

ESTIMACIÓN DEL COMPORTAMIENTO ELÁSTICO EFECTIVO DEL TEJIDO ÓSEO TRABECULAR USANDO UN ENFOQUE MECÁNICO TRADICIONAL

Ariel A. Ibarra Pino y Adrián P. Cisilino

*División Soldadura y Fractomecánica –INTEMA-CONICET–, Universidad Nacional de Mar del Plata,
Av. Juan V. Justo 4302, 7600 Mar del plata, Argentina, aaibarra@fi.mdp.edu.ar,
<http://www.intema.gov.ar>*

Palabras Clave: Constantes Elásticas Efectivas, Tejido Óseo, Elementos finitos.

Resumen. El tejido óseo es un material compuesto natural con una microestructura anisótropa heterogénea optimizada para soportar las cargas funcionales. El análisis de la respuesta mecánica de un hueso considerando cada una de sus características microestructurales es un problema numéricamente intratable debido a la escala de la microestructura respecto de las dimensiones del problema macroscópico. Un método para superar esta dificultad es hallar un modelo de material equivalente que caracterice el comportamiento del tejido a escala macroscópica.

Se presenta en este trabajo un método para determinar el comportamiento elástico efectivo del tejido trabecular a escala macroscópica mediante un enfoque mecánico tradicional. Con este objeto se emplean modelos de elementos finitos para efectuar un análisis de tensiones en un elemento de volumen representativo RVE (por sus siglas en inglés) de la microestructura del tejido trabecular, se post-procesan las deformaciones y con éstas se calcula el tensor estructural M , que relaciona el tensor de deformaciones locales (del tejido) con el de deformaciones promedio en el RVE. Finalmente, el tensor M se emplea para hallar los coeficientes de la matriz de constantes elásticas para el material macroscópico equivalente.

El método se emplea tanto para hallar los coeficientes elásticos para geometrías idealizadas de trabéculas en dos y tres dimensiones, y como para realizar un estudio preliminar en geometrías de trabéculas construidas a partir de imágenes de microtomografía. Se analiza y discute la influencia del tamaño del RVE para el caso bidimensional.

1 INTRODUCCION

El tejido óseo es un material compuesto con una microestructura compleja optimizada para soportar las cargas funcionales, su baja masa permite que un organismo pueda moverse eficientemente minimizando los costos metabólicos (Rincón Rincón et al., 2004; Keaveny et al., 2002).

El tejido óseo es un material jerárquico y heterogéneo (Keaveny et al., 2002). Tal estructura jerárquica normalmente se clasifica en cuatro niveles (Rho et al., 1998): la macroestructura en la cual se identifica el hueso trabecular y cortical; la microestructura, donde se identifican los canales harvesianos y las osteonas; la sub-microestructura, en algunos textos referida también como nano-estructura, que es la escala en la que se estudian los fenómenos reológicos sobre las lamellas y las fibras de colágeno y; la subnanoestructura, nivel en el cual se identifican los constituyentes elementales y la estructura molecular.

Las propiedades mecánicas del hueso trabecular, en combinación con su arquitectura, son responsables de su resistencia y rigidez (Van Rietbergen et al., 1995). Las deformaciones y tensiones a niveles microestructurales resultan de importancia desde un punto de vista biológico puesto que se cree que los procesos de remodelación dependen, entre otras, de tales variables (Cowin y Doty, 2007; Currey, 2002). El entendimiento de los mecanismos de remodelado requiere, por lo tanto, de la estimación de las tensiones y deformaciones a nivel microestructural.

El tejido trabecular puede considerarse como un material lineal elástico que, debido a su arquitectura, se comporta de forma anisotrópica. El comportamiento mecánico de un material se caracteriza por el tensor elástico E de la Ley de Hooke generalizada. En su forma más general E involucra 21 constantes elásticas independientes. El número de constantes elásticas disminuye cuando existen planos de simetría material así, por ejemplo, el comportamiento elástico de los materiales ortotrópicos (tres planos de simetría) puede definirse a partir de 9 constantes mientras que el de los materiales isotrópicos (infinitos planos de simetría) sólo requiere de 2. Para los materiales que exhiben comportamiento ortotrópico, existe un método para hallar los ejes principales de ortotropía a partir de las 21 componentes de E (Cowin y Mehrabadi, 1989). Dado que con los métodos experimentales disponibles en la actualidad no es posible determinar las 21 componentes del tensor E , la aplicación de este método ha sido limitada pese a tener la ventaja de eliminar las incertezas provenientes de mediciones estereológicas. No obstante, los errores debidos a los ensayos mecánicos y de la suposición de ortotropía persisten.

Las simetrías elásticas se determinan usualmente de forma indirecta al considerar la textura del material típicamente mediante técnicas de estereología cuantitativa como la longitud de intercepción promedio (MIL). Para el hueso trabecular se determinó que el MIL se aproxima a un elipsoide con tres planos de simetría por lo que algunos autores propusieron que la arquitectura trabecular exhibe características ortotrópicas. Con estos métodos, la exactitud de la caracterización del material depende de la exactitud del ensayo mecánico, de la medición de la textura y de la hipótesis de ortotropía.

El análisis de la respuesta mecánica de un material heterogéneo como el hueso considerando cada una de sus características micro-estructurales es un problema numéricamente intratable debido a la escala de la microestructura respecto de las dimensiones del problema macroscópico (Zohdi y Wriggers, 2005). Un método para superar esta dificultad es hallar un modelo de material homogéneo equivalente que caracterice el comportamiento del tejido a escala macroscópica analizando un Elemento de Volumen Representativo (RVE por sus siglas en inglés).

En este trabajo se emplean tanto modelos idealizados de hueso trabecular como

reconstrucciones de geometrías de un caso real relevadas mediante microtomografía computarizada. Tales modelos se analizan mediante el método de los elementos finitos y se post-procesan los resultados para hallar las constantes elásticas del material homogéneo empleando un enfoque mecánico tradicional de homogenización, como consecuencia no se requieren ensayos de compresión, mediciones estereológicas ni efectuar suposiciones sobre el comportamiento del material macroscópico. El efecto del aumento del tamaño del RVE sobre los coeficientes de E se analiza para los casos en dos dimensiones.

2 MÉTODOS

La respuesta mecánica del tejido óseo se analiza usando técnicas numéricas, típicamente el método de los elementos finitos. No obstante, aún con los códigos estándar y considerando la capacidad de las computadoras modernas, no es posible analizar cada entidad estructural ósea al nivel celular (más aún, a este nivel quizás la mecánica del continuo no sea la herramienta más apropiada), por lo tanto, cada nivel estructural debe analizarse separadamente. Este enfoque se conoce como análisis multiescala mediante elementos de volumen representativo (RVE).

2.1 Análisis mediante RVE

En general el procedimiento consiste en desacoplar el análisis en al menos dos niveles, uno local y otro global. En el nivel local se modelan los detalles microestructurales para determinar las propiedades elásticas efectivas, por ello se suele denominar a este nivel también como escala microscópica. Estos análisis se emplean para calcular la relación entre las deformaciones efectivas o promedio (en el RVE) y las deformaciones locales (dentro del RVE). A este proceso para hallar las propiedades efectivas se lo denomina “homogenización”. La estructura compuesta se reemplaza luego por un material homogéneo equivalente que tiene las propiedades efectivas calculadas. En los análisis de nivel global se calculan las tensiones y deformaciones efectivas o promedio dentro de la estructura.

El concepto de RVE puede aplicarse para estimar las deformaciones en múltiples niveles estructurales (Hollister y Kikuchi, 1994), así el análisis en el nivel estructural i provee de una matriz que relaciona las componentes del tensor de deformaciones locales ε_i con las del nivel inmediato superior ε_{i-1}

$$\{\varepsilon_i\} = [M_i] \{\varepsilon_{i-1}\}, \quad (1)$$

donde el subíndice i indica el nivel estructural que se está analizando; $i-1$ el nivel inmediato superior (“más macroscópico”), mientras que M_i representa el tensor estructural local o de localización de deformaciones en el nivel i -ésimo. El tensor de elástico efectivo o promedio puede calcularse luego a partir del tensor estructural local mediante

$$[E_{i-1}] = \frac{1}{V_{rve}} \int [E_i][M_i] dV_{rve}, \quad (2)$$

donde E_{i-1} es el tensor elástico del nivel estructural $i-1$, E_i es el del nivel estructural i -ésimo, V_{rve} es el volumen del elemento de volumen representativo y M_i es el tensor estructural en el nivel i -ésimo. El siguiente nivel macroscópico puede ser analizado usando las propiedades efectivas calculadas.

2.2 Enfoque mecánico directo y análisis mediante RVE

Puesto que las condiciones de contorno in-situ de los RVE se desconocen, los métodos de

homogenización sólo puede proveer una estimación de las propiedades efectivas y las deformaciones locales. La exactitud de estas estimaciones depende significativamente de las condiciones de contorno supuestas. El enfoque mecánico tradicional en un RVE es el más difundido y consiste en aplicar condiciones de tracción (Reuss) o desplazamiento uniformes (Voigt) en el contorno. Hill (1952) demostró que los primeros proveen un límite inferior a las propiedades efectivas mientras que los segundos proveen de un límite superior.

Además de las condiciones de contorno, la relación entre el tamaño microestructural y el del RVE afecta las estimaciones de las propiedades efectivas. En ambos casos, la definición del RVE se ve involucrada y merece un estudio particular. En la literatura se encuentran dos formas de definir un RVE (Kouznetsova, 2002): 1) como una muestra estadísticamente representativa de la microestructura y; 2) como el volumen de menor tamaño que es suficiente para representar el comportamiento macroscópico de un material.

Ambas definiciones presentan inconvenientes. La primera de ellas requiere de una muestra estadísticamente representativa, por lo tanto debe contener un número grande de heterogeneidades, en consecuencia los cálculos sobre los RVE resultan computacionalmente onerosos. El problema con la segunda de las definiciones está relacionado con consideraciones prácticas ya que si bien un RVE pequeño puede ser adecuado para la evaluación de una variable, puede no serlo para otra o pueden existir fluctuaciones significativas de las mismas en la frontera. Se puede inferir que con la primera definición se obtendrían RVE de mayor tamaño que con la segunda y, que para esta última, el tamaño del RVE depende del comportamiento del material y de la carga aplicada.

El tamaño del RVE debe permitir que este se asimile a un punto material frente a las dimensiones del nivel $i-1$ para que la mecánica del continuo pueda aplicarse. Al mismo tiempo su tamaño establece las relaciones entre las escalas macro-micro, por cuanto para definir su tamaño se debe considerar el comportamiento y las características microestructurales a efectos de obtener un modelo representativo del comportamiento del material que sea computacionalmente económico.

Un concepto para definir escalas contiguas comúnmente aceptado para el cálculo de las propiedades efectivas es la llamada condición de Hill (Zohdi y Wriggers, 2005; Kouznetsova, 2002). Esta condición establece que

$$\langle \sigma \rangle \langle \varepsilon \rangle = \langle \sigma \cdot \varepsilon \rangle, \quad (3)$$

donde los corchetes de McCauley denotan la operación de promedio de la variable en el volumen sobre el dominio, que en este caso es idéntico al volumen del RVE. Esto es, para una función f ,

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V_{rve}} \int f \cdot dV_{rve}. \quad (4)$$

El tamaño del RVE está relacionado con la condición de Hill puesto que, según ésta, un RVE estará bien definido si es representativo de la microestructura del material y si la respuesta bajo condiciones de desplazamientos y tracciones uniformes coincide. Para ello, el material heterogéneo bajo estudio debe estar perfectamente unido y no poseer de fuerzas de volumen.

Para que la condición de Hill se satisfaga dentro de un cuerpo macroscópico bajo carga externa no uniforme, la muestra debe ser lo suficientemente grande como para poseer pequeñas fluctuaciones de campo relativas a su tamaño. Por lo tanto aplicando las condiciones de contorno de Reuss o Voigt indicadas precedentemente a una muestra grande es una forma de reproducir “aproximadamente” lo que está sucediendo en un RVE de material

en un cuerpo macroscópico (Zohdi y Wriggers, 2005). Este análisis de las condiciones de contorno se puede emplear para justificar la necesidad de una muestra suficientemente grande como para tener una pequeña fluctuación de las variables en la frontera y ser suficientemente pequeña respecto de la estructura macroscópica. A su vez, constituye un elemento de juicio más a favor de la selección de condiciones de contorno uniformes.

2.3 Homogenización mediante un enfoque mecánico tradicional

En la homogenización utilizando un enfoque mecánico tradicional se aproximan las condiciones de contorno del RVE mediante tracciones o desplazamientos uniformes. Según sea la aproximación empleada se obtienen tensiones o deformaciones promediadas en el volumen (Hollister y Kikuchi, 1992):

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon \rangle &= \frac{1}{V_{rve}} \int \varepsilon \cdot dV_{rve}, \\ \langle \sigma \rangle &= \frac{1}{V_{rve}} \int \sigma \cdot dV_{rve}.\end{aligned}\quad (5)$$

Para hallar las tensiones o deformaciones promedio sus contrapartes dentro del RVE deben ser conocidas. Para ello, una vez seleccionadas las condiciones de contorno, se resuelve la forma débil de la ecuación de equilibrio utilizando el método de los elementos finitos para calcular la deformación local dentro del RVE. En este trabajo, se impusieron desplazamientos como condiciones de contorno/casos de carga. En lo que sigue sólo nos referiremos a ésta situación.

Resumiendo, para hallar el tensor elástico promedio o efectivo en el nivel macroscópico E_{i-1} se emplea la Ec. (2)

, que a su vez requiere que el tensor estructural M_i sea conocido. Para hallar éste último se usa la relación existente entre las deformaciones de las escalas i e $i-1$ expresada por la Ec. (1). Sin embargo, esto implica conocer de antemano los valores de las deformaciones en ambas escalas. Para ello se resuelve la formulación débil considerando tres casos de carga sobre el RVE en 2D mediante el método de los elementos finitos. Los resultados se post-procesan para hallar las deformaciones promedio mediante la primera de las Ecs. (5) antes de calcular el valor de M_i .

3 IMPLEMENTACIÓN Y VERIFICACIÓN

Se empleó el método de los elementos finitos para simular los tres casos de carga necesarios para calcular el tensor M_i . Para ello se aplicaron desplazamientos uniformes en la frontera del RVE. Esto es, se simuló ensayos de tracción longitudinal y de corte puro controlados por desplazamiento. Los modelos fueron resueltos empleando el programa de cálculo ABAQUS (Simulia, 2007).

El tensor M_i se calculó en cada elemento empleando un programa desarrollado en el entorno MatLab (MathWorks Inc, 2004) que post-procesa las deformaciones de todos los casos de carga dentro del RVE y resuelve los sistemas de ecuaciones considerando las deformaciones locales y promedio, Ec. (1).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{ij}^{11} \\ \varepsilon_{ij}^{22} \\ \varepsilon_{ij}^{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{11}^{11} \rangle & \langle \varepsilon_{22}^{11} \rangle & \langle \varepsilon_{12}^{11} \rangle \\ \langle \varepsilon_{11}^{22} \rangle & \langle \varepsilon_{22}^{22} \rangle & \langle \varepsilon_{12}^{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{11}^{12} \rangle & \langle \varepsilon_{22}^{12} \rangle & \langle \varepsilon_{12}^{12} \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_{ij11} \\ M_{ij22} \\ M_{ij12} \end{Bmatrix}.\quad (6)$$

donde el término de la izquierda es una matriz construida con los vectores de deformación en la escala i (microscópica), los superíndices indican el caso de carga (axial o corte) y los subíndices el plano y dirección de la deformación para cada caso de carga. Los términos de la derecha son una matriz construida con filas de los vectores de deformación macroscópica y los términos del tensor estructural que desean calcular.

Mediante otro programa, desarrollado a tales efectos, se calcula el tensor elástico del material homogéneo en el nivel macroscópico E_{i-1} a partir del valor de M_i y el volumen de cada elemento utilizado la Ec. (2)

El procedimiento y las herramientas implementadas se verificaron mediante el análisis del comportamiento de una celda compuesta por dos materiales con propiedades distintas cuya solución analítica para el caso unidimensional es conocida. La celda elemental de esta barra está formada por dos materiales alternados en capas, [Figura 1](#).

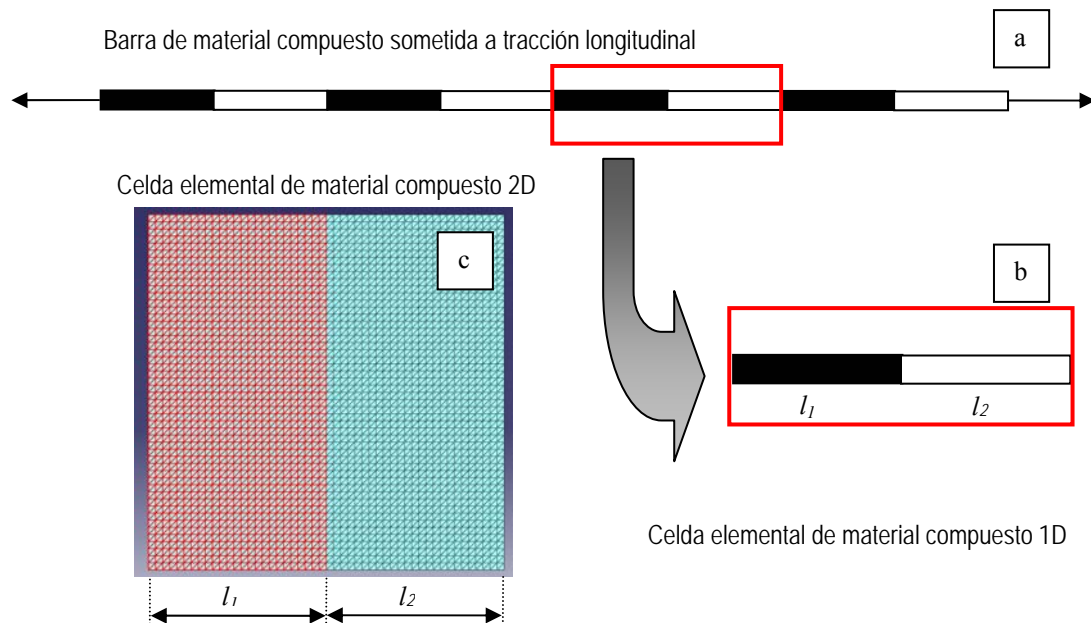


Figura 1: Celda de Material Compuesto (2 Materiales).

A partir de la Ley de Hooke y por definición de deformación

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon &= \frac{\Delta l}{l}\end{aligned}\quad (7)$$

El cambio en la longitud total es impuesto, conocido e igual a $\Delta L = \Delta l_1 + \Delta l_2$. Además la longitud total L es igual a la suma de las l_i . Reemplazando en la segunda de la Ec. (7) queda

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \cdot l_1 + \varepsilon_2 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \quad (8)$$

Considerando que debido a la disposición la tensión es idéntica en ambos materiales, la deformación resultante para el material homogéneo queda:

$$\varepsilon = \frac{l_1 + l_2}{\frac{E_2 \cdot l_1 + E_1 \cdot l_2}{E_1 \cdot E_2}} \quad (9)$$

Puesto que las longitudes l_1 y l_2 son idénticas y considerando las propiedades de los materiales indicada en [Tabla 1](#), se determinó que el módulo de Young del material compuesto es igual a 1.6667 Mpa.

| Propiedad | Material | |
|-----------|------------|------------|
| -- | Material 1 | Material 2 |
| E | 1 Mpa | 5 Mpa |
| ν | 0.3 | 0.3 |

Tabla 1: Propiedades del Material de la Barra Unidimensional.

Luego se modeló la geometría de la [Figura 1](#) y se calculó la matriz de constantes elásticas mediante el procedimiento indicado precedentemente.

$$E_{i-1} = \begin{bmatrix} 1.8315 & 0.5495 & -0.0000 \\ 0.8879 & 3.2664 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.2133 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

El tensor de compliancia S se define como la inversa del tensor elástico E , su valor para el caso analizado es

$$S_{i-1} = \begin{bmatrix} 0.5945 & -0.1000 & 0.0000 \\ -0.1616 & 3.3333 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.7800 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

El módulo de Young en la dirección homóloga al modelo unidimensional es la inversa de la componente $S_{(1,1)}$. El valor hallado fue igual a 1.6821 Mpa, por cuanto el error respecto de la solución analítica es inferior al 1%. Un procedimiento análogo se empleó sobre una celda en tres dimensiones conformada por dos materiales similares a los utilizados en el ejemplo anterior. El valor del módulo de Young calculado en este caso fue 1.7057 Mpa por cuanto el error respecto de la solución analítica resulta del orden del 2.3%.

4 APLICACIÓN A MODELOS DE TRABÉCULA ÓSEA

4.1 Construcción de los Modelos

Los modelos idealizados de las trabéculas están compuestos por unidades repetidas llamadas celdas. A efectos de limitar la influencia del mallado sobre los resultados para distintos tamaños de RVE, cada uno de estos se construyó a partir de la malla de una celda individual. Tales mallas se obtuvieron mediante la herramienta de remallado adaptivo del software ABAQUS, imponiendo que el error uniforme de la densidad de energía fuese inferior al 5%. En todos los casos se emplearon elementos triangulares de segundo orden, la deformación se reportó en el centroide de cada elemento y se verificó que la condición de Hill se satisfaga con un error inferior al 5%.

Los modelos bidimensionales de trabéculas reales se obtuvieron a partir del procesamiento de datos de imágenes obtenidas mediante micro-tomografía computada (mTC) de una muestra de una cabeza femoral de un adulto de 61 años ([Perilli y Baruffaldi, 2003](#)). La técnica de construcción de los modelos fue adaptada a partir del trabajo de [Buroni et al. \(2004\)](#).

En todos los casos, a efectos emplear un programa de cálculo estándar y que la condición de Hill resulte satisfecha, el espacio entre las trabéculas también fue mallado. Este se modeló como un material lineal elástico isótropo compresible de módulo de Young despreciable frente al del tejido trabecular.

4.2 Aplicación del método

Modelos idealizados de trabécula

El método se aplicó a modelos idealizados de trabécula ósea en dos dimensiones. Las propiedades elásticas aparentes halladas se compararon para distintos tamaños de RVE. Se analizaron RVE's de 1, 2, 3, 4 y 5 celdas por lado. Debido al método de construcción, la fracción volumétrica de todos los RVE's se mantuvo constante e idéntica a la de la celda elemental que los compone.

El modelo de **compuesto poroso** posee una geometría regular de lados iguales con un hueco circular en el centro, [Figura 2.a](#). La celda elemental posee una fracción volumétrica sólida del 30% y posee 12300 elementos.

Los RVE's fueron analizados mediante el enfoque mecánico tradicional descrito más arriba. El menor y el mayor de ellos se ensayaron numéricamente al corte a efectos de estimar el módulo global de corte G en forma directa,

$$G = \frac{\sigma}{2 \langle \varepsilon_{12} \rangle}. \quad (12)$$

Para ello se impidieron los desplazamientos de los nodos de la base en los RVE y se impuso un desplazamiento horizontal de valor conocido a los superiores.

El método de homogenización también se aplicó a un modelo de **trabécula ósea en forma rombo**, [Figura 2.b](#). La fracción volumétrica de este caso es igual a 31.66%. Cada celda elemental posee 1472 elementos.

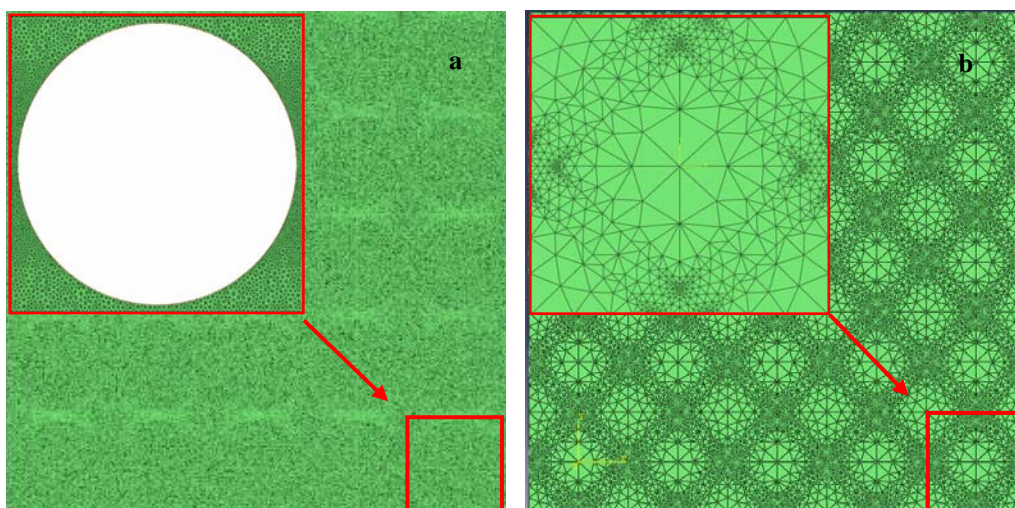


Figura 2: RVE de 25 Celdas y Detalle de la Celda Elemental: (a) Modelo Poroso. (b) Modelo en Rombo.

El modelo de **trabécula en forma de puntales** tridimensional está compuesto por una celda elemental que se asemeja a un dado hueco con caras perforadas, [Figura 3](#).

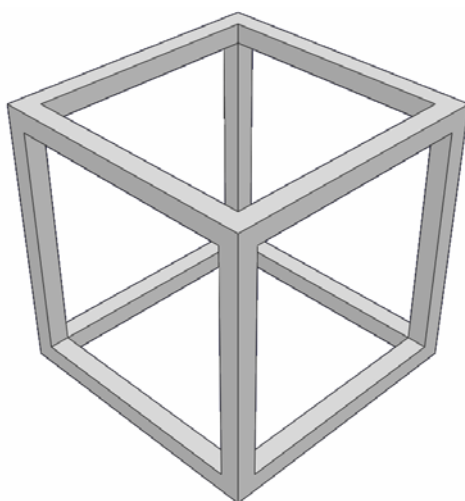


Figura 3: Modelo de Celda Tridimensional. Detalle de la Celda Sin Mallas.

Modelos construidos a partir de geometrías reales

Estos modelos se construyeron a partir de las imágenes de mTC de una muestra con forma de paralelepípedo de aproximadamente 10mm x 6mm. A efectos de eliminar defectos debidos a la preparación de la muestra sólo la porción central de las imágenes fue empleada en la construcción de los modelos. El tamaño de los pixels de cada imagen y el espaciado tomográfico eran idénticos, alrededor $19.5\mu\text{m}$. Con el objeto de analizar el efecto del tamaño de la muestra se construyeron RVE de 3 tamaños distintos por cada imagen, [Figura 4](#). La geometría de los RVE adoptados fue cuadrada de 0.996 mm, 1.992 mm y 2.988 mm de lado.

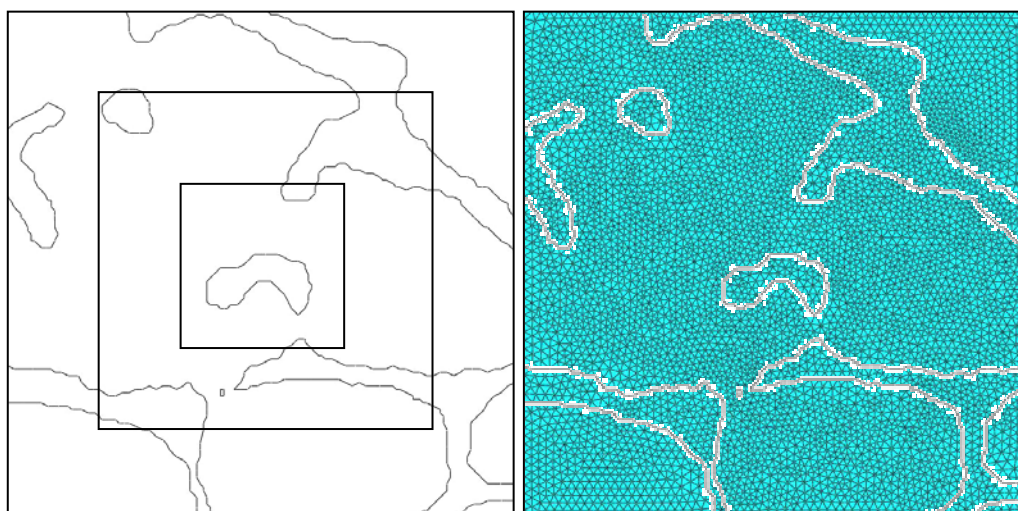


Figura 4: Detalle de los 3 RVE Empleados (los de Mayor Tamaño Contienen a los de Menor). Tamaños de RVE: 0.996 mm, 1.992 mm y 2.988 mm de lado. Reconstrucción de Imagen de mTC., izquierda. Malla, derecha.

5 RESULTADOS

En la [Tabla 2](#) se resumen los resultados hallados para el modelo poroso donde C_{ij}

representa el valor normalizado de las componentes del tensor E dadas por el cociente entre cada una de las componentes y el módulo de Young del tejido óseo empleado en las simulaciones.

| Componente | Nro. Celdas / Lado | | | | |
|------------|--------------------|-----------|------------|------------|-----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| C_{11} | 0,164 | 0,126 | 0,124 | 0,124 | 0,125 |
| C_{12} | 0,113 | 0,047 | 0,034 | 0,028 | 0,024 |
| C_{13} | -1,27E-10 | -2,35E-10 | 3,16E-10 | 1,93E-07 | -5,27E-11 |
| C_{21} | 0,112 | 0,047 | 0,034 | 0,027 | 0,024 |
| C_{22} | 0,164 | 0,125 | 0,124 | 0,124 | 0,125 |
| C_{23} | -1,17E-10 | -3,50E-10 | -1,293E-10 | 3,15E-07 | -3,59E-10 |
| C_{31} | -6,96E-11 | -2,69E-10 | 4,074E-10 | 1,40E-10 | 1,31E-10 |
| C_{32} | -8,505E-11 | -1,85E-10 | 6,25E-12 | -7,924E-11 | -4,73E-12 |
| C_{33} | 0,0081 | 0,0081 | 0,0081 | 0,0081 | 0,0081 |

Tabla 2: Propiedades halladas mediante homogenización. Modelo de trabécula con porosidad.

La [Tabla 3](#) presenta los resultados para el modelo de trabécula en rombo. La [Figura 5](#) ilustra la variación de C_{ij} como función del número de celdas por lado en los RVE para las componentes C_{11} , C_{21} y C_{33} de ambos modelos.

| Componente | Nro. Celdas / Lado | | | | |
|------------|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| C_{11} | 0,014 | 0,024 | 0,032 | 0,038 | 0,043 |
| C_{12} | 0,008 | 0,018 | 0,026 | 0,032 | 0,037 |
| C_{13} | -5,10E-11 | -8,11E-10 | -1,66E-09 | -3,57E-09 | -6,34E-07 |
| C_{21} | 0,008 | 0,018 | 0,026 | 0,032 | 0,037 |
| C_{22} | 0,014 | 0,024 | 0,032 | 0,038 | 0,043 |
| C_{23} | 9,33E-11 | 5,07E-10 | -7,81E-10 | -2,25E-09 | -5,41E-07 |
| C_{31} | -9,35E-10 | -1,00E-09 | -3,45E-10 | 6,73E-10 | 1,99E-08 |
| C_{32} | 6,31E-10 | -5,68E-10 | 1,04E-10 | -6,43E-10 | 1,65E-08 |
| C_{33} | 0,1671 | 0,1671 | 0,1671 | 0,1671 | 0,1671 |

Tabla 3: Propiedades halladas mediante homogenización. Modelo de trabécula en rombo.

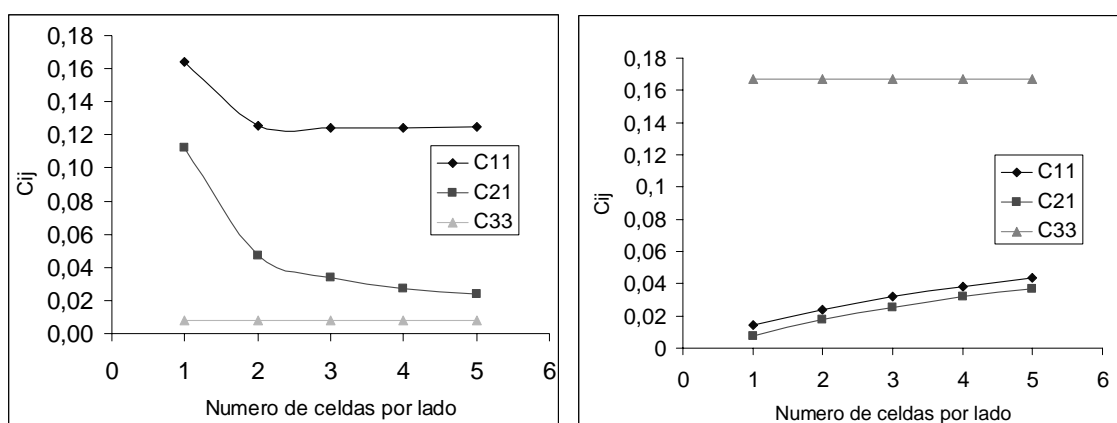


Figura 5: Evolución de C_{ij} con el aumento del número de celdas por lado:
(a) Modelo de celda porosa. (b) Modelo de celda en rombo.

Los resultados normalizados hallados para la celda tridimensional del modelo de trabécula en forma de puntales se indican a continuación,

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 0.02164 & 0.00094 & 0.00094 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00094 & 0.02164 & 0.00094 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00094 & 0.00094 & 0.02164 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00052 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00052 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00052 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Al momento de preparar este trabajo sólo se cuenta con resultados parciales del análisis de los modelos construidos a partir de geometrías reales. Estos resultados se discuten en la Sección 6.

6 DISCUSIÓN

En [Tabla 2](#) y [Tabla 3](#) se observa que los pares de componentes C_{11} - C_{22} y C_{12} - C_{21} son idénticos. Se aprecia también que la componente C_{33} permanece constante para todos los tamaños de RVE analizados. Las componentes no reportadas oscilan en valores cercanos a cero y difieren en más de 5 órdenes de magnitud de las demás. Estos resultados permiten inferir la existencia de simetrías que, a priori, se pueden intuir a partir de la geometría de los modelos idealizados evaluados. La simetría reportada en los tensores elásticos se debe al empleo de celdas repetitivas y a las direcciones empleadas para el cálculo de los casos de carga.

En la [Figura 5](#) se aprecia que C_{11} y C_{21} (y por lo dicho anteriormente C_{22} y C_{12}), varían de forma suave con el aumento del tamaño del RVE. Esto ocurre en ambos modelos. Las componentes parecen tender a un límite, inferior para el modelo de celda con poros y superior para el modelo de celda en rombo, conforme el tamaño del RVE aumenta. El límite inferior sólo es evidente para el par C_{11} - C_{22} del primer modelo. Resultados similares a los observados para el modelo de celda poroso fueron reportados en la literatura ([Hollister y Kikuchi, 1992](#)).

Los módulos de corte determinados en forma directa representan el 57 y 96% del valor hallado mediante el proceso de homogenización y parecen acercarse a este último conforme el tamaño del RVE aumenta, [Figura 6](#).

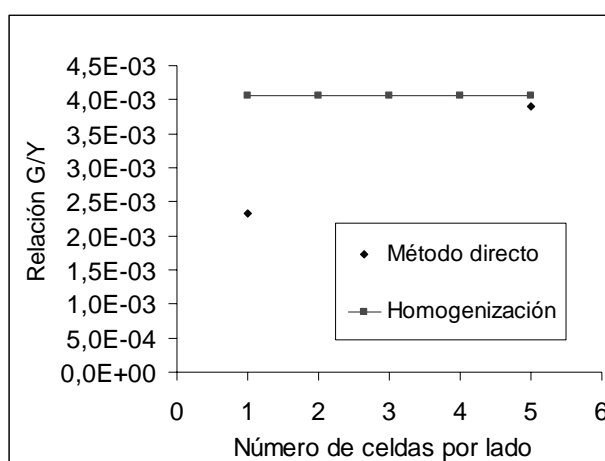


Figura 6: Comparación del módulo de corte hallado mediante dos métodos.

Nótese que un aumento superior a cuatro celdas por lado no provoca una variación significativa de las componentes C_{11} y C_{21} en el modelo de celda porosa. Por otro lado, para el caso de las trabéculas en rombo los valores límites de C_{11} y C_{21} no son claros. Este fenómeno se debe a que al aumentar el tamaño del RVE el peso relativo de las fluctuaciones asociadas a la frontera disminuye. Se puede indicar, entonces, que en el primer caso se alcanzó un tamaño de RVE que provoca fluctuaciones pequeñas mientras que para el segundo se requiere un tamaño de RVE aún mayor.

Las tres componentes sobre la diagonal principal del tensor de constantes elásticas del modelo de puntales son idénticas (C_{11} , C_{22} y C_{33}). La situación de las componentes C_{44} , C_{55} y C_{66} es análoga. Las diferencias entre los pares de componentes C_{12} - C_{21} , C_{13} - C_{31} , y C_{23} - C_{32} son insignificantes (no se aprecian sino hasta el sexto decimal) por cuanto pueden considerarse además idénticas entre sí (condición de simetría de un tensor de constantes elásticas). Las demás componentes son nulas. Los modelos tridimensionales requieren de un tiempo de computo significativamente mayor que los bidimensionales. Los requerimientos de memoria resultan elevados también, por este motivo no se efectuaron análisis de convergencia considerando RVE de mayor tamaño. En ese sentido, puede considerarse que la implementación empleando deformaciones (como la utilizada en este trabajo) resulta más ineficiente que una en la que se utilicen desplazamientos para el cálculo de las deformaciones promedio ya que no requeriría del mallado de los espacios vacíos. No obstante, la mayoría de los materiales compuestos están constituidos por dos o más materiales, en el caso del hueso, en el espacio vacío entre las trabéculas se encuentra la médula cuyo comportamiento mecánico no es similar al del tejido trabecular.

Hallar el tamaño de RVE adecuado para el análisis de la respuesta mecánica del hueso trabecular constituye un paso fundamental para el empleo de modelos multiescala de remodelación ósea. Sin embargo, la morfología del hueso trabecular cambia de una región a otra en una misma pieza ósea, el tamaño del RVE por lo tanto, también lo hace. Con la información disponible del trabajo de [Perilli y Baruffaldi \(2003\)](#) se hizo un intento por determinar el tamaño del RVE para la cabeza femoral de un adulto.

Se esperaba poder aplicar el procedimiento empleado para mostrar la influencia del tamaño del RVE sobre las propiedades mecánicas del material equivalente hallado para los modelos (periódicos) idealizadas de hueso trabecular pero, para los tamaños analizados prácticamente no existe vinculación entre las trabéculas ubicadas sobre lados opuestos del RVE. Como consecuencia, para los tamaños de RVE analizados (0.996 mm, 1.992 mm y 2.988 mm de lado) las trabéculas se comportan como islas rodeadas por el vacío, modelado como un

material elástico compresible de muy bajo módulo de elasticidad, incapaz de tomar carga.

Se encuentra en curso la implementación del procedimiento descrito para los tres tamaños de RVE en modelos más grandes, de hasta 5 mm de lado, en un nuevo intento por determinar el tamaño de RVE adecuado para la región ósea bajo estudio.

7 CONCLUSIONES

Se aplicó un método para hallar el tensor de constantes elásticas de un material heterogéneo mediante un procedimiento de homogenización basado en un enfoque mecánico tradicional. El método se implementó y aplicó a modelos de hueso trabecular en dos y tres dimensiones.

El procedimiento permite hallar las constantes elásticas de material óseo sin necesidad de efectuar ensayos experimentales de compresión, sin mediciones estereológicas de textura, ni efectuar suposiciones respecto de la simetría elástica del material.

Se comprobó que un RVE de cinco celdas por lado es suficiente para minimizar el efecto de las fluctuaciones de las variables en el modelo poroso pero no para el modelo en rombo. El valor de las constantes elásticas tiende asintóticamente un valor conforme el tamaño de los RVE aumenta puesto que disminuye la influencia de las fluctuaciones de las variables en la frontera.

Los tamaños de RVE analizados a partir de imágenes de tomografías computadas no son suficientes para hallar el elemento de volumen representativo correspondiente a la muestra analizada.

Mediante éste método de homogenización resulta difícil establecer a priori el tamaño de la muestra representativa o RVE aún considerando que ésta se compone de celdas repetidas.

Se encuentra en curso los análisis que permitirán determinar el tamaño adecuado de los RVE en regiones particulares de piezas óseas a partir de reconstrucciones de imágenes tomadas de microtomografía computada en tres dimensiones.

8 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado mediante el subsidio PICT-1154 de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica.

REFERENCIAS

- Buroni, F., Commisso, P., Cisilino, A. P., y Sammartino, M., Determinación de las Constantes Elásticas Anisótropas del Tejido Óseo Utilizando Tomografías Computadas. Aplicación a la Construcción de Modelos de Elementos Finitos. XIV Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones ENIEF 2004, Bariloche, Noviembre, 2004.
- Cowin, S. C., Doty, S. B. *Tissue Mechanics*, Ed. Springer, 2007.
- Cowin, S.C., Mehrabadi, M., Identification Of The Elastic Symmetry Of Bone And Other Materials. *J. Biomechanics*, 1989.
- Currey, J. D. *Bones, Structure and Mechanics*. Princeton University Press, 2002.
- Hill, R., The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate, *Proc. Phys. Soc*, 1952. Citado en Böhm, H. J., *A Short Introduction to Basic Aspects of Continuum Micromechanics* (versión preliminar.), 2004.
- Hollister, S. J., Kikuchi, N., A Comparison of Homogenization and Standard Mechanics Analyses for Periodic Composites. *Computational Mechanics*, 1992.
- Hollister, S. J., Kikuchi, N., Homogenization Theory and Digital Imaging: A Basis for Studying the Mechanics and Design Principles of Bone Tissue. *J. Biotechnology and*

- Bioengineering*, 1994.
- Keaveny, T. M., Morgan, E. F., Yeh, O. C., Bone Mechanics. *Standard Handbook of Biomedical Engineering and Design* (Kutz, Myer). McGraw-Hill, 2002.
- Kouznetsova, V. G., Computational Homogenization form the Multi-Scale Analysis of Multi-Phase Materials. *Ph.D. Thesis*. Technische Universiteit Eindhoven, 2002.
- MatLab, The language of Technical Computing, *MatLab User's Manual*. MathWorks Inc., 2004.
- Perilli E., Baruffaldi F., Proposal for shared collections of X-ray microCT datasets of bone specimens, *ICCB03*, 24-26 September 2003, Zaragoza, Spain.
- Rho, J. Y., Kuhn-Spearing, L., Zioupos, L., Mechanical Properties and the Hierarchical Structure of Bone. *Medical Engineering&Physics*, Vol. 43, 1998.
- Rincón Rincón, E., Ros Felip, A., Claraunt Alonso, R., Arranz Merino, F., Caracterización Mecánica del Material Óseo. *Revista Tecnología y Desarrollo*, vol. II. Universidad Alfonso X El Sabio, 2004.
- Simulia, Abaqus User's Manual, *Abaqus Version 6.7.1*, Dassault Systèmes, 2007.
- Van Rietbergen, B., Weinans, H., Huiskes, R., Odgaard, A., A New Method to Determine Trabecular Bone Elastic Properties and Loading Using Micromechanical Finite-Element Models. *J. of Biomechanics*, 1995.
- Zohdi, T., Wriggers, P., *Introduction to Computacional Micromechanics*. Springer-Verlag, 2005.