

REPRESENTACIÓN MEDIANTE VOLÚMENES FINITOS DEL FLUJO DE FLUIDOS DE LA LEY DE LA POTENCIA EN UNA EXPANSIÓN BIDIMENSIONAL SIMÉTRICA BRUSCA

POWER LAW FLOW IN A 2D SYMMETRIC SUDDEN EXPANSION BY SIMPLER FINITE VOLUME METHOD

Emilio Horane^{a,b} and Ricardo A. Prado^b

^a*Halliburton Testing & Subsea Halliburton Argentina S.A. Maipu N°942, Piso 14, C1006ACN Buenos Aires Ú Argentina.*

^b*Grupo Fluidodinámica Computacional, Departamento de Mecánica Aplicada Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue calle Buenos Aires N°1400, Q8300BCX Neuquén, Argentina email: prado@uncoma.edu.ar*

Keywords: Volúmenes finitos, ley de la potencia, expansión simétrica 2D, SIMPLER.

Abstract. Se desarrolla la solución numérica para el flujo laminar incompresible de fluidos no-newtonianos que verifican la ley de la potencia, a través de canales bidimensionales que presentan una expansión simétrica brusca. La resolución numérica es realizada mediante la aproximación por volúmenes finitos, utilizando el método SIMPLER, validando el método y comparando el comportamiento no-newtoniano contra el newtoniano. Se presentan los perfiles de velocidad para un rango de números de Reynolds, exponentes de la ley de la potencia y relaciones de expansión 1:2 y 1:3. Se muestran asimismo los resultados para recirculación y longitud de readherencia, y las distribuciones de presión sobre las paredes.

1 INTRODUCCIÓN

El comportamiento no-newtoniano es la regla en la mayoría de los fluidos utilizados en la industria del petróleo. No solamente el propio petróleo puede exhibir características no-newtonianas de moderadas a muy intensas, sino que asimismo se requiere que los fluidos utilizados para la perforación y la completación de los pozos presenten un importante comportamiento tixotrópico.

Las ecuaciones constitutivas que relacionan las tensiones de corte de los fluidos no-newtonianos con sus movimientos son complejas y la matemática involucrada en la resolución de estos problemas resulta dificultosa (El-Gamal y Gad, 1997). Por lo cual, la simplicidad del modelo de la ley de la potencia para la descripción del comportamiento reológico resulta muy útil (Brydson, 1970).

Las geometrías atravesadas por estos fluidos pueden incluir secciones anulares así como todo tipo de contracciones o expansiones. En ciertas condiciones, cuando se trata de flujo anular en donde los radios de las tuberías concéntricas difieren poco entre sí, es posible representar dicho flujo anular mediante la aproximación correspondiente al flujo en un canal bidimensional.

Se presenta en este trabajo el desarrollo de la solución numérica para el flujo laminar incompresible de fluidos no-newtonianos que verifican la ley de la potencia, a través de canales bidimensionales que presentan una expansión simétrica brusca. La resolución numérica es realizada mediante la aproximación por volúmenes finitos, utilizando el método SIMPLER, comparando el comportamiento no-newtoniano contra el newtoniano. Se presentan los perfiles de velocidad para un rango de números de Reynolds, exponentes de la ley de la potencia y relaciones de expansión. Se muestran asimismo las distribuciones de presión sobre las paredes, así como la presencia de recirculación y readherencia del flujo. En aquellos casos en donde es posible, los resultados numéricos obtenidos son comparados con aquéllos presentados en la literatura.

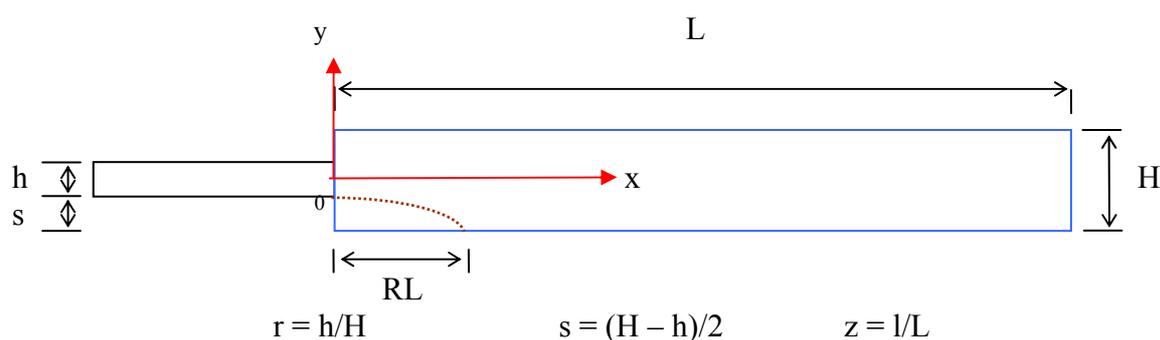


Figura 1: Esquema de la geometría de la expansión simétrica brusca 2D

2 ECUACIONES DE GOBIERNO Y METODOLOGÍA NUMÉRICA

2.1 Ecuaciones de Navier Stokes

Las ecuaciones de Navier Stokes acoplan las ecuaciones de transporte de masa y momento lineal al campo de presiones. En general, interesa utilizarlas llevándolas a la forma de las ecuaciones de transporte base del método de volúmenes finitos. Desarrollando las ecuaciones para el caso de líquidos incompresibles, y sin considerar fuerzas volumétricas como la de la gravedad, se obtiene

$$\partial_i(\rho u_i) + \text{div } j_T^{u_i} = -\partial_i p + \sigma^{u_i}, \quad (1)$$

donde el flujo asociado al transporte de velocidad y las fuentes residuales se definen por

$$\begin{aligned} j_T^{u_i} &= \rho u u_i - \mu \text{grad } u_i, \\ \sigma^{u_i} &\equiv \sum_j \partial_j (\mu \partial_i u_j) = \sum_j \partial_j \mu \partial_i u_j. \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 Ley de la potencia para la reología del fluido no-newtoniano

Implementando en forma estándar la ley de la potencia para la reología del fluido, se tiene según este modelo una representación de la viscosidad aparente η de la forma

$$\eta = m \gamma^{(n-1)}, \quad (3)$$

donde

$$\gamma = \left| \mathbf{I}_2^{2D} \right|^{1/2}, \quad (4)$$

$$\mathbf{I}_2^{2D} = 2 \left(\partial_{x_1} u_1 \right)^2 + 2 \left(\partial_{x_2} u_2 \right)^2 + \left(\partial_{x_1} u_2 + \partial_{x_2} u_1 \right)^2. \quad (5)$$

Aquí m y n representan los parámetros del modelo. Este modelo reproduce aproximadamente el comportamiento de muchos líquidos poliméricos y dispersiones, y en particular se utiliza para modelar el comportamiento de una amplia variedad de fluidos de la industria petrolera.

2.3 Discretización 2D de la ecuación de transporte de un escalar

La discretización de las ecuaciones acopladas en los campos de velocidad y presión se hace en forma estándar. Se define para cada variable una grilla de elementos de volumen, integrando luego en cada elemento de volumen la ecuación diferencial asociada a la evolución de la variable. Típicamente, la grilla es descentrada para ambos campos de velocidades, como se representa en la Figura 2.

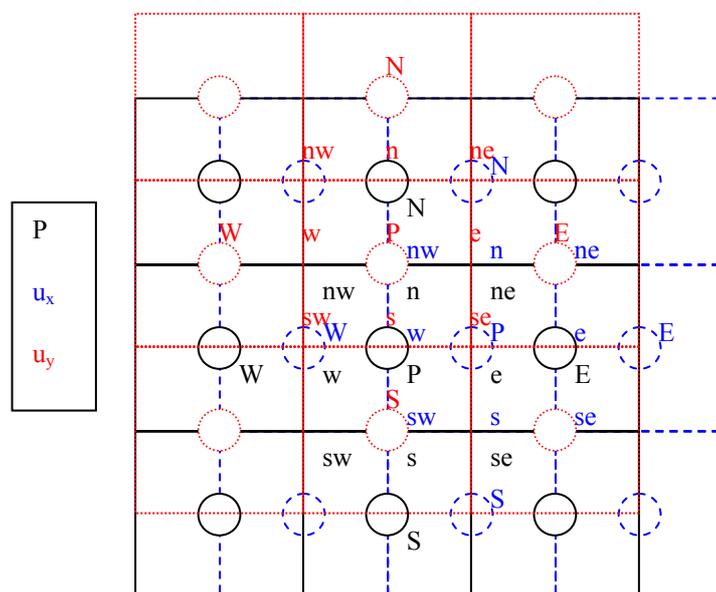


Figura 2: Grilla descentrada utilizada para los campos de velocidad y presión

La integración de los términos de divergencia se hace mediante la utilización del teorema de la divergencia, según

$$\int_{\Delta V} (\text{div } \mathbf{j}_T^\phi) dV = \int_{\Omega} \mathbf{j}_{n,T}^\phi \cdot d\Omega = \mathbf{j}_{x,T}^\phi(x_e) A_e - \mathbf{j}_{x,T}^\phi(x_w) A_w + \mathbf{j}_{y,T}^\phi(y_n) A_n - \mathbf{j}_{y,T}^\phi(y_s) A_s. \quad (6)$$

Resulta entonces

$$\partial_t (\rho \phi) \Delta V + \mathbf{j}_{x,T}^\phi(x_e) A_e - \mathbf{j}_{x,T}^\phi(x_w) A_w + \mathbf{j}_{y,T}^\phi(y_n) A_n - \mathbf{j}_{y,T}^\phi(y_s) A_s = s^\phi \Delta V, \quad (7)$$

esto es,

$$\begin{aligned} & \Delta V (\rho_p \phi_p - \rho_p^0 \phi_p^0) / \Delta t + \\ & + (\phi_e \rho_e u_{x,e} - \Gamma_e (\text{grad } \phi)_e) A_e - (\phi_w \rho_w u_{x,w} - \Gamma_w (\text{grad } \phi)_w) A_w + \\ & + (\phi_n \rho_n u_{y,n} - \Gamma_n (\text{grad } \phi)_n) A_n - (\phi_s \rho_s u_{y,s} - \Gamma_s (\text{grad } \phi)_s) A_s = s^\phi \Delta V. \end{aligned} \quad (8)$$

En las expresiones precedentes, A_i denota a las respectivas áreas del elemento de volumen, según sus sentidos norte n, sur s, este e y oeste w, mientras que ΔV representa el volumen de dicho elemento.

La ecuación de transporte de masa es el caso particular del escalar unidad. La ecuación discreta resultante provee la condición de consistencia a imponer en el campo de presiones. Teniendo en cuenta que no se tienen fuentes de masa en el dominio de trabajo, y que el fluido es incompresible, esta ecuación se traduce en

$$\Delta(\text{FA}) = F_e A_e - F_w A_w + F_n A_n - F_s A_s = 0, \quad (9)$$

con

$$F_e = \phi_e \rho_e u_{x,e}, \quad F_w = \phi_w \rho_w u_{x,w}, \quad F_n = \phi_n \rho_n u_{y,n}, \quad F_s = \phi_s \rho_s u_{y,s}. \quad (10)$$

En esta ecuación se expresan los escalares en las fronteras en términos de los escalares en los elementos, según

$$\begin{aligned} \phi_e &= c_e^E \phi_E + c_e^P \phi_P, & \phi_w &= c_w^P \phi_P + c_w^W \phi_W, \\ \phi_n &= c_n^N \phi_N + c_n^P \phi_P, & \phi_s &= c_s^P \phi_P + c_s^S \phi_S, \end{aligned} \quad (11)$$

y se expresan los gradientes con derivadas centradas según

$$\begin{aligned} (\text{grad } \phi)_e &= (\phi_E - \phi_P) / \Delta x_{PE}, & (\text{grad } \phi)_w &= (\phi_P - \phi_W) / \Delta x_{WP}, \\ (\text{grad } \phi)_n &= (\phi_N - \phi_P) / \Delta y_{PN}, & (\text{grad } \phi)_s &= (\phi_P - \phi_S) / \Delta y_{SP}. \end{aligned} \quad (12)$$

Desarrollando entonces la forma general para la ecuación discreta 2D, resulta

$$[a_w + a_e + a_s + a_n + \Delta(\text{FA}) + b_p] \phi_P = a_w \phi_W + a_e \phi_E + a_s \phi_S + a_n \phi_N + b_u, \quad (13)$$

con

$$\begin{aligned} b_p &= -s_p^\phi + \rho_p \Delta V / \Delta t, \\ b_u &= s_C^\phi + \rho_p^0 \phi_P^0 \Delta V / \Delta t, \\ s^\phi \Big|_{\phi_P} &\cong s_C^\phi + s_P^\phi \phi_P, \end{aligned} \quad (14)$$

y los coeficientes a_i dados en forma estándar, en función del número de Peclet de grilla, Pe ,

$$\begin{aligned} a_w &= [c_w^W + 1/Pe_w] F_w A_w, & a_e &= [-c_e^E + 1/Pe_e] F_e A_e, \\ a_s &= [c_s^S + 1/Pe_s] F_s A_s, & a_n &= [-c_n^N + 1/Pe_n] F_n A_n, \end{aligned} \quad (15)$$

con

$$\begin{aligned} D_e &= \Gamma_e / \Delta x_{PE}, & D_w &= \Gamma_w / \Delta x_{WP}, \\ D_n &= \Gamma_n / \Delta y_{PN}, & D_s &= \Gamma_s / \Delta y_{SP}. \end{aligned} \quad (16)$$

2.4 Pesos – ley potencial - Esquema de Patankar

Con esta elección, se considera el valor representativo del escalar en la frontera dependiendo de que el Peclet de grilla sea en módulo inferior o superior a 10). Por ejemplo, los coeficientes este y oeste toman la forma

$$f(P) = (1 - |P|/10)^5, \quad (17)$$

$$c_e^E = \begin{cases} 1/Pe_e, & Pe_e > +10 \\ (1 - f(Pe_e))/Pe_e, & 0 < Pe_e < +10 \\ 1 + (1 - f(Pe_e))/Pe_e, & -10 < Pe_e < 0 \\ 1 + 1/Pe_e, & Pe_e < -10 \end{cases} \quad c_e^P = \begin{cases} 1 - 1/Pe_e, & Pe_e > +10 \\ 1 - (1 - f(Pe_e))/Pe_e, & 0 < Pe_e < +10 \\ -(1 - f(Pe_e))/Pe_e, & -10 < Pe_e < 0 \\ -1/Pe_e, & Pe_e < -10 \end{cases} \quad (18)$$

y

$$c_w^P = \begin{cases} 1/Pe_w, & Pe_w > +10 \\ (1 - f(Pe_w))/Pe_w, & 0 < Pe_w < +10 \\ 1 + (1 - f(Pe_w))/Pe_w, & -10 < Pe_w < 0 \\ 1 + 1/Pe_w, & Pe_w < -10 \end{cases} \quad c_w^W = \begin{cases} 1 - 1/Pe_w, & Pe_w > +10 \\ 1 - (1 - f(Pe_w))/Pe_w, & 0 < Pe_w < +10 \\ -(1 - f(Pe_w))/Pe_w, & -10 < Pe_w < 0 \\ -1/Pe_w, & Pe_w < -10 \end{cases} \quad (19)$$

Luego,

$$a_E = \begin{cases} 0, & Pe_e > +10 \\ f(Pe_e) D_e A_e, & 0 < Pe_e < +10 \\ -F_e A_e + f(Pe_e) D_e A_e, & -10 < Pe_e < 0 \\ -F_e A_e, & Pe_e < -10 \end{cases} \quad (20)$$

$$a_W = \begin{cases} F_w A_w, & Pe_w > +10 \\ F_w A_w + f(Pe_w) D_w A_w, & 0 < Pe_w < +10 \\ f(Pe_w) D_w A_w, & -10 < Pe_w < 0 \\ 0, & Pe_w < -10 \end{cases} \quad (21)$$

La utilización de ley de potencias introduce menor error que las alternativas *upwind*, *modified upwind*, sobre todo en el rango correspondiente a Peclet moderados.

2.5 Discretización de la ecuación de gobierno 2D en el caso incompresible no-newtoniano

Según los lineamientos detallados, el sistema a resolver para las velocidades es, en sus respectivos elementos de volumen,

$$a_P^{u_x} u_{x,P} = a_W^{u_x} u_{x,W} + a_E^{u_x} u_{x,E} + a_S^{u_x} u_{x,S} + a_N^{u_x} u_{x,N} + b_u^{u_x} - p_e^{u_x} A_e^{u_x} + p_w^{u_x} A_w^{u_x}, \quad (22)$$

siendo

$$a_P^{u_x} = a_W^{u_x} + a_E^{u_x} + a_S^{u_x} + a_N^{u_x} + b_P^{u_x} \quad (23)$$

$$b_P^{u_x} = -\sigma_P^{u_x} + \rho_P \Delta V / \Delta t,$$

$$b_u^{u_x} = +\sigma_C^{u_x} + \rho_P^0 u_{x,P}^0 \Delta V / \Delta t$$

junto con

$$a_P^{u_y} u_{y,P} = a_W^{u_y} u_{y,W} + a_E^{u_y} u_{y,E} + a_S^{u_y} u_{y,S} + a_N^{u_y} u_{y,N} + b_u^{u_y} - p_n^{u_y} A_n^{u_y} + p_s^{u_y} A_s^{u_y}, \quad (24)$$

siendo

$$a_P^{u_y} = a_W^{u_y} + a_E^{u_y} + a_S^{u_y} + a_N^{u_y} + b_P^{u_y}$$

$$b_P^{u_y} = -\sigma_P^{u_y} + \rho_P \Delta V / \Delta t, \quad (25)$$

$$b_u^{u_y} = +\sigma_C^{u_y} + \rho_P^0 u_{y,P}^0 \Delta V / \Delta t,$$

donde

$$\sigma_P^{u_x} = 0, \quad \sigma_P^{u_y} = 0, \quad (26)$$

$$\sigma_C^{u_x} = \frac{\mu_e - \mu_w}{\Delta x_{ew}} \frac{u_{x,e} - u_{x,w}}{\Delta x_{ew}} + \frac{\mu_n - \mu_s}{\Delta y_{ns}} \frac{u_{y,e} - u_{y,w}}{\Delta x_{ew}}, \quad (27)$$

$$\sigma_C^{u_y} = \frac{\mu_e - \mu_w}{\Delta x_{ew}} \frac{u_{x,n} - u_{x,s}}{\Delta y_{ns}} + \frac{\mu_n - \mu_s}{\Delta y_{ns}} \frac{u_{y,n} - u_{y,s}}{\Delta y_{ns}}.$$

2.6 SIMPLER – Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations Revised

El método SIMPLER, desarrollado por Patankar y Spalding, utiliza la ecuación de transporte de masa como la condición autoconsistente que debe cumplir el campo de presiones acoplado con el de velocidades (Patanekar, 1980, Versteeg y Malalasekerea, 1995, Anderson et al. 1984), según el siguiente algoritmo:

- 1) en base a un campo de velocidades inicial, estimar un campo de presiones p ,
- 2) calcular el campo de velocidades aproximado u_x^* , u_y^* ,
- 3) calcular la corrección de presión p' mediante utilización del método SIMPLE,

- 5) corregir velocidades con relajación,
- 6) resolver otras ecuaciones de transporte, si corresponde,
- 7) evaluar el criterio de convergencia adoptado e iterar en caso de no haberse alcanzado la convergencia requerida.

La ecuación de la presión del método SIMPLER se obtiene de reemplazar las ecuaciones presentadas en el apartado anterior en la ecuación de continuidad. Rescribiendo las primeras,

$$a_P^{u_x} u_{x,P}^{u_x} = \sum_{i=W,E,S,N} a_i^{u_x} u_{x,i}^{u_x} - p_e^{u_x} A_e^{u_x} + p_w^{u_x} A_w^{u_x} + b_u^{u_x}, \quad (28)$$

$$a_P^{u_y} u_{y,P}^{u_y} = \sum_{i=W,E,S,N} a_i^{u_y} u_{y,i}^{u_y} - p_n^{u_y} A_n^{u_y} + p_s^{u_y} A_s^{u_y} + b_u^{u_y},$$

reemplazando y agrupando en la ecuación de continuidad,

$$a_P^p p_P = a_E^p p_E + a_W^p p_W + a_N^p p_N + a_S^p p_S + b^p, \quad (29)$$

con

$$a_E^p = \rho_e A_P^{u_x} A_e^p / a_{P,e}^{u_x}, \quad a_W^p = \rho_w A_P^{u_x} A_w^p / a_{P,w}^{u_x},$$

$$a_N^p = \rho_n A_P^{u_y} A_n^p / a_{P,n}^{u_y}, \quad a_S^p = \rho_s A_P^{u_y} A_s^p / a_{P,s}^{u_y}, \quad (30)$$

$$a_P^p = a_E^p + a_W^p + a_N^p + a_S^p + b_u^p,$$

$$b_u^p = -\text{div}(\rho \hat{u})^p \Delta V^p,$$

$$\hat{u}_{P,x} = \frac{1}{a_P^{u_x}} \left(\sum_{i=W,E,S,N} a_i^{u_x} u_{x,i}^{u_x} + b_u^{u_x} \right),$$

$$\hat{u}_{P,y} = \frac{1}{a_P^{u_y}} \left(\sum_{i=W,E,S,N} a_i^{u_y} u_{y,i}^{u_y} + b_u^{u_y} \right).$$

La solución para la presión está afectada de una constante arbitraria. Esto se debe a que sus ecuaciones no son todas independientes, lo que se demuestra sumando todas las ecuaciones de conservación de masa de cada elemento, lo que da por resultado la conservación de masa total. De allí que una cualquiera de las ecuaciones puede escribirse en términos de la de conservación de masa y el resto de las ecuaciones. Al momento de realizar el cálculo de velocidades, sólo actúa la diferencia de presión, por lo que esta constante arbitraria no tiene influencia. Para imponer un sistema compatible determinado se adopta el criterio de fijar en cero el valor de la corrección de presión para una de las variables de corrección de presión a resolver.

El desarrollo del método SIMPLE puede revisarse en el trabajo presentado por Horane y Prado, 2005.

2.7 Número de Reynolds para fluidos no-newtonianos. Re modificado y Re generalizado

Con la adimensionalización de velocidad con velocidad media a la entrada y distancias con el ancho del canal de entrada, se forma el número adimensional que en la literatura se conoce como Reynolds modificado, que para el modelo reológico de la ley de la potencia resulta

$$\text{Re}_{\text{mod}} = \frac{\rho h^n}{m \bar{u}^{n-2}}. \quad (31)$$

Una segunda versión de número de Reynolds se obtiene al pedir que para flujo completamente desarrollado en el canal de entrada, el gradiente de presión resulte

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{24}{\text{Re}_{\text{gen}}} \rho \frac{\bar{u}^2}{2h}. \quad (32)$$

Reemplazando el resultado correspondiente para modelo reológico de la ley de la potencia, el gradiente de presión adimensionalizado se podrá escribir para el canal como

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{24}{\text{Re}_{\text{gen}}}, \quad (33)$$

con

$$\text{Re}_{\text{gen}} = \frac{6\rho\bar{u}^{2-n}h^n}{m} \left(\frac{n}{4n+2} \right)^n. \quad (34)$$

Se observa que la relación entre ambas definiciones del número de Reynolds resulta

$$\text{Re}_{\text{gen}} = \text{Re}_{\text{mod}} 6 \left(\frac{n}{4n+2} \right)^n. \quad (35)$$

2.8 Método Multigrilla

A los efectos de acelerar la convergencia se utilizaron variantes de la metodología multigrilla (Hirsch, 1990), mediante inyección / prolongación en tres escalas de trabajo. Si bien la metodología permitió acelerar la convergencia al utilizar un esquema de dos escalas con las dos escalas más gruesas, no sucedió lo mismo con el mismo esquema y las dos escalas más finas, probablemente por la muy lenta convergencia en los pasos de presión del SIMPLER para la escala más fina.

2.9 Método Richardson

Los operadores numéricos utilizados en el método numérico son de segundo orden, con lo que el error cometido en la estimación de las distintas magnitudes a calcular admite una expansión en potencias de la forma

$$E(h) = \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \alpha_4 h^4 + \dots = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i h^{\beta_i} \quad (36)$$

Esta forma del error admite una variación del método de extrapolación de Richardson, cuya forma iterativa para construir estimaciones de orden β_{k+1} se escribe en la forma

$$R_j^{k+1} = \frac{r^{\beta_k} R_{j+1}^k - R_j^k}{r^{\beta_k} - 1}, \quad \beta_k = h_k / h_{k+1}. \quad (37)$$

En la ecuación () las estimaciones con las que se comienza la construcción de la secuencia iterativa son de orden $\beta_2 = 2$ y corresponden al cálculo del operador numérico deseado aplicado a las soluciones numéricas de dimensiones características h_j que se disminuyen en un factor $r = 2$ para índices j consecutivos.

3 VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para cada juego de geometría y parámetros de fluido resulta necesario ajustar los mejores parámetros de sub/sobre relajación utilizados, fundamentalmente para el caso de la presión. Estos parámetros típicamente se mueven en el rango y $[0,50 - 01,90]$ para la presión, en tanto que se usó el valor 1.3 para las componentes de la velocidad en todos los casos.

La metodología utilizada ha sido validada comparando parte de los resultados contra los presentados por Ternik et al. 2006, Neofytou y Drikakis, 2003, 2006, Xu y Yu, 1997, Manica y Bortoli, 2004.

En la Figura 3 se contrastan los resultados para las líneas de corriente correspondientes a $Re = 40$ para una relación $r = 1/3$, siendo $n = 1$, con los resultados de Manica y Bortoli (2004). Se observa buen acuerdo cualitativo. En la Figura 4 se contrastan los resultados para las líneas de corriente correspondientes a $Re = 50$ para una relación $r = 1/3$, siendo $n = 1$, con los resultados de Manica y Bortoli (2004). No se observa ahora acuerdo cualitativo, puesto que en tanto en el presente trabajo se obtiene una configuración de vórtices simétrica, en el trabajo de Manica y Bortoli (2004) ya estamos en presencia de ruptura de simetría. Sin embargo, como se discute extensamente en el trabajo de Ternik et al. (2006), debido a un error en los números de Reynolds reportados en el trabajo de Manica y Bortoli (2004) estos deben reinterpretarse a las $3/4$ partes de su valor. En este sentido, Ternik et al. (2006) reportan que la ruptura de simetría ocurre más allá de Reynolds 50, aunque antes de arribar a Reynolds 60, en acuerdo con los resultados aquí presentados.

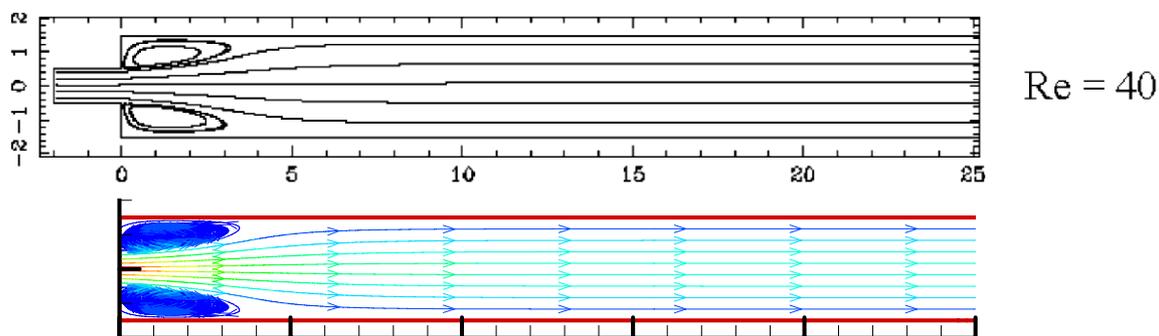


Figura 3: Comparación entre líneas de corriente para el casos $r = 1/3$ para $Re = 40$. La sección superior corresponde a los resultados reportados por Manica y Bortoli (2004). Fluido newtoniano.

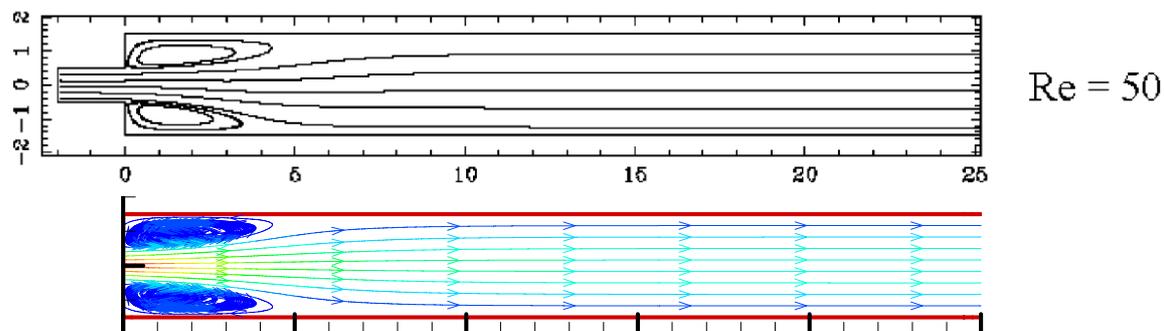


Figura 4: Comparación entre líneas de corriente para el casos $r = 1/3$ para $Re = 50$. La sección superior corresponde a los resultados reportados por Manica y Bortoli (2004). Fluido newtoniano. Las diferencias cualitativas entre ambos gráficos se discuten en el texto, y corresponden a un error en el reporte de Re en el trabajo citado.

En la Figura 5 se observa el detalle del desarrollo del vórtice superior para una relación $r = 1/3$, siendo $n = 1$ con Reynolds crecientes, que de arriba hacia abajo toman valores 20, 30, 40, 50, 56. El análisis de la Longitud de Recirculación del Vórtice vs Número de Reynolds se resume en la Tabla 1 y se representa en la Figura 6. Se observa para cada malla utilizada una buena representación mediante tendencia lineal, exceptuando un punto anómalo en la malla de 12×80 para $Re = 50$ para el que se confirma la falta de convergencia. Utilizando los resultados correspondientes a los restantes Reynolds se calcula la mejora dada por la extrapolación de Richardson, que también es muy bien representada por medio de una tendencia lineal.

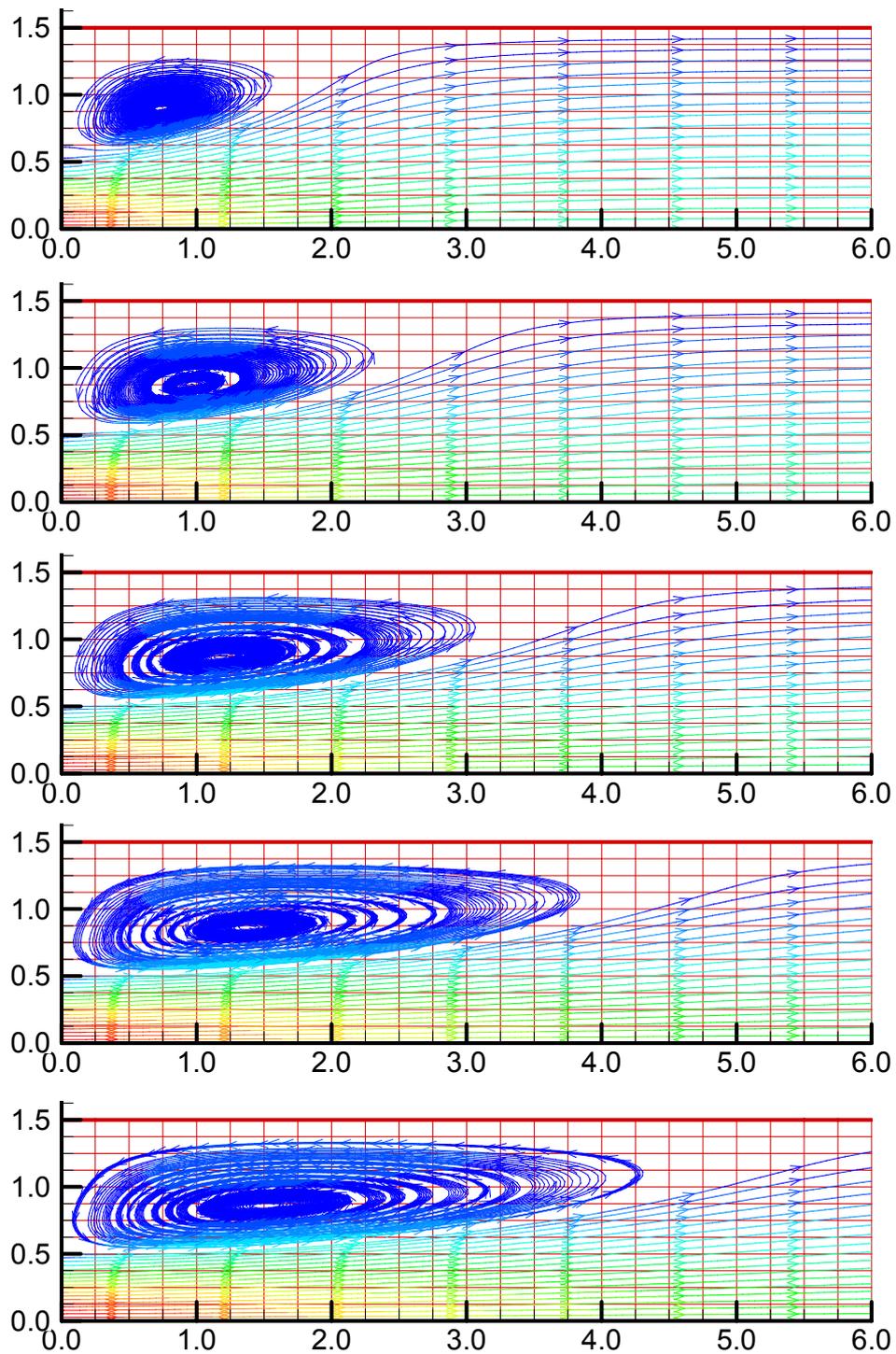


Figura 5: se observa para una relación $r = 1/3$, siendo $n = 1$, el detalle del desarrollo del vórtice superior para Reynolds crecientes, que de arriba hacia abajo toman valores 20, 30, 40, 50, 56.

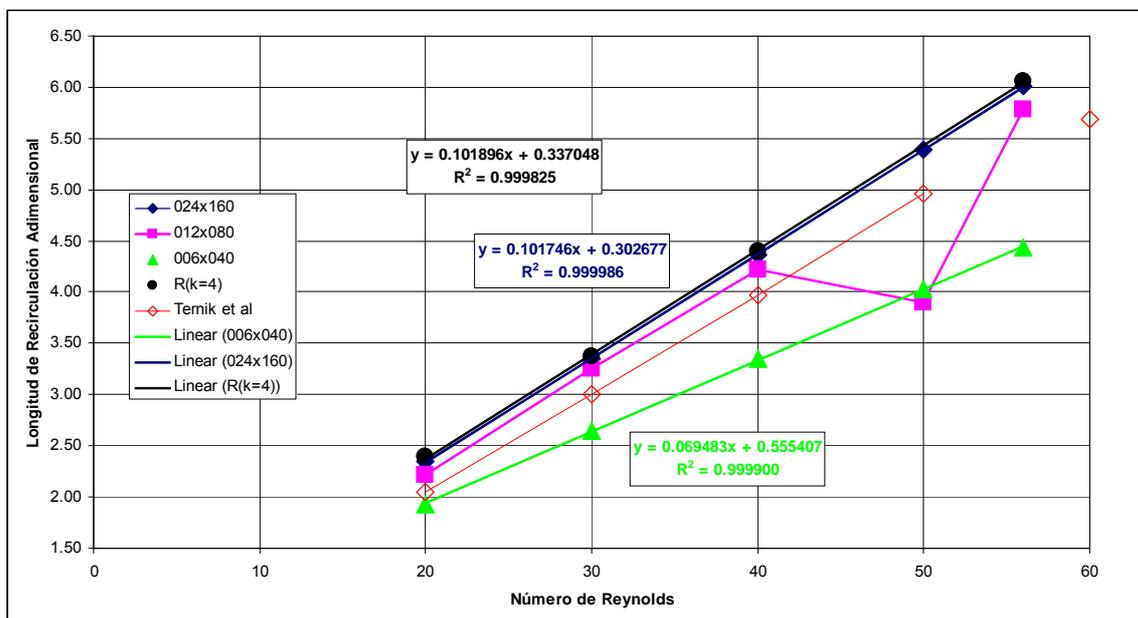


Figura 6: se observa para una relación $r = 1/3$, siendo $n = 1$, el detalle de la Longitud de Recirculación Adimensional en función del Número de Reynolds, para las distintas mallas corridas, junto con la extrapolación de Richardson realizada en los puntos admisibles – ver discusión en texto.

Re	006x040	012x080	024x160	R(k=4)
20	1.933350	2.217907	2.343911	2.396362
30	2.649795	3.251193	3.350020	3.373149
40	3.345535	4.225570	4.366550	4.398490
50	4.028025	3.894449	5.389951	-
56	4.438941	5.784137	6.005226	6.056977

Tabla 1: se observa para una relación $r = 1/3$, siendo $n = 1$, el detalle de la Longitud de Recirculación Adimensional en función del Número de Reynolds, para las distintas mallas corridas, junto con la extrapolación de Richardson realizada en los puntos admisibles – ver discusión en texto.

En la misma Figura 6 se hace la comparación con los resultados de Tedlarik et al. (2006) en color rojo. En la Figura 7 se presenta la dependencia de la estructura del vórtice en el índice de potencia para $Re = 40$, revelando que los resultados presentan dependencia importante aún en variaciones aparentemente menores del índice de potencia. Aparecen aquí diferencias ahora importantes con los resultados de Tedlarik et al. (2006). Las razones probables de la diferencia en análisis son dos. La primera es la utilización por parte de Tedlarik de una sección del dominio de entrada a la zona de expansión, que a diferencia del trabajo de Horane y Prado (2005), en el actual trabajo no fue considerada. La segunda razón es la definición de trabajo para la longitud de recirculación. En el presente trabajo la longitud de recirculación extrapola a la pared desde la posición de tres puntos situados cada uno de ellos en líneas horizontales de nodos de velocidad horizontal consecutivas, en los que se tiene velocidad horizontal nula. Cada uno de estos puntos, que pueden considerarse como un cero

de la componente horizontal de la velocidad en la línea de nodos de velocidad horizontal considerada, se interpola a su vez con los valores de nodos vecinos a izquierda y derecha del punto en que la componente de la velocidad horizontal cambia de signo. Por otra parte, Sedlarik et al. (2006) definen la longitud de recirculación, o de readherencia, como el punto en el cual el coeficiente pelicular de fricción se anula, siguiendo la referencia de Bell y Surana (1994).

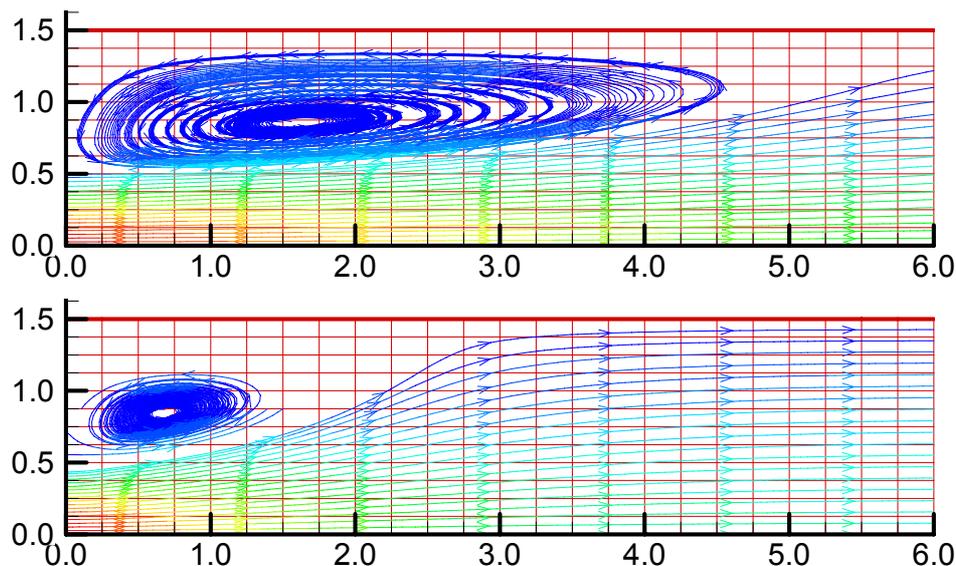


Figura 7: se observa para una relación $r = \frac{1}{3}$ el detalle del desarrollo del vórtice superior para Reynolds = 40, y fluidos de distinto índice de potencia, que de arriba hacia abajo toman valores $n = 0.9, 1.1465$.

Otro parámetro analizado es la Longitud de Redesarrollo Adimensional, considerada como aquella para la cual la velocidad en el eje de simetría alcanza un valor del 99% del valor asintótico esperado para el flujo desarrollado. Como criterio general, la Longitud de Redesarrollo debe estar bien por debajo del tamaño de la malla considerada, en este caso de 40 unidades adimensionales. En la Tabla 2 se resumen estos resultados, que se representan además en la Figura 8. Se observa que la extrapolación de Richardson compara bien con los resultados presentados por Tedlarik et al. (2006), excepto para $Re = 50$ de la malla de 12×80 , en que ya se comentó resta llegar aún a convergencia.

Re	006x040	012x080	024x160	R(k=4)
20	8.8137	6.5699	6.0835	5.9356
30	11.9220	9.8135	8.5215	7.9452
40	13.0316	12.0600	11.4110	11.1173
50	16.1472	8.2513	13.7738	
56	18.4065	16.6352	15.7110	15.3112

Tabla 2: se observa para una relación $r = \frac{1}{3}$, siendo $n = 1$, el detalle de la Longitud de Recirculación Adimensional en función del Número de Reynolds, para las distintas mallas corridas, junto con la extrapolación de Richardson realizada en los puntos admisibles – ver discusión en texto.

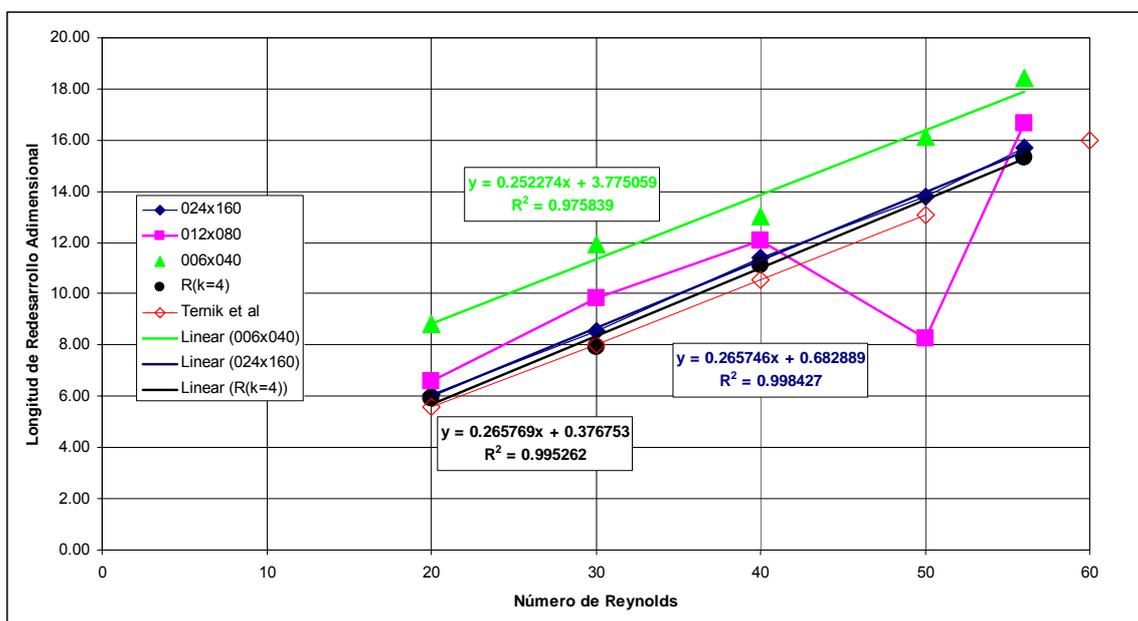


Figura 8: se observa para una relación $r = 1/3$, siendo $n = 1$, el detalle de la Longitud de Redesarrollo Adimensional en función del Número de Reynolds, para las distintas mallas corridas, junto con la extrapolación de Richardson realizada en los puntos admisibles – ver discusión en texto.

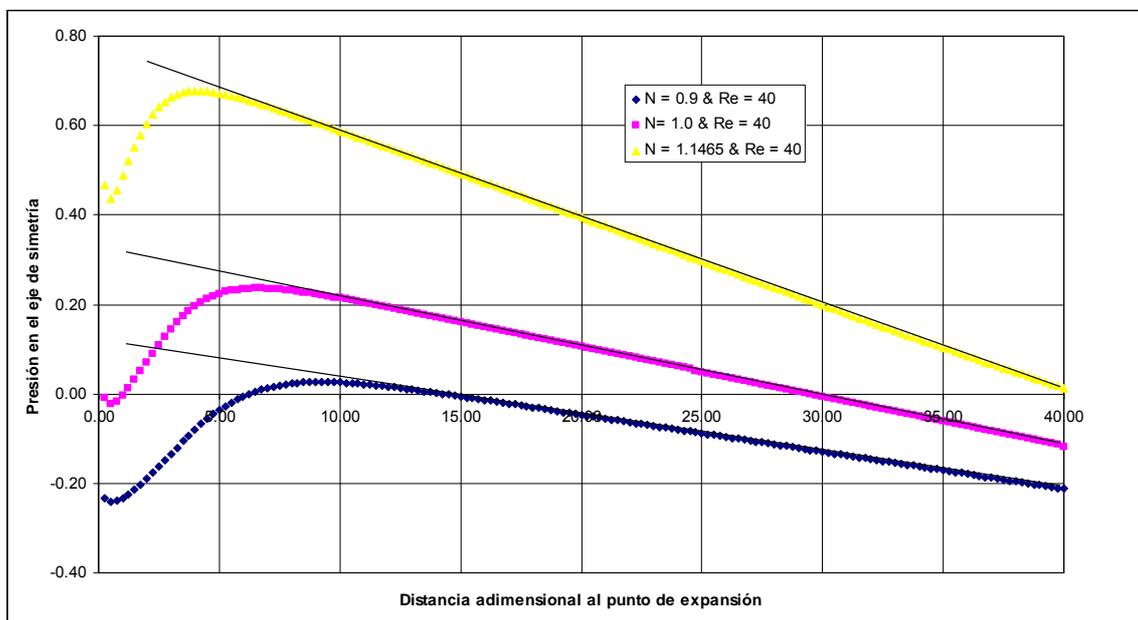


Figura 9: Verificación de flujo desarrollado en el comportamiento de la distribución de la presión, $Re = 40$, para los casos $n = 0.9, 1, 1.1465$, siendo $r = 1/3$.

Como criterio adicional relativo a la longitud del dominio necesaria para evitar efectos de borde en $x = L$, se verifica además que a la salida del dominio el gradiente de presión corresponda al del flujo totalmente desarrollado, el cual puede calcularse analíticamente. Se observa en la Figura 9 la aplicación del criterio en cuestión al caso $r = \frac{1}{3}$, para fluidos de índice de potencia $n = 1, 0.9, 1.1465$). Como ya se discutió, el campo de presión se define a menos de una constante arbitraria, que utilizamos en la Figura 9 para mostrar con claridad las distintas curvas de presión.

Este mismo criterio puede también analizarse vía las curvas de nivel para la presión, que mostramos en la Figura 10 para el caso de expansión simétrica $r = \frac{1}{2}$, caso para el que realizaron también los análisis ya discutidos para el caso $r = \frac{1}{3}$.

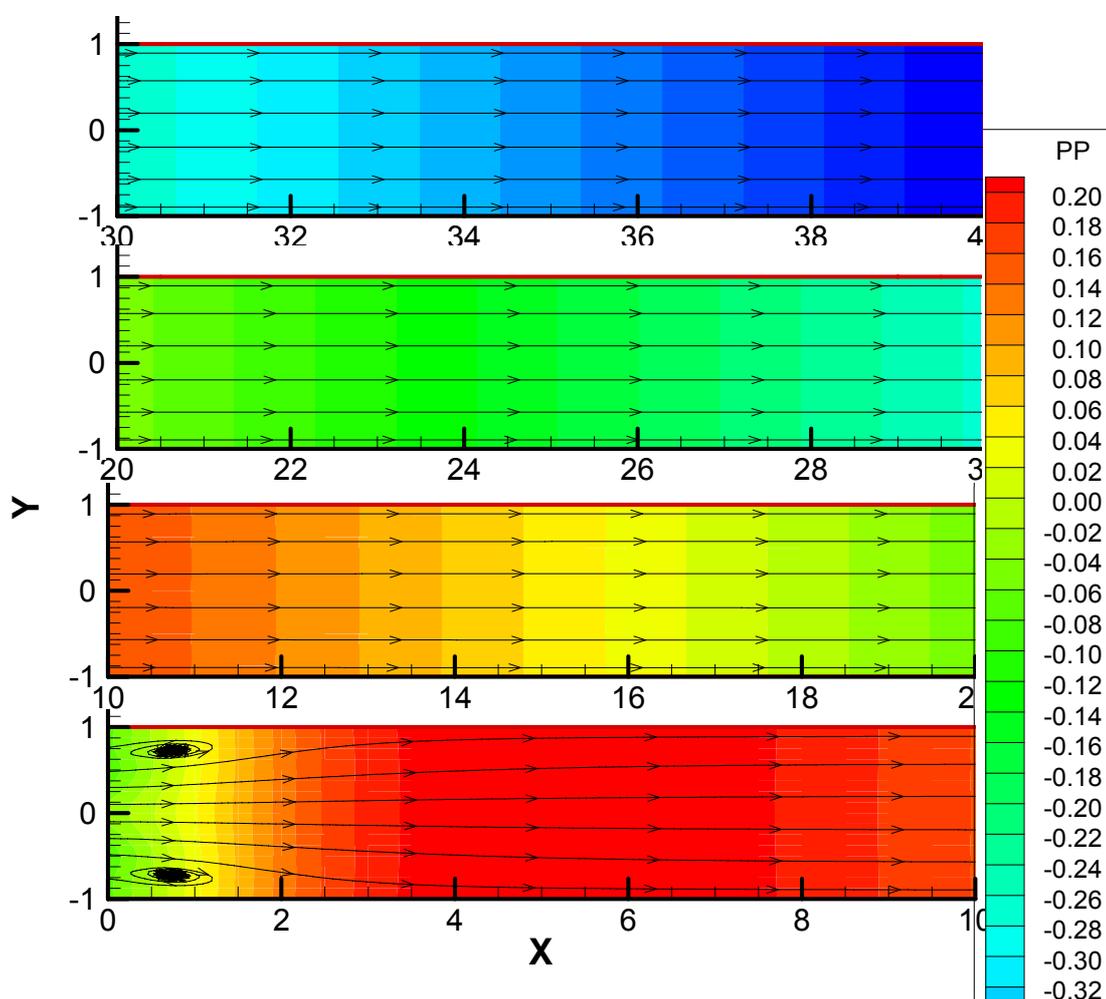


Figura 10: curvas de nivel para la presión para la transición entre los regímenes de flujo desarrollados de entrada y salida, $Re = 40$, para el caso $n = 1$, siendo $r = \frac{1}{2}$.

En la Figura 11 se muestran los perfiles de la componente de la velocidad horizontal, para el caso $Re = 40$, siendo $r = \frac{1}{3}$ para fluidos de índice de potencia $n = 1, 0.9, 1.1465$). Se detalla, en cada caso, la transición del perfil correspondiente al flujo desarrollado en la sección de entrada al flujo desarrollado en la sección de salida. Se observa claramente la recirculación.

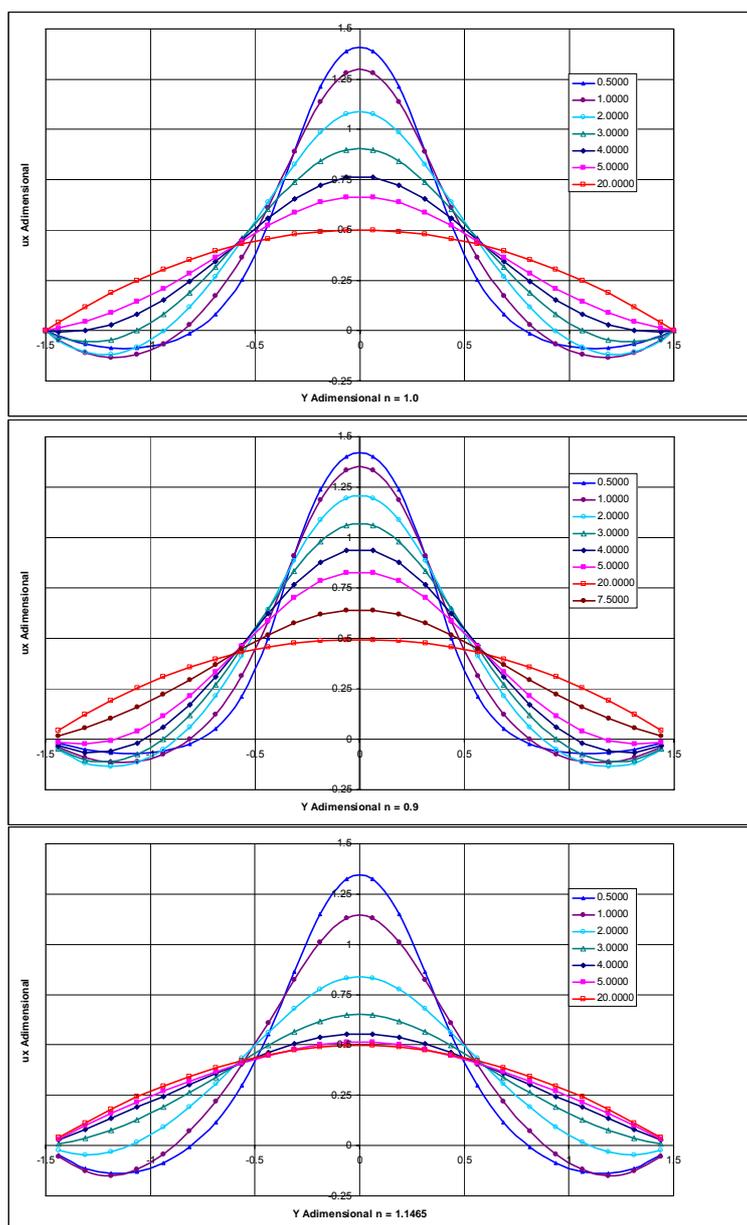


Figura 11: Perfiles de la componente horizontal adimensional de la velocidad para la transición entre los regímenes de flujo desarrollados de entrada y salida, $Re = 40$, para los casos $n = 1.0, 0.9, 1.1465$, siendo $r = \frac{1}{3}$.

4 CONCLUSIONES

Se ha presentado la metodología utilizada para la simulación del flujo de fluidos newtonianos y no newtonianos que verifican la denominada ley de la potencia, mediante la técnica de volúmenes finitos implementada a través del algoritmo SIMPLER, y su aplicación a problemas en un rango números de Reynolds por debajo del valor crítico en que el flujo pierde simetría ($Re \approx 138$ en expansión 1:2 para $n=1$, $Re \approx 50$ en expansión 1:3). La metodología se ha validado comparando los resultados obtenidos con los publicados en referencias detalladas, tantos en el caso particular del fluido Newtoniano en que el índice de la potencia es la unidad como para índice de potencia de valor mayor que la unidad. Para el índice de referencia utilizado ($n = 1.1465$), los resultados obtenidos no difieren sensiblemente de los correspondientes al caso newtoniano ($n = 1$). La consistencia en los resultados preliminares obtenidos en perfiles de velocidades y curvas de nivel de presión y velocidad permite avanzar a situaciones más complejas. Resulta asimismo necesario analizar el comportamiento de estos fluidos a mayores números de Reynolds, en dominios suficientemente extensos, para observar la ruptura de simetría con posible presencia de recirculaciones adicionales a la que tiene lugar en la propia expansión.

5 REFERENCIAS

Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company (1984)

Brydson A.J., *Flow Properties of Polymer Melts*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, NY 10001, pp. 1-20 (1970).

El-Gamal I.M. and Gad E.A.M., "Low Temperature Rheological Behavior of Umbarka Waxy Crude and Influence of Flow Improver", *Revue de L'Institut Français du Pétrole*, **52**, N° 3, 369-379 (1997).

Hammand K., Ötügen M.V., Vradis G.C., Arik E.B., Laminar Flow of a Nonlinear Viscoplastic Fluid Through an Axisymmetric sudden expansion. *J. Fluids Engineering*, Vol. 121, June 1999, 488-495

Hirsch C., Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume I: Fundamentals of Numerical Discretization, 12.6 The Multi-grid Method, John Wiley and Sons, 1990.

Horane E., Prado R., Aproximación Mediante Volúmenes Finitos Del Flujo De Fluidos De La Ley De La Potencia En Una Expansión Asimétrica Brusca 2D. *MECOM*. 24 (2005) 2499–2516

Manica R., De Bortoli A.L., Simulation of sudden expansion flows for power-law fluids. *J.*

Non-Newtonian Fluid Mech. 121 (2004) 35–40

Missirlis K.A., Assimacopoulos D., Mitsoulis E., A finite volume approach in the simulation of viscoelastic expansion flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 78 (1998) 91–118

Neofytou Panagiotis, Transition to asymmetry of generalised Newtonian fluid flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 133 (2006) 132–140

Neofytou P., Drikakis D., Non-Newtonian flow instability in a channel with a sudden expansion. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 111 (2003) 127–150

Oliveira P.J., Asymmetric flows of viscoelastic fluids in symmetric planar expansion geometries. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 114 (2003) 33–63

Oliveira P.J., Pinho F.T., Pressure drop coefficient of laminar Newtonian flow in axisymmetric sudden expansions. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 18, No. 5, (1997) 518-529

Patankar S.V., *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw Hill (1980).

Pinho F.T., Oliveira P.J., Miranda J.P., Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 24 (2003) 747–761

Revelta A., On the two-dimensional flow in a sudden expansion with large expansion ratios. *Physics of Fluids* **17**, 028102 (2005)

Ternik P., Marn J., Zunic Z., Non-Newtonian fluid flow through a planar symmetric expansion: Shear-thickening fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* Vol 135, 2-3, (2006) 136–148.

Versteeg H.K. and Malalasekera W., *An introduction to computational fluid dynamics – The finite volume method*, John Wiley & Sons (1995).

Xu Jian-Zhong & Yu Wen-Sheng, “On The Slightly Reduced Navier-Stokes Equations”, *J. of Fluids Engineering*, **119**, 90-xx (1997).