superpuesta sobre la malla original

La figura 10 muestra los nuevos PDG sobre la malla de los viejos.

Para la interpolación lineal, se ubica el tetraedro al cual pertenece cada punto y se interpola con los nodos de dicho tetraedro, que son PDG de la malla vieja, con valores conocidos. Muchos

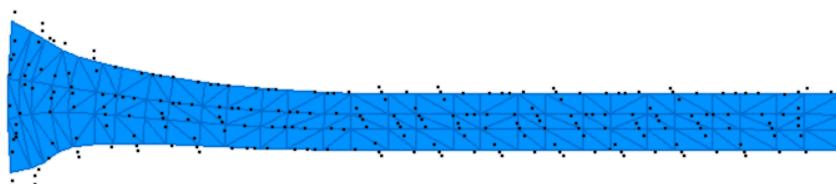


Figura 10: Nuevos puntos de Gauss sobre la malla de los puntos de Gauss originales

PDG nuevos, aunque están dentro de la malla original, caen fuera de la malla de los PDG previos. Eso obliga a extrapolar valores.

La rutina de búsqueda, cuando determina que el punto está fuera de la malla, devuelve el nodo más cercano. Ese nodo pertenece a un conjunto de elementos. Para cada uno de esos elementos se calculan la menor función de forma (siempre negativas) y de ellas se elige la mayor (la más cercana a cero). Con las funciones de forma de ese elemento se extrapola el nuevo punto. El resultado es similar a la búsqueda de la cara de frontera más cercana al nuevo PDG para extrapolar con el correspondiente tetraedro. Esta técnica (o cualquier otra que pueda elegirse) pierde razonabilidad cuando el punto se aleja mucho de la frontera; y hay muchos puntos que así lo hacen.

Un problema adicional consiste en que los PDG forman una estructura cúbica (con muchos puntos coesféricos). Para un generador Delaunay (Calvo, 2005) significa mucho tiempo de proceso y una miríada de *slivers* y dado que las funciones de forma son cocientes de volúmenes, el error en los *slivers* puede resultar muy alto. Si bien se utilizan rutinas para eliminarlos, en una estructura de array cúbico, al aplicar dichas rutinas se elevan considerablemente los tiempos de ejecución.

5. CONCLUSIONES

Se presentó el procedimiento completo desarrollado para el remallado de geometrías 2.5D de simetría axial deformadas durante la simulación de *spinning forming*. El algoritmo de remallado detecta automáticamente, utilizando la posición del eje de giro de la pieza, la estructura 2D subyacente y mejora la calidad de los elementos, modificando las aristas aplastadas para lograr una longitud mínima aceptable para la simulación. El proceso de generación de la nueva malla no presenta un costo computacional elevado, ya que la mayor parte del mismo se realiza utilizando la proyección de un corte (2D). Sin embargo, el proceso de construcción de la malla de PDG, necesaria para la interpolación de los nuevos PDG, aún presenta un costo computacional elevado por la gran cantidad de *slivers* que se generan debido a la estructura cúbica de dichos puntos y representa la mayor parte del tiempo de ejecución total del proceso completo de remallado.

REFERENCIAS

- Aurenhammer F. y Klei R. *Handbook of Computational Geometry*, capítulo IV, páginas 201–290. Elsevier Science Publishing, 2000.
- Buss S. *3D Computer Graphics: A Mathematical Introduction with OpenGL*. Cambridge University Press, 2003.
- Calvo N. *Generación de mallas tridimensionales por métodos duales*. Tesis de Doctorado, Doctorado en Ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, 2005.

Edelsbrunner H. y Mücke E.P. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Trans. Graph.*, 13:43–72, 1994.

Shewchuck J.R. What is a good linear finite element? interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures. *11th International Meshing Round Table*, 2002.