

## DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE PARÁMETROS FÍSICOS EN LA PELÍCULA FLUIDA DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

Gustavo G. Vignolo<sup>a,c</sup>, Daniel O. Barilá<sup>c</sup>, Lidia M. Quinzani<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av Alem 1253 – 8000 – Bahía Blanca - Buenos Aires, ARGENTINA, [gvignolo@plapiqui.edu.ar](mailto:gvignolo@plapiqui.edu.ar)*

<sup>b</sup> *Planta Piloto de Ingeniería Química (PLAPIQUI), Universidad Nacional del Sur – CONICET Camino La Carrindanga km. 7 – CC 717 - Bahía Blanca - Buenos Aires, ARGENTINA, [lquinzani@plapiqui.edu.ar](mailto:lquinzani@plapiqui.edu.ar)*

<sup>c</sup> *Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Ruta Prov. N° 1, Km. 4 – 9000 – Comodoro Rivadavia - Chubut, ARGENTINA, [dbarila@unpata.edu.ar](mailto:dbarila@unpata.edu.ar)*

**Palabras Clave:** Lubricación Hidrodinámica, Cojinete, Método de Gear.

**Resumen:** La lubricación hidrodinámica ocurre cuando existen dos superficies deslizantes en medio de las cuales se tiene un fluido lubricante que las mantiene separadas e impide su contacto gracias al campo de presiones generado por el flujo. Las propiedades del mismo se determinan a través de la resolución de las ecuaciones de conservación. En general, se utilizan los balances de cantidad de movimiento integrados en el balance de masa, obteniendo la conocida ecuación de Reynolds. En ella, la presión es constante en el espesor de la película fluida, por lo que el problema se reduce a dos dimensiones (para el proceso isotérmico). Existen soluciones analíticas de la ecuación de Reynolds para casos sencillos, pero para obtener resultados de situaciones más realistas debe recurrirse al empleo de técnicas numéricas de resolución de ecuaciones diferenciales parciales.

En este trabajo se presenta la plataforma para la solución numérica de los balances para el lubricante. Para ello, se genera una grilla computacional elíptica que transforma el dominio físico, de forma irregular, en un rectángulo. Los balances se expresan en el dominio computacional y se resuelven en el mismo, para luego recuperar la información en la grilla equivalente en el dominio físico.

Se trabaja con diferencias finitas en las coordenadas coincidentes con la direcciones principal del flujo, considerando diferencias centrales en los nodos interiores y diferencias hacia adelante y hacia atrás de orden dos en los extremos inicial y final, respectivamente. El sistema de ecuaciones resultante se resuelve por el método de Gear acoplado con una técnica de shooting, ya que sólo se conocen la mitad de los valores iniciales de las variables de integración.

En esta etapa, se trabajó con flujo reptante de un fluido newtoniano, incompresible e isotérmico sobre un cojinete alineado, con el objetivo de verificar las soluciones analíticas límite existentes.

Hasta el presente se ha probado la robustez del sistema con diversas condiciones iniciales y se han comparado los resultados obtenidos mediante esta formulación con datos de otros métodos y otros autores, logrando buenas predicciones en las propiedades de la película fluida.

Los pasos posteriores contemplan la incorporación de términos inerciales a los balances de cantidad de movimiento, fluidos no newtonianos, compresibilidad, variaciones de temperatura, desalineación y demás variantes que se deseen.

## 1 INTRODUCCION

Los cojinetes de deslizamiento son componentes fundamentales de un sinnúmero de máquinas de muy distinta potencia usadas en las más diversas aplicaciones (Hamrock et al., 2004; Pinkus, 1961). Conocer y entender el comportamiento de los cojinetes en función del tipo de sollicitación a la que son sometidos, el lubricante utilizado y las condiciones de trabajo puede ser útil tanto en la etapa de diseño como en el análisis de fallas. Su principio de operación se basa en la presión generada por el fluido lubricante que mantiene separadas a las superficies sólidas en movimiento relativo (eje y cojinete). La descripción físico-matemática de este fenómeno lleva usualmente a una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales conocida como ecuación de Reynolds. La no linealidad de dicha ecuación hace que sólo se conozcan soluciones analíticas a casos extremos, como lo son los cojinetes isotérmicos infinitamente cortos e infinitamente largos (Pinkus, 1961). Si bien existen modificaciones a la ecuación de Reynolds para que pueda aplicarse a situaciones más generales (ecuación de Reynolds Generalizada) como el empleo de fluidos no Newtonianos, superficies rugosas, etc., la incorporación de escenarios reales se torna sumamente dificultosa por dos motivos principales. El primero es que la ecuación es independiente del espesor de la película fluida, por lo que se necesita a priori el conocimiento de las variables integradas en dicho espesor (Vignolo et al., 2008). El segundo es que la solución de situaciones más realistas implica la aplicación de técnicas complejas de perturbación o métodos computacionales (Vignolo et al., 2007).

Por ello, en este trabajo se resuelven numéricamente las ecuaciones de conservación antes de ser integradas en el espesor. Esto permite evaluar, por ejemplo, la validez de las hipótesis consideradas en la ecuación de Reynolds, a la vez que permite incorporar más fácilmente efectos como la existencia de inercia en el fluido, desalineación en el eje, flujo no isotérmico, fluido no Newtoniano, etc.

En esta instancia se presenta el desarrollo de las ecuaciones, método numérico y resultados obtenidos para cojinetes de longitud arbitraria, con flujo isotérmico de un lubricante Newtoniano.

## 2 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

En su forma más elemental, un cojinete consta de un eje que gira contenido dentro de un cilindro de ajuste estrecho (cojinete), cuyas superficies están separadas por una pequeña película de lubricante. Si el eje gira a una velocidad angular  $\Omega$  y existe una fuerza  $F$  aplicada al mismo, los centros del eje y del cojinete no permanecen coincidentes, sino que muestran cierta excentricidad,  $e$  (Figura 1a). Esto genera una geometría convergente-divergente en la película fluida que, junto con el movimiento relativo entre las superficies sólidas, permite que se desarrolle presión por efectos viscosos en la misma, logrando así capacidad para soportar la carga aplicada y evitar el contacto entre dichas superficies.

Para conocer el comportamiento de este sistema, es necesario estudiar el flujo de lubricante. La principal hipótesis simplificatoria que se considera en el análisis es que la capa de fluido es tan delgada, comparada con el radio del cojinete, que su curvatura puede despreciarse. Así, el tratamiento que en principio debería hacerse en coordenadas cilíndricas, se hace en coordenadas cartesianas (Figura 1b).

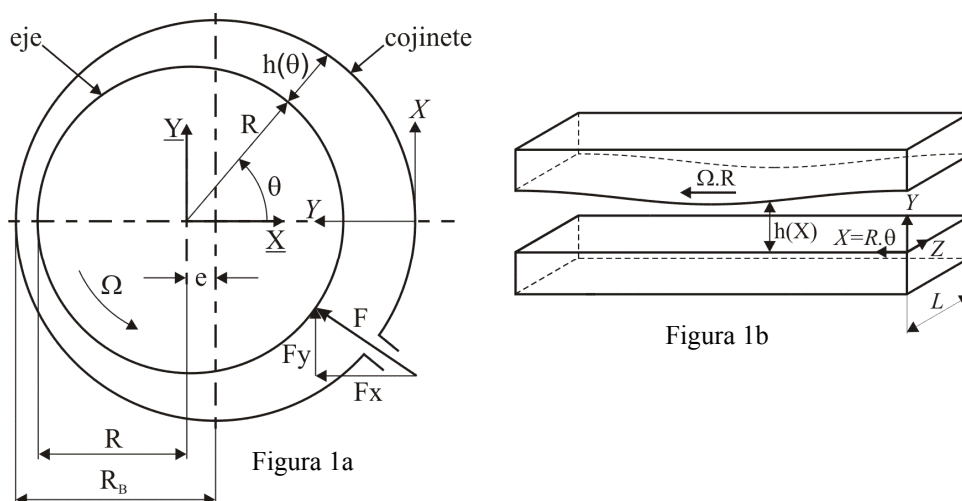


Figura 1: Geometría de un cojinete hidrodinámico (a) y de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b). Al despreciarse la curvatura, la coordenada X puede considerarse como  $R\theta$ .

### 2.1 Análisis dimensional

Si se considera que el fluido es Newtoniano, con densidad,  $\rho$ , y capacidad calorífica,  $C_v$ , constantes, y que el huelgo,  $c=R_B-R$ , entre el eje y el cojinete es varios órdenes de magnitud menor que el diámetro,  $D=2R$ , los términos dominantes de las ecuaciones de conservación adimensionales son:

$$\text{Balance de Masa: } 0 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1)$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento } (\Theta): 0 = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial \Theta} + f \left( \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento } (y): 0 = -\frac{L^2}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y} + f \left( \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento } (z): 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + f \left( \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\text{Balance de Energía: } \left( \frac{u}{\pi} \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + f \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5)$$

donde  $\lambda = \frac{kR}{Uc^2 \rho C_v}$ ,  $k$  es la conductividad del fluido,  $U$  la velocidad tangencial del eje y  $f$  es la ley de variación de la viscosidad con la temperatura. En este caso se adopta la Ley de Vogel, definida como:

$$\mu = \mu_0 f = \mu_0 e^{-\beta_0(T-T_0)} \quad (6)$$

que puede reescribirse de la forma

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta_0(T-T_0)} = \mu_0 e^{-\beta_0 t T_{REF}} = \mu_0 e^{-\kappa_1 t} \quad (7)$$

donde  $\kappa_1 = \beta_0 T_{REF} = \beta_0 \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left(\frac{R}{c}\right)^2$  se conoce como “parámetro adimensional de aumento de temperatura” y  $\beta_0$  es una constante que depende del fluido.

Las variables adimensionales se definen como:

$$p = \frac{P}{P_{REF}} \text{ con } P_{REF} = \frac{\mu_0 U}{R} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2, \quad t = \frac{T-T_0}{T_{REF}} \text{ con } T_{REF} = \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left(\frac{R}{c}\right)^2, \quad (8)$$

$$\Theta = \frac{X}{\pi R}, \quad y = \frac{Y}{c}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad u = \frac{V_\Theta}{U}, \quad v = \frac{V_y}{U} \frac{R}{c}, \quad \text{y} \quad w = \frac{V_z}{U} \frac{R}{L}.$$

Si se considera el flujo isotérmico de lubricante (derivadas de la temperatura nulas) el Balance de Cantidad de Movimiento en dirección  $y$  es de orden de magnitud  $c^2/R^2$  si se lo compara con, por ejemplo, el balance en la dirección  $\Theta$ , por lo que podría asumirse que la presión es prácticamente independiente de la coordenada  $y$ . No obstante si se considera la variación de temperatura dentro de la película fluida, dicho balance debe ser tenido en cuenta dado que el coeficiente de adimensional  $\kappa_1$  modifica el orden de magnitud de la ecuación, resultado:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + f \left( \beta \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c^2}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

Claramente puede observarse que la presión será variable en el espesor dependiendo de la relación  $(R/L)^2$ . Esta consideración suele obviarse en el análisis termohidrodinámico de cojinetes ya que, por lo general, se trabaja con la ecuación de Reynolds Generalizada, la cual no contempla la ecuación de conservación en la dirección  $y$  (Mitsui, 1987).

En este trabajo, si bien se analiza el comportamiento isotérmico del flujo, se considera el Balance de Cantidad de Movimiento en la dirección  $y$  con la finalidad de facilitar la incorporación de nuevas variables en trabajos futuros.

## 2.2 Condiciones de Borde para Flujo Isotérmico

El problema queda determinado por las condiciones de borde sobre las superficies del eje ( $y = \tilde{h}$ ) y del cojinete ( $y = 0$ ) para las componentes de la velocidad, y de la presión exterior al sistema y de suministro de lubricante:

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\tilde{h}} = 1, \quad v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=\tilde{h}} = \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta}, \quad w|_{y=0} = 0, \quad \text{y} \quad w|_{y=\tilde{h}} = 0, \quad (10)$$

$$p|_{\Theta=0} = 0, \quad p|_{\Theta=1} = 0, \quad p|_{z=0} = 0, \quad \text{y} \quad p|_{z=1} = 0,$$

donde  $\tilde{h}$  es el espesor de película adimensional. Para el caso de eje y cojinete alineados (ejes paralelos) dicho espesor se define como:

$$\tilde{h} = \frac{h}{c} = 1 + \varepsilon \cos(\pi\Theta) \quad (11)$$

siendo  $\varepsilon = \frac{e}{c}$  la excentricidad relativa.

Puede verse en las Ecuaciones (8) que se ha empleado una condición de borde tipo Gumbel (Vignolo et al., 2007), en donde se considera que la presión adimensional de  $1 < \Theta < 2$  es nula, con el objetivo de considerar la incapacidad de los líquidos de tomar presiones negativas sin cambiar de estado.

### 3 GENERACIÓN DE LA GRILLA COMPUTACIONAL

A pesar de que la aplicación del método tradicional de diferencias finitas presenta varias ventajas, su aplicación a dominios de forma irregular requiere de interpolación y manipulación numérica sobre las fronteras físicas. Estas operaciones son engorrosas, reducen la exactitud del método, y lo hacen difícil de aplicar a programas de propósito general (Tucker, 1989). Otras técnicas numéricas, como por ejemplo elementos finitos, pueden fácilmente manejar dominios de forma irregular y, de hecho, se emplean ampliamente en la resolución de problemas de flujo en cojinetes (Durani et al., 2006; Liu et al., 2004; Zhang et al., 2002). El método de diferencias finitas puede también hacerlo con facilidad y exactitud, usando técnicas de generación de grilla numérica.

La generación de grilla numérica es esencialmente una técnica de transformación (mapping). En primer lugar, un dominio físico con geometría compleja es llevado a un dominio computacional de forma regular. Luego, un problema equivalente se plantea en el dominio computacional transformando las ecuaciones gobernantes al sistema de coordenadas computacional. Por último, las ecuaciones transformadas se resuelven en el dominio computacional utilizando el método tradicional de diferencias finitas.

Estas transformaciones requieren relaciones entre ambos sistemas de coordenadas dadas por un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (Tucker, 1989). En principio, las ecuaciones de generación de la grilla pueden ser de cualquier tipo: parabólicas, hiperbólicas o elípticas. En este trabajo se emplean generadoras de grillas elípticas porque distribuyen los nodos suavemente en el dominio físico y manejan efectivamente discontinuidades y singularidades en las fronteras.

Si se considera el caso mostrado en la Figura 1 en donde  $h = h_{(\Theta)}$  (eje y cojinete alineados), pueden emplearse ecuaciones de transformación en dos dimensiones dado que el espesor es independiente de la coordenada axial  $z$ .

Las ecuaciones elípticas de generación de grillas tipo Poisson para un problema bidimensional son:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = S_{(\xi, \eta)}, \quad y \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q_{(\xi, \eta)}$$

donde  $(\Theta, y)$  son las coordenadas físicas, y  $(\xi, \eta)$  son las coordenadas curvilíneas computacionales.  $S$  y  $Q$  son funciones de control de grilla que permiten manipular la distribución de nodos en el dominio físico.

Al resolver las Ecuaciones (12) para generar el par  $(x, y)$  correspondiente a cada  $(\xi, \eta)$  se

tiene:

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + J^2 \left( S \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + J^2 \left( S \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0$$

$J$  es el Jacobiano de la transformación dado por

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad y \quad (14)$$

los coeficientes geométricos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son:

$$\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad y \quad \gamma = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2. \quad (15)$$

La solución de las Ecuaciones (13) a (15) genera la grilla. En este trabajo, dado que se conoce a priori la función que describe la superficie irregular del dominio ( $y=h$ ), se utilizan funciones de control  $S(\eta, \xi)$  y  $Q(\eta, \xi)$  para garantizar la distribución uniforme de nodos, definidas como:

$$S_{(\eta, \xi)} = 0, \quad y \quad Q_{(\eta, \xi)} = - \frac{\eta \left( h_{(\xi)} \frac{\partial^2 h_{(\xi)}}{\partial \xi^2} - 2 \left( \frac{\partial h_{(\xi)}}{\partial \xi} \right)^2 \right)}{h_{(\xi)}^2}. \quad (16)$$

De esta manera, la transformación de coordenadas queda definida por:

$$\Theta = \xi, \quad e \quad y = \eta h_{(\xi)} \quad (17)$$

En la Figura 2 puede observarse la grilla en coordenadas físicas y coordenadas computacionales.

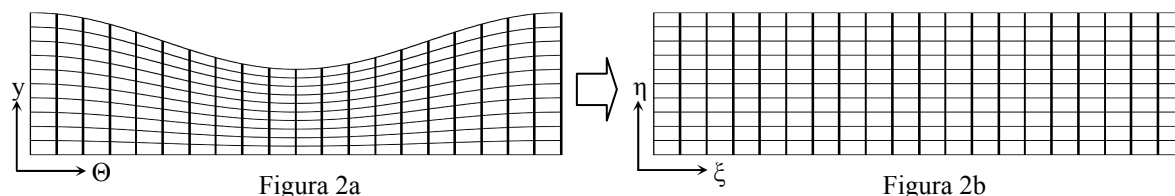


Figura 2: Transformación del sistemas de coordenadas físico (a) al sistema curvilíneo computacional (b)

#### 4 TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES AL DOMINIO $\eta$ - $\xi$ - $z$

El siguiente paso en la solución del problema es la transformación de las ecuaciones gobernantes y sus condiciones de borde al dominio computacional. Dado que se trata de ecuaciones diferenciales parciales, deben sustituirse las derivadas de un sistema de coordenadas al otro. En este caso, las derivadas de interés de cualquier variable  $\phi$  quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{1}{h_{(\xi)}} \left( h_{(\xi)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \eta \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{h_{(\xi)}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{h_{(\xi)}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \quad (18)$$

quedando las derivadas respecto de  $z$  sin cambios.

Así, para el caso presentado de un cojinete isotérmico con lubricante Newtoniano, el balance de masa (BM) y los balances de cantidad de movimiento (BCM) de las Ecuaciones (1) a (4) se transforman en:

$$\text{BM: } 0 = \frac{1}{\pi} \left( h_{(\xi)} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial v}{\partial \eta} + h_{(\xi)} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (19)$$

$$\text{BCM } (\Theta): \quad 0 = -\frac{h_{(\xi)}}{\pi} \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( h_{(\xi)} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \eta \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (20)$$

$$\text{BCM } (y): \quad 0 = -\frac{L^2}{c^2} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{h_{(\xi)}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \quad (21)$$

$$\text{BCM } (z): \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{h_{(\xi)}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \quad (22)$$

El Balance de Energía carace de interés precisamente por no considerarse variaciones de temperatura.

## 5 MÉTODO NUMÉRICO

La solución numérica del problema planteado es compleja debido a la no linealidad de las ecuaciones. Trabajos previos han utilizado tanto el método de diferencias finitas como el de elementos finitos. No obstante, no se ha encontrado una plataforma de código abierto que permita incorporar las variables físicas ya mencionadas que acercan el problema a la realidad.

En este trabajo se emplea el método de diferencias finitas en las coordenadas  $\xi$  y  $z$  considerando diferencias centrales en los nodos interiores y diferencias hacia adelante y hacia atrás de orden dos en los extremos (Failla et al., 1996). El sistema resultante consiste de  $N$  ecuaciones diferenciales ordinarias en la coordenada  $\eta$ , donde  $N$  es el producto del número de variables por nodo por el número total de nodos. En este caso, se trabaja con seis variables

por nodo:  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ , y  $p$ .

En número de nodos por cada plano  $\xi$ - $z$  está dado por el producto  $(NINX+1)(NINZ+1)$ , donde  $NINX$  y  $NINZ$  son la cantidad de divisiones que se consideran en el eje  $\xi$  y  $z$ , respectivamente. Las ecuaciones gobernantes (19) a (22) se asocian y reescriben para obtener de forma explícita las derivadas de las variables de interés respecto de la coordenada  $\eta$ :

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{1}{\pi} \left( h_{(\xi)} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - h_{(\xi)} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\left( \frac{L}{R} \right)^2 \pi h_{(\xi)}^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} + \left( \frac{c}{R} \right)^2 \eta \left( h_{(\xi)} \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \left( \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \pi h_{(\xi)} \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)}{\pi^2 + \eta^2 \left( \frac{c}{R} \right)^2 \left( \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \right)^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = h_{(\xi)}^2 \frac{\partial p}{\partial z} \quad (25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = - \frac{\left( \frac{c^2}{L^2} \right) \pi h_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \pi \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \eta \left( \frac{L}{R} \right)^2 h_{(\xi)}^2 \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \pi^2 h_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)}{h_{(\xi)} \left( \pi^2 + \eta^2 \left( \frac{c}{R} \right)^2 \left( \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \right)^2 \right)} \quad (26)$$

Las ecuaciones de diferencias resultantes, para los nodos interiores, quedan expresadas como:

$$\frac{du_{(\eta)}}{d\eta} = ZP_{6i-5+6(k-1)(NINT+1)} = Z_{6i-2+6(k-1)(NINT+1)} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{(\eta)}}{d\eta} = ZP_{6i-4+6(k-1)(NINT+1)} = & - \frac{h_i}{\pi} \frac{Z_{6i+1+6(k-1)(NINT+1)} - Z_{6i-1+6(k-1)(NINT+1)}}{2 \Delta \xi} + \\ & + \eta \frac{dh_i}{\pi} \frac{Z_{6i-2+6(k-1)(NINT+1)} - h_i \frac{Z_{6i-3+6k(NINT+1)} - Z_{6i-3+6(k-2)(NINT+1)}}{2 \Delta z}} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{dw_{(\eta)}}{d\eta} = ZP_{6i-3+6(k-1)(NINT+1)} = Z_{6i-1+6(k-1)(NINT+1)} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{du_{(\eta)}}{d\eta} \right) = ZP_{6i-2+6(k-1)(NINT+1)} = & \frac{h_i^2 \frac{Z_{6i+6+6(k-1)(NINT+1)} - Z_{6i-6+6(k-1)(NINT+1)}}{2 \Delta \xi} \pi \frac{L^2}{R^2}}{\pi^2 + \frac{c^2}{R^2} \eta^2 dh_i^2} + \\ & + \frac{\frac{c^2}{R^2} \eta dh_i h_i \frac{(Z_{6i+4+6(k-1)(NINT+1)} - Z_{6i-8+6(k-1)(NINT+1)})}{2 \Delta \xi} - \frac{c^2}{R^2} \eta dh_i^2 Z_{6i-2+6(k-1)(NINT+1)}}{\pi^2 + \frac{c^2}{R^2} \eta^2 dh_i^2} + \\ & + \frac{\frac{c^2}{R^2} \eta dh_i h_i \pi \frac{(Z_{6i-1+6(k)(NINT+1)} - Z_{6i-1+6(k-2)(NINT+1)})}{2 \Delta z}}{\pi^2 + \frac{c^2}{R^2} \eta^2 dh_i^2} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{d^2 w_{(\eta)}}{d\eta^2} = ZP_{6i-1+6k(NINT+1)} = h_i^2 \frac{Z_{6i+6k(NINT+1)} - Z_{6i+6(k-2)(NINT+1)}}{2 \Delta z} \quad (31)$$



$$\begin{aligned} \frac{dp_{(\eta)}}{d\eta} = ZP_{6i+6(k-1)(NINT+1)} = & -\left(\frac{c^2}{L^2}\right) \left[ \frac{h_i \left( \frac{Z_{6i+4+6(k-1)(NINT+1)} - Z_{6i-8+6(k-1)(NINT+1)}}{2 \Delta \xi} \right) \pi}{h_i \left( \pi^2 + \frac{c^2}{R^2} \eta^2 dh_i^2 \right)} \right] - \\ & -\left(\frac{c^2}{L^2}\right) \left[ \frac{-dh_i Z_{6i-2+6(k-1)(NINT+1)} \pi - dh_i \eta h_i^2 \frac{L^2}{R^2} \left( \frac{Z_{6i+6+6(k-1)(NINT+1)} - Z_{6i-6+6(k-1)(NINT+1)}}{2 \Delta \xi} \right)}{h_i \left( \pi^2 + \frac{c^2}{R^2} \eta^2 dh_i^2 \right)} \right] - \\ & -\left(\frac{c^2}{L^2}\right) \left[ \frac{\pi^2 h_i \left( \frac{Z_{6i-1+6(k)(NINT+1)} - Z_{6i-1+6(k-2)(NINT+1)}}{2 \Delta z} \right)}{h_i \left( \pi^2 + \frac{c^2}{R^2} \eta^2 dh_i^2 \right)} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

$h_i$  y  $dh_i$  equivalen a  $h_{(\xi)}$  y su derivada primera respecto de  $\xi$ , respectivamente, para cada posición  $i$  sobre el eje  $\xi$ . Las variables ZP son las derivadas respecto de  $\eta$  de las variables de interés Z, en donde para cada nodo  $i,k$  quedan representadas por:

$$\begin{aligned} u_{i,k} &= Z_{6i-5+6(k-1)(NINT+1)} \\ v_{i,k} &= Z_{6i-4+6(k-1)(NINT+1)} \\ w_{i,k} &= Z_{6i-3+6(k-1)(NINT+1)} \\ \left(\frac{du}{d\eta}\right)_{i,k} &= Z_{6i-2+6(k-1)(NINT+1)} \\ \left(\frac{dw}{d\eta}\right)_{i,k} &= Z_{6i-1+6(k-1)(NINT+1)} \\ p_{i,k} &= Z_{6i+6(k-1)(NINT+1)} \end{aligned} \quad (33)$$

Para las fronteras del dominio, se reemplazan las diferencias centrales de las Ecuaciones (27) a (32) por diferencias hacia adelante o hacia atrás, según corresponda. El sistema de ecuaciones resultante se resuelve por el método de Gear (Pozrikidis, 1998) acoplado a una técnica de shooting, ya que sólo se conocen la mitad de los valores iniciales de las variables de integración ( $u$ ,  $v$  y  $w$  en  $\eta=0$ ). Los valores iniciales de las otras variables ( $du/d\eta$ ,  $dw/d\eta$  y  $p$ ) son estimaciones que se ajustan de iteración en iteración hasta cumplir con las condiciones en el otro borde ( $u$ ,  $v$  y  $w$  en  $\eta=1$ ). Para ello, se implementó un algoritmo modular en Visual Fortran considerando la posibilidad y facilidad de expandirlo a situaciones más complejas.

## 6 ECUACIÓN DE REYNOLDS Y SOLUCIONES LÍMITE

Con el objetivo de verificar el correcto funcionamiento del programa implementado, se elaboró en Maple un algoritmo para resolver la ecuación de Reynolds por diferencias finitas. Dicha ecuación, que surge de integrar las Ecuaciones (1), (2) y (4) en el espesor de la película fluida, se expresa de la siguiente forma:

$$6\pi \frac{\partial h_{(\Theta)}}{\partial \Theta} = \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( h_{(\Theta)}^3 \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right) + \pi^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h_{(\Theta)}^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (34)$$

Asimismo, se analizaron las soluciones límite existentes a la Ecuación 34. Esto es, el cojinete infinitamente corto y el infinitamente largo (Pinkus, 1961). Las expresiones analíticas respectivas para cada caso son:

$$p = -\frac{3 \varepsilon \sin(\pi \Theta)}{(1 + \varepsilon \cos(\pi \Theta))^3} (z^2 - z), \quad y \quad (35)$$

$$p = 6 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\varepsilon (2 + \varepsilon \cos(\pi \Theta)) \sin(\pi \Theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos(\pi \Theta))^2}. \quad (36)$$

## 7 RESULTADOS

A continuación se presentan los perfiles de presión obtenidos para diversas condiciones geométricas y operativas. La Figura 3 muestra los perfiles tangenciales de presión en el centro del cojinete ( $z=0$ ) para diversas relaciones  $L/R$ . En todos los casos se mantuvo una excentricidad  $\varepsilon=0,5$  y una relación  $c/R=0,001$ . De igual manera, en la Figura 4 pueden verse los perfiles axiales de presión para  $\Theta=0,5$ .

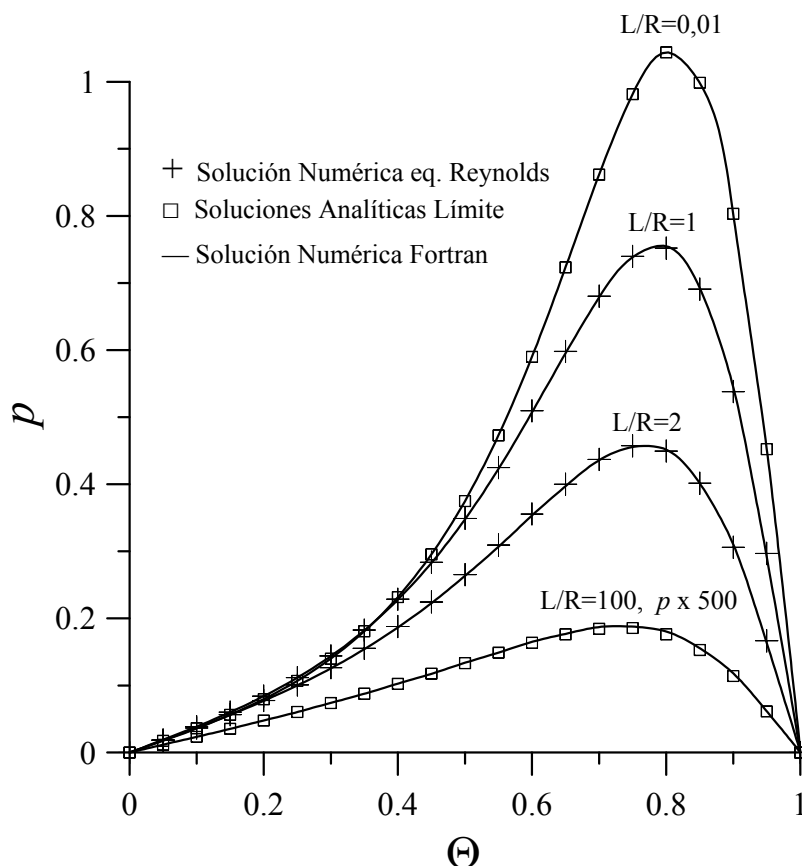


Figura 3

Figura 3: Comparación de perfiles de presión para  $z=0$ ,  $\varepsilon=0,5$  y  $L/R$  de 0,01, 1, 2 y 100 obtenidos mediante el método numérico propuesto, la solución numérica de la eq. de Reynolds y las soluciones analíticas límite.

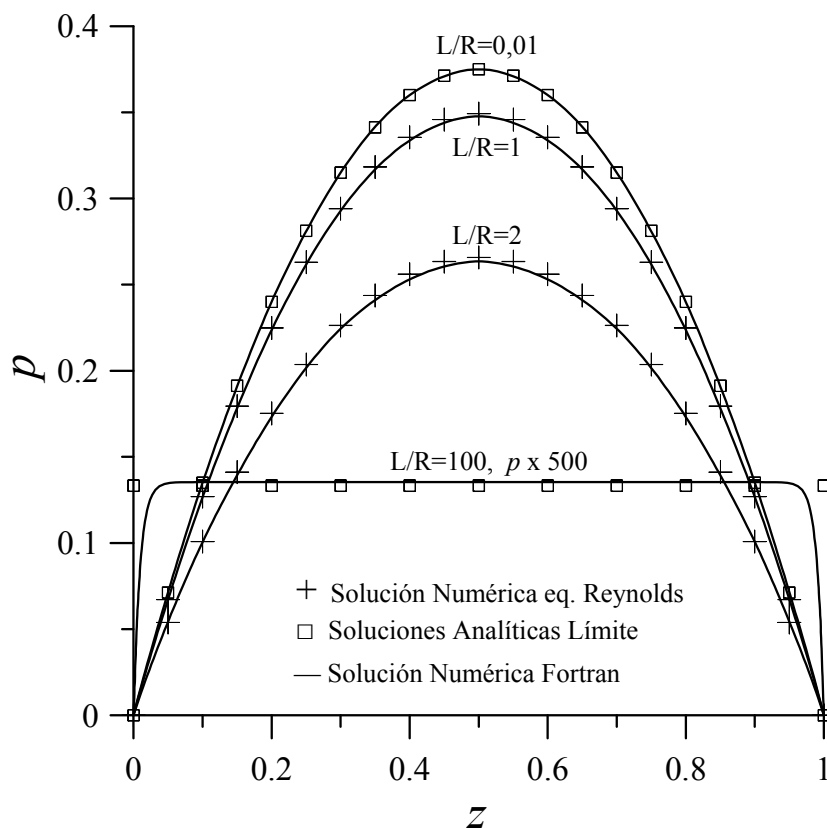


Figura 4

Figura 4: Comparación de perfiles de presión para  $\Theta=0$ ,  $\varepsilon=0,5$  y  $L/R$  de 0,01, 1, 2 y 100 obtenidos mediante el método numérico propuesto, la solución numérica de la eq. de Reynolds y las soluciones analíticas límite.

Puede deducirse de las Figuras 3 y 4 que el método propuesto predice correctamente los perfiles de presión ya que coincide tanto con la solución numérica de la ec. de Reynolds como con las soluciones analíticas límite (cojinete infinitamente corto e infinitamente largo), cuando corresponde. Cabe señalar que la solución numérica de la ec. de Reynolds para estas dos situaciones límite (no incluida en las figuras) también coincide con las soluciones analíticas (Vignolo et al., 2007).

Debe aclararse que el tiempo de cálculo del método propuesto es mucho mayor que el empleado por la resolución de la ecuación de Reynolds sola. Esto se debe a dos razones fundamentales: la primera es que mientras en la ecuación de Reynolds se resuelve una única variable por nodo ( $p$ ), el método propuesto resuelve seis variables por nodo; y la segunda es que al número de nodos que se resuelven en la ecuación de Reynolds (plano  $\Theta, z$ ), debe multiplicarse por la cantidad de divisiones que se consideran en el eje  $\eta$  para el método propuesto.

A fin de evaluar las posibilidades del algoritmo elaborado, en la Figura 5 se analizaron los perfiles radiales de presión para distintas relaciones  $c/R$ . Cabe aclarar que para que los resultados fuesen absolutamente válidos, debería trabajarse en coordenadas cilíndricas. No obstante, puede evaluarse la tendencia del perfil de presión al aumentar el espesor de la película fluida y determinar el espesor en el que dicho perfil debería considerarse no constante. Puede observarse que para relaciones  $c/R$  mayores a aproximadamente 0,01 la presión deja de ser constante en el espesor de la película. Igualmente, tales espesores deberían

ser tratados en sistemas de coordenadas cilíndricas. No obstante, la posibilidad de evaluar el BCM en la dirección  $y$  permitirá en trabajos futuros contemplar, por ejemplo, variaciones de presión debidas a cambios de temperatura en el espesor.

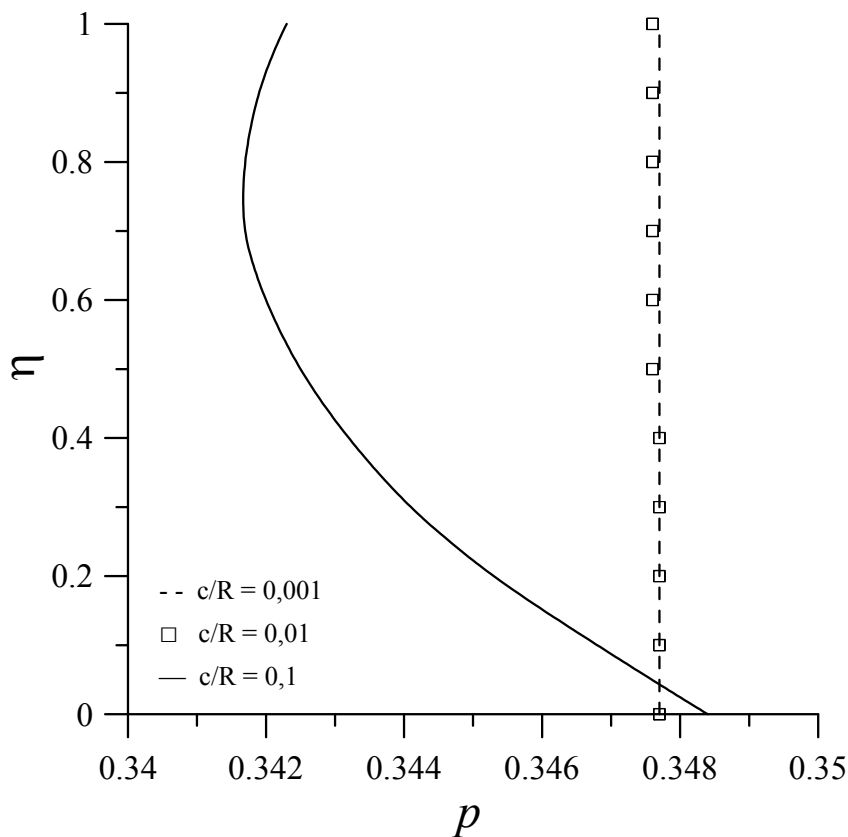


Figura 5

Figura 5: Perfiles de presión para  $z=0$ ,  $\Theta=0,5$ ,  $\varepsilon=0,5$ ,  $L/R=1$  y  $c/R$  de 0,001, 0,01 y 0,1 obtenidos mediante el método numérico propuesto.

En la Figura 6 se muestran perfiles axiales de presión para cojinetes comúnmente denominados “largos” con el objetivo de evaluar el espesor de la zona de influencia de la caída de presión en los bordes. Si se observa la Ecuación (36) puede notarse que la presión adimensional depende únicamente de la variable  $\Theta$ , por lo que no cumple con las condiciones de presión nula en los bordes (esto puede verse también en la Figura 4). Lo que sucede es que existe una “capa límite” adyacente a los extremos cuyo espesor es de orden  $R/L$ , donde la presión cae del valor dado por la Ecuación (36) a cero (Barrero Ripoll and Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, 2005). Para mostrar este fenómeno se superpone a los perfiles de presión de la Figura 6 una línea en cada extremo que corta a cada perfil con el valor de distancia respecto del borde igual al  $R/L$  correspondiente.

De acuerdo con los resultados mostrados en esta Figura, el espesor de la zona de influencia de la caída de presión en los bordes es del orden  $2R/L$ , necesiéndose contar con cojinetes de largo de al menos  $20R$  para que esta zona pueda interpretarse eficazmente como una “capa límite” que se acopla a una zona de presión constante.

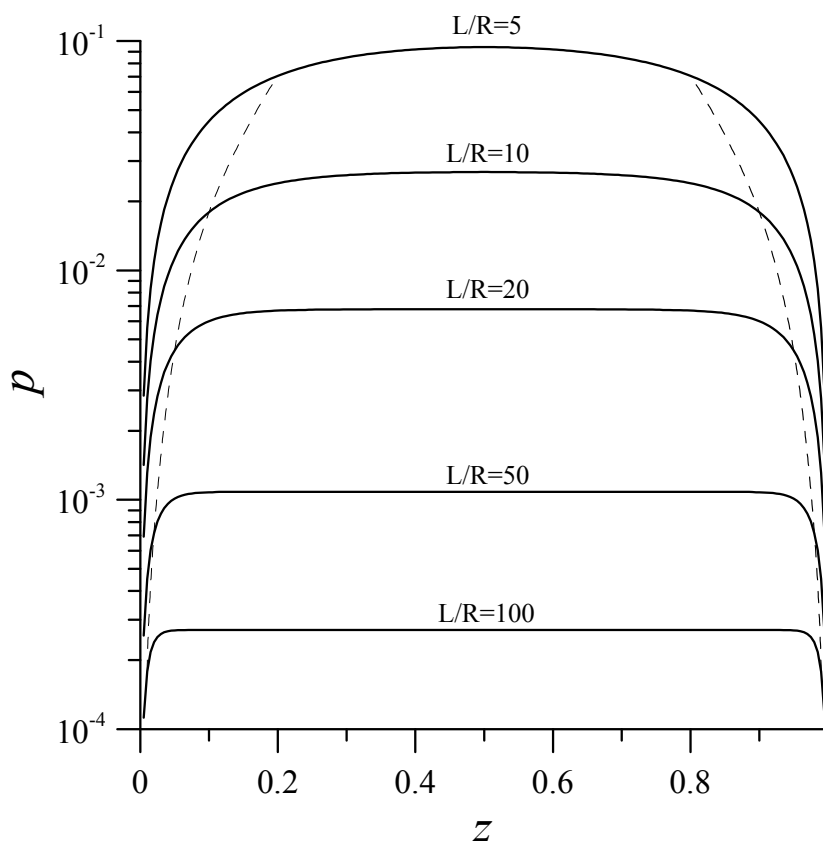


Figura 6

Figura 6: Perfiles axiales de presión para cojinetes “largos” para  $\Theta=0,5$ ,  $\varepsilon=0,5$ ,  $c/R=0,001$  y  $L/R$  de 5, 10, 20, 50 y 100 obtenidos mediante el método numérico propuesto. La línea de trazos corresponde al espesor de la “capa límite” de valor  $R/L$ .

## 8 CONCLUSIONES

En esta etapa del trabajo sistemático que se viene llevando a cabo (Vignolo et al., 2007, 2008) para contar con herramientas analíticas y numéricas para el análisis de cojinetes en condiciones reales de uso, se ha desarrollado un código abierto en Visual Fortran para resolver las ecuaciones de conservación en la película fluida de cojinetes hidrodinámicos isotérmicos. Los resultados muestran buena concordancia entre las predicciones de este código y la de soluciones previamente conocidas. La estructura del programa admite modificaciones para incorporar diversas variantes como flujo no isotérmico, fluido no Newtoniano, desalineación, inercia, etc, que serán tenidos en cuenta en trabajos futuros.

## REFERENCIAS

- Barrero Ripoll, A., and Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, M., *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos*. Mc Graw Hill, 2005.
- Durany, J., Pereira, J., Varas, F., Análisis Termohidrodinámico de un par Eje-Cojinete Combinando Métodos de Volúmenes Finitos y Elementos de Contorno, *Mecánica Experimental*, 13:13-25, 2006.
- Failla, M., Sarmoria, C., Villar, M., Brandolin, A., and Quinzani, L., Extrusion of Polymeric Films from a Planar Die., *Actas del 5° Simposio Latinoamericano de Polímeros (SLAP'96) y 3° Simp. Iberoamericano de Polímeros (SIAP)*, 381-382, 1996.
- Hamrock, B.J., Schmid, S.R., and Jacobson, B.O., *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*,

- Second Edition, Marcel Dekker, Inc., 2004.
- Liu, W.K., Xiong, S., Guo, Y., Wang, Q.J., Wang, Y., Yang, Q., and Vaidyanathan, K., Finite Element Method for Mixed Elastohydrodynamic Lubrication of Journal-Bearing Systems, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 60:1759–1790, 2004.
- Mitsui, J., A Study of Thermohydrodynamic Lubrication in a Circular Journal Bearing, *Tribology International*, 20:331-341, 1987.
- Pinkus, O., *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw Hill, 1961.
- Pozrikidis, C., *Numerical Computation in Science and Engineering*, Oxford University Press, 1998.
- Tucker, C.L., *Computer Modeling for Polymer Processing, Fundamentals*. Hanser Publishers, 1989.
- Vignolo, G.G., Barilá, D.O., and Quinzani, L.M., Análisis del Comportamiento del Cojinete de Longitud Finita Usando el Método de Perturbación Regular, *Mecánica Computacional*, XXVI:592-604, 2007.
- Vignolo, G.G., Barilá, D.O., and Quinzani, L.M., Estudio del Comportamiento de Cojinetes Hidrodinámicos de Longitud Finita, *Actas del I CAIM*, 2008.
- Zhang, Q., Guo, G., and Winoto, S.H., Analysis of Hydrodynamic Journal Bearing with GDQ Method, *Magnetic Recording Conference*, TU.P.06.01-02, 2002.