Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXVIII, págs. 2021-2038 (artículo completo)
Cristian García Bauza, Pablo Lotito, Lisandro Parente, Marcelo Vénere (Eds.)
Tandil, Argentina, 3-6 Noviembre 2009

APLICACIÓN DE DIMENSIÓN FRACTAL AL ESTUDIO DE SISTEMAS NATURALES

Carlos A. Cattaneo[a], Enrique M. Biasoni[a], Ledda I. Larcher[a], Ana I. Ruggeri[a], Aníbal O. Gómez Khairallah[a]

[a]*Facultad de Agronomía y Agroindustrias, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Av. Belgrano Sur 1912; G4200ABT, Santiago del Estero, Argentina, llarcher@unse.edu.ar, http://faa.unse.edu.ar*

Palabras clave: dimensión fractal, crecimiento de bacterias, crecimiento de grano, procesamiento de imagen digital.

Resumen. La geometría fractal permite el estudio de objetos fragmentados que presentan invarianza respecto al cambio de escala, pues permite describir matemáticamente objetos que se consideran demasiado complejos.

En los fractales se puede observar la propiedad de auto-similitud. En principio esta auto-similitud es infinita, pero sólo en el caso de los fractales matemáticos. Los fractales naturales sólo presentan un número finito de "niveles" auto-similares. Además, aunque parecidos, no poseen una semejanza totalmente exacta. A esta propiedad de invarianza estadística del escalado se le denomina auto-similitud estadística.

Ciertos objetos naturales poseen un número finito de grados de auto-similitud, y pueden ser considerados como fractales naturales.

Se ha diseñado software que procesa, analiza y extrae características de imágenes, a partir de las cuales se determina la dimensión fractal del objeto usando el método de conteo de cajas. Se han realizado aplicaciones tomando datos de fenómenos naturales tales como el crecimiento de colonias de microorganismos y el crecimiento de granos en metales, obtenidos mediante simulaciones y determinación de características de hojas vegetales adquiridos mediante digitalización.

1 INTRODUCCIÓN

Los fractales, inicialmente desarrollados por Mandelbrot (1977, 1982) son conjuntos matemáticos con un alto grado de complejidad que pueden modelar muchos fenómenos naturales. Desde hace un tiempo el modelado de fractales y sus conceptos asociados se han convertido en importantes herramientas en diversas áreas de las ciencias naturales, principalmente debido a que el modelado de fractales no supone que los objetos estudiados tienen buenas propiedades de continuidad y "suavidad". Una de las características más importantes de la geometría fractal es que permite la caracterización de irregularidades que no pueden tratarse mediante la geometría euclideana. Como resultado, se definen varias características fractales, entre las cuales la dimensión fractal es una de las más importantes. Se han desarrollado diversos métodos para estimar la dimensión fractal en el análisis de imágenes. Pentland (1984) propuso un método para estimar la dimensión fractal usando la transformación de Fourier aplicada al espectro de potencia de la superficie de intensidad de la imagen suponiendo que eran modeladas como superficies de movimiento browniano fractal. Peleg *et al.* (1984) adoptaron la idea de Mandelbrot del método ε-blanket y la extendieron al cálculo de superficie de un área. Clarke (1986) calculó la dimensión fractal de superficies topográficas usando el concepto de un área de superficie formada por prismas triangulares. El método de conteo de cajas fue desarrollado por Gangepain y Roques-Carmes (1986) y mejorado posteriormente por Voss (1986) al incorporar la teoría de la probabilidad. Más tarde, en 1989, Keller *et al*. contribuyeron con un refinamiento por medio de la interpolación lineal. Sarkar y Chaudhuri (1992, 1994) propusieron el método diferencial de conteo de cajas para calcular la dimensión fractal además de comparar diferentes métodos. En 1995, Jin *et al.* proponen una mejora a los trabajos de Sarkar y Chaudhuri y lo aplican al análisis de imágenes digitales.

Los fractales aleatorios pueden usarse para describir muchos objetos irregulares del mundo real. Otras aplicaciones incluyen la clasificación de muestras histopatológicas, el estudio del paisaje y de la complejidad de las costas, enzimología (cinética de Michelis-Menten) (Kopelman, 1988; Savageau, 1995), la generación de nueva música, la compresión de señales e imágenes, la generación de diversas formas de arte, la creación de ampliaciones de fotografías digitales, sismología, mecánica de suelos, creación de video juegos (en particular, gráficos de entornos biológicos), técnicas de análisis de series de precios (Wilkin, 2006; Sornette *et al.*, 1996).

En este trabajo se muestra la aplicación de algoritmos para determinar la dimensión fractal de imágenes tomando datos de fenómenos naturales tales como el crecimiento de colonias de microorganismos y el crecimiento de granos en metales, obtenidos mediante simulaciones y determinación de características de hojas vegetales adquiridos mediante digitalización.

2 GEOMETRÍA DE FRACTALES

Mandelbrot desarrolló una nueva geometría que permite el estudio de las formas naturales, identificando una familia de formas demasiado irregulares para ser descritas mediante la geometría euclidiana, a la que llamó fractales. El término proviene del latín *fractus*, el correspondiente verbo es *frangere* y significa "romper, crear fragmentos irregulares". El término fractal transmite la idea de que un objeto es irregular, se puede descomponer en fragmentos que son parecidos al todo y de dimensión fraccionaria.

La geometría euclidiana describe por medio de fórmulas, asigna dimensiones enteras a los objetos y es adecuada para describir objetos hechos por el hombre. En contraparte, la geometría fractal describe mediante algoritmos dimensiones fraccionarias y es adecuada para describir formas naturales.

En general, podría decirse que los fractales son objetos irregulares, rugosos, porosos o fragmentados y que, además, presentan estas propiedades al mismo grado en todas las escalas, es decir que estos objetos presentan la misma forma si son vistos de lejos o de cerca. Matemáticamente un fractal es subconjunto de un espacio métrico para el cual su dimensión de Hausdorff-Besicovitch, $D_{H\text{-}B}$ es estrictamente mayor que su dimensión topológica D_T. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch no está restringida a tomar valores enteros. Esta definición, sin embargo, excluye algunos conjuntos que son considerados fractales. No existe una definición de los fractales que sea plenamente satisfactoria.

Los fractales generalmente poseen algún tipo de autosimilitud, puede decirse que están formados por partes pequeñas que se parecen al todo. Esta similitud puede ser geométricamente estricta o bien puede ser solamente aproximada o estadística. Por ejemplo, el conjunto de Cantor (Figura 1) está formado por dos copias estrictamente similares de sí mismo, mientras que la curva de von Koch (Figura 2) está formada por cuatro réplicas. Un fractal natural, como un árbol está formado por múltiples copias, que son las ramas, aproximadamente similares al todo. A su vez, las ramas contienen copias de sí mismas. En este ejemplo, la similitud es sólo aproximada o estadística y recibe el nombre de autoafinidad.

Figura 1. Conjunto de Cantor en 3 iteraciones

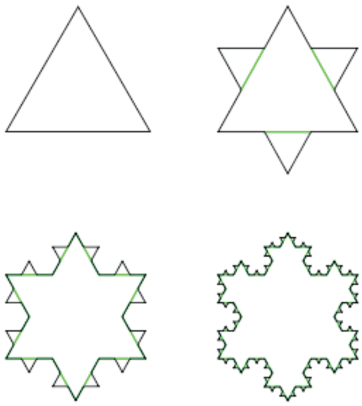


Figura 2. Las primeras tres iteraciones de la curva de Koch

3 CARACTERÍSTICAS DE LOS FRACTALES

3.1 Autosimilitud

Según B. Mandelbrot, un objeto es autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas. (Mandelbrot, 1993)

Los fractales pueden presentar tres tipos de autosimilitud:

Autosimilitud exacta. este es el tipo más restrictivo de autosimilitud: exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo la encontramos en fractales definidos por sistemas de funciones iteradas (IFS). Figura 3.

Cuasiautosimilitud: exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Matemáticamente D. Sullivan (1987) definió el concepto de conjunto cuasiauto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de este tipo. Figura 4.

Autosimilitud estadística. Es el tipo más débil de autosimilitud: se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de fractales de este tipo. Figura 5.

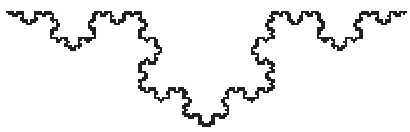


Figura 3. *Autosimilitud exacta* del copo de nieve de Koch

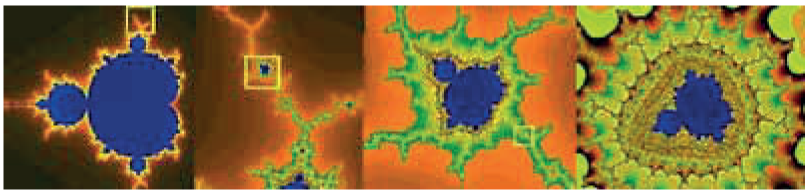


Figura 4. Cuasiautosimilitud en el conjunto de Mandelbrot: al variar la escala obtenemos copias del conjunto con pequeñas diferencias.

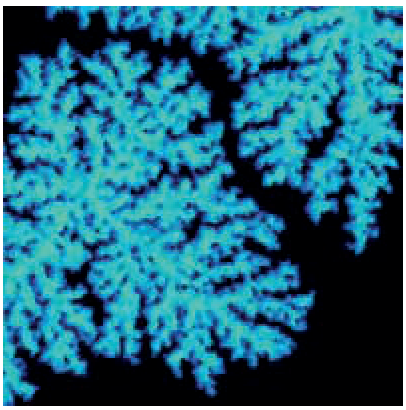


Figura 5. *Autosimilitud estadística* de un fractal generado por el proceso de agregación limitada por difusión

El principio básico para estimar la dimensión fractal se basa en el concepto de autosimilitud. La dimensión fractal D de un conjunto cerrado A en un espacio euclideano n dimensional se define como (ecuación 1):

$$D = \lim_{r \to 0} \frac{\log(N_r)}{\log(1/r)} \quad (1)$$

donde N_r es el número más pequeño de copias diferentes de A en la escala r. La unión de N_r copias diferentes debe cubrir completamente el conjunto A.

El método de conteo de cajas es uno de los más utilizados para obtener la dimensión fractal de un objeto. Consiste en cubrir una figura con cajas y determinar cómo varía el número de cajas que se necesitan para cubrir la figura con respecto al tamaño de las cajas. Al disminuir el tamaño de las cajas, se necesitará un mayor número de éstas para cubrir el objeto.

Se toma la estructura de interés y se coloca en una caja de lado L, sobre la que se construye una red regular en la que cada segmento tiene una longitud l. Se cuenta el número de cajas que contienen alguna parte de la estructura, lo que da un número N. Ahora se repite el procedimiento utilizando redes cada vez más finas (l más pequeña) registrando en cada caso el valor N correspondiente. Al realizar esto sobre una figura es posible construir una tabla, en la que se registra el número de cajas que caben a lo largo del segmento L (L/l) y, del total de cajas en toda la red, sólo cuántas de ellas (N) atraviesan la figura.

Si se toma el logaritmo de ambas cantidades y se grafica log (N) vs log(L/l), es posible ajustar sobre los datos una línea recta cuya pendiente es la dimensión fractal dc de la figura. Esto indica que existe una relación entre las dos variables del tipo (ecuación 2):

$$N = (L/l)^{dc} \quad (2)$$

El proceso ignora las irregularidades de menor tamaño y estudia cómo varía el número de celdas que cubre el objeto cuando l tiende a cero y ofrece un camino sistemático aplicable a una gran diversidad de formas naturales.

Se han realizado aplicaciones tomando datos de fenómenos naturales tales como el crecimiento de colonias de microorganismos y el crecimiento de granos en metales, obtenidos mediante simulaciones y determinación de características de hojas vegetales adquiridos mediante digitalización.

4 FRACTALES EN LA NATURALEZA

La naturaleza es pródiga en ejemplos de auto-similitud. Estos objetos muestran una estructura similar a lo largo de un rango extenso aunque, sin embargo, finito. Algunos ejemplos incluyen a las nubes, los cristales, la superficie de montañas, los relámpagos, el brócoli o coliflor y sistemas de vasos sanguíneos y pulmonares. En 1999 algunas formas fractales similares demostraron tener la propiedad de "invarianza de frecuencia" de las ecuaciones de Maxwell (la mismas propiedades electromagnéticas sin importar la frecuencia).

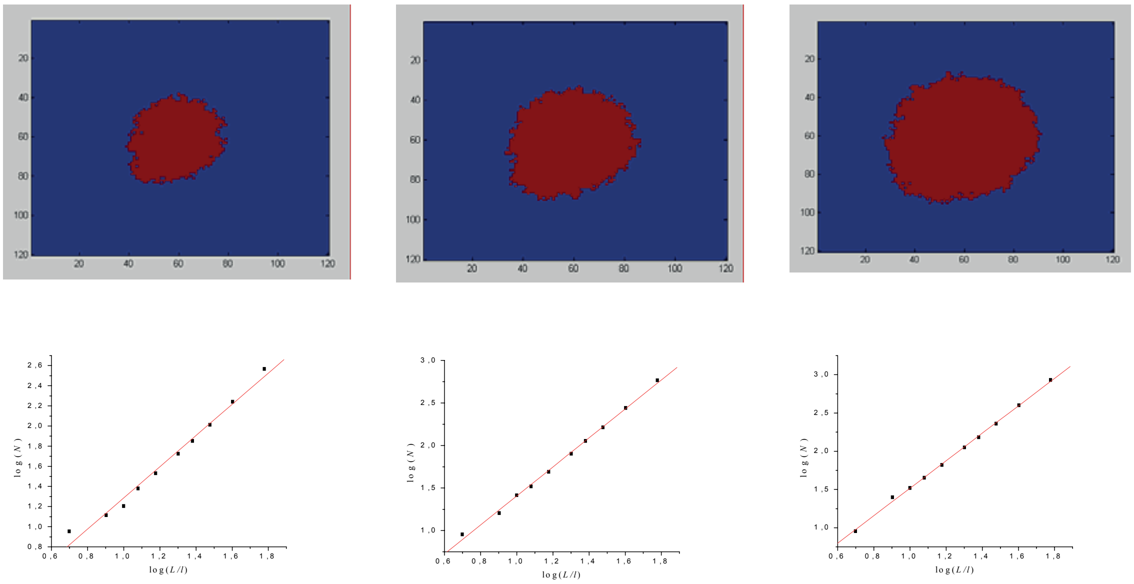
4.1 Dimensión fractal del crecimiento de colonias de microorganismos obtenido mediante simulación

Se realiza la determinación de la dimensión fractal correspondiente a las imágenes obtenidas de las simulaciones de crecimiento bacteriano bajo diferentes condiciones de movimiento (estático, movimiento browniano y agitado) obtenidas mediante simulaciones de crecimiento bacteriano con autómata celular (AC) (Cattaneo *et al.*, 2008; Larcher *et al.*, 2008).

La matriz de trabajo contiene valores 0 ó 1, indicando la presencia de una bacteria o un lugar disponible para el desarrollo. Esto puede tomarse como una imagen binaria. Por cada una de las condiciones de movimiento se tomaron 7 "imágenes" guardando los valores generados en la simulación en tiempos diferentes. Las simulaciones se realizaron usando una matriz de 120x120, con tiempos de duplicación (t_d) 1, 3, 5 y 7.

Luego, se aplica el método de conteo de cajas tomando en cuenta sólo las cuadrículas ocupadas por una bacteria, para obtener la dimensión fractal de la colonia en crecimiento.

En la Figura 6 se muestran 4 etapas de crecimiento con sus respectivas curvas de determinación de dimensión fractal para el caso de crecimiento estático con tiempo de duplicación = 1.



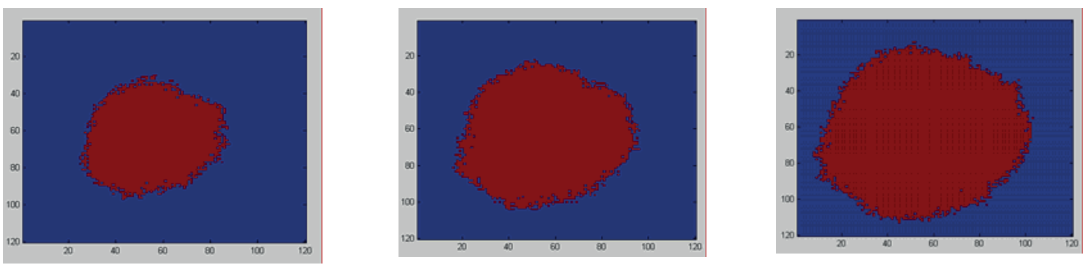
t = 50
dimensión fractal 1,55 ± 0,07

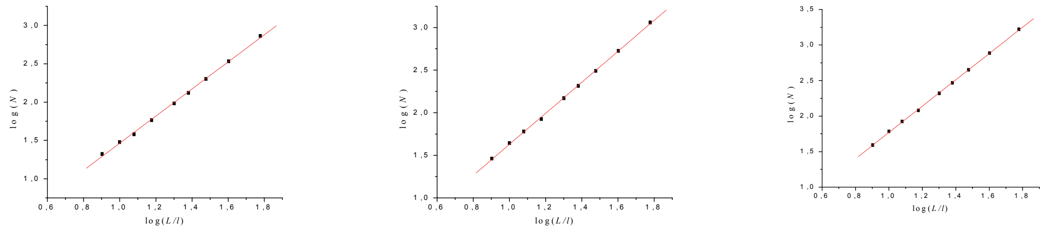
t = 60
dimensión fractal 1,70 ± 0,03

t = 70
dimensión fractal 1,80 ± 0,02

Figura 6. Crecimiento de colonia de microorganismos sin movimiento y curvas de determinación de dimensión fractal considerando t_d=1

En la Figura 7 pueden observarse cuatro etapas de crecimiento bajo movimiento browniano, así como las curvas de determinación de dimensión fractal con tiempo de duplicación = 1.





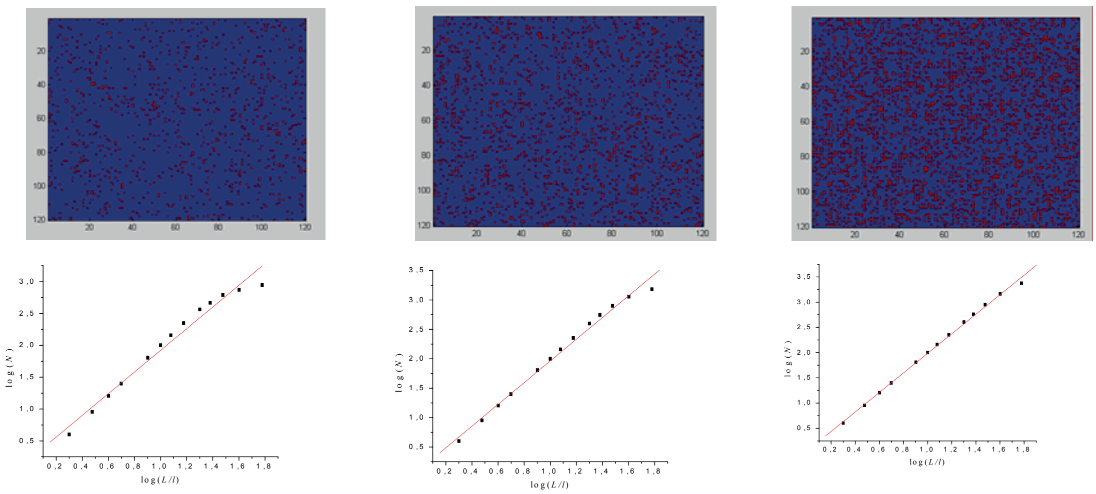
t=50 dimensión fractal 1,76 ± 0,02

t=60 dimensión fractal 1,82 ± 0,02

t=70 dimensión fractal 1,85 ± 0,01

Figura 7. Crecimiento de colonia de microorganismos con movimiento browniano y curvas de determinación de dimensión fractal considerando t_d=1

La Figura 8 muestra cuatro etapas de crecimiento en condiciones de agitado y las correspondientes curvas de determinación de dimensión fractal con tiempo de duplicación = 1.



t=19 dimensión fractal 1,70 ± 0,08

t=20 dimensión fractal 1,85 ± 0,06

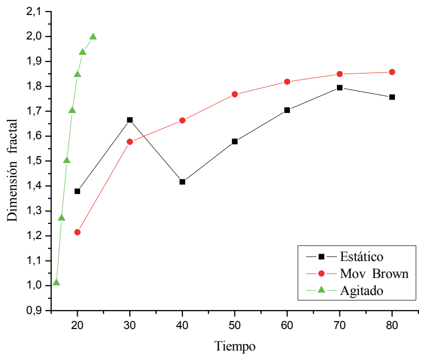
t=21 dimensión fractal 1,93 ± 0,03

Figura 8. Crecimiento de colonia de microorganismos con movimiento de tipo agitado y curvas de determinación de dimensión fractal considerando t_d=1

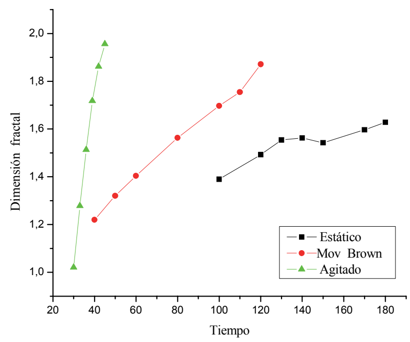
En las Figuras 6, 7 y 8 puede observarse que las distintas colonias según los diferentes tipos de movimiento tienen una estructura geométrica fractal como se ve en las correspondientes curvas de regresión.

Con el objeto de estudiar la dimensión fractal correspondiente a cada tipo de movimiento manteniendo constante el tiempo de duplicación, se construyeron las curvas de la Figura 9, que muestra cómo varía la dimensión fractal en función del tiempo para los 3 tipos de movimiento considerando los siguientes tiempos de duplicación: 1, 3 y 7. Puede observarse que en el caso de crecimiento con agitado tienen una dimensión fractal mayor que los otros tipos de crecimiento mientras que los crecimientos con movimiento de tipo browniano tienen, en general, una dimensión fractal mayor que el crecimiento estático.

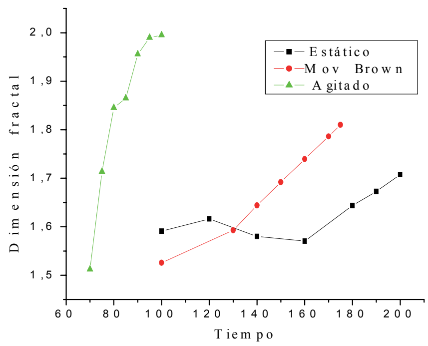
La Figura 10 permite comparar cómo varía la dimensión fractal en función del tiempo y del tiempo de duplicación para cada tipo de crecimiento. Puede observarse que, en el caso de crecimiento estático, toma valores cercanos a 1,6 para todos los tiempos de duplicación, mientras que para los otros tipos de movimiento la dimensión fractal es mayor a tiempos de duplicación menores para iguales tiempos de crecimiento.



Tiempo de duplicación = 1

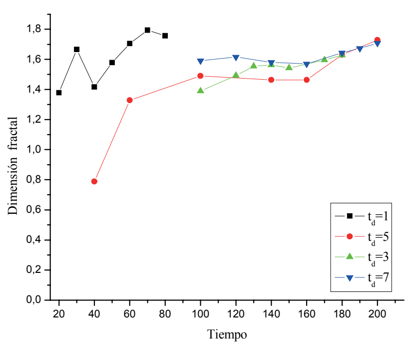


Tiempo de duplicación = 3

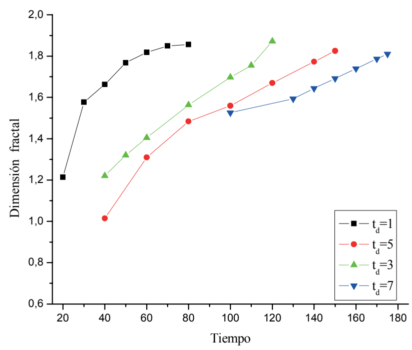


Tiempo de duplicación = 7

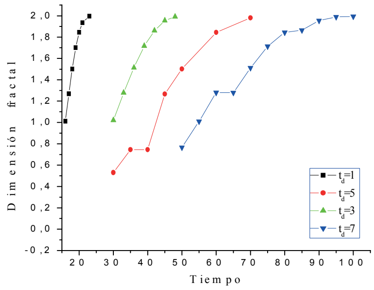
Figura 9. Variación de la dimensión fractal en función del tiempo para los 3 tipos de movimiento considerando t_d = 1, 3 y 7



Estático



Movimiento browniano



Agitado

Figura 10. Variación de la dimensión fractal en función del tiempo y del tiempo de duplicación para cada tipo de crecimiento

4.2 Determinación de la dimensión fractal en el crecimiento de granos en aluminio

La microestructura de un metal puede definirse por el tamaño, cantidad y distribución de defectos puntuales, lineales superficiales y volumétricos presentes en el material (Colás, 2001). La ocurrencia de estos defectos puede ser caracterizada por una serie de parámetros. Por ejemplo, el tamaño promedio de los granos en un policristal.

Una característica de la microestructura en materiales comunes es la irregularidad. La práctica normal en análisis estereológico es asumir que la microestructura sigue un patrón repetitivo. El uso de geometría fractal (Mandelbrot, 1982; Mandelbrot *et al.*, 1984; Barnslay, 1988; Schmittbuhl *et al.*, 1995) en el análisis de características irregulares que ocurran en la naturaleza ha sido de gran ayuda para obtener una mejor comprensión de las relaciones entre diferentes campos del conocimiento.

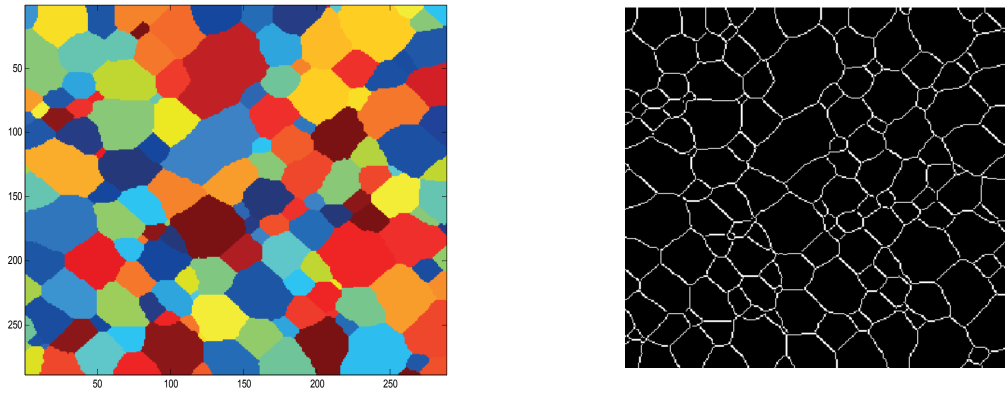
Se han realizado análisis mediante geometría fractal sobre características microestructurales tales como los bordes de grano (Hornbogen, 1987a; Hornbogen, 1987b; Hornbogen, 1989; Tanaka, 1993; Streitenberger, 1995), martensita (Hornbogen, 1989; Su y Yan, 1992), grafito (Lu y Hellawell, 1994) y estructuras dendríticas (Hornbogen, 1989). El objetivo de este trabajo es presentar los resultados del análisis de dimensión fractal correspondiente a las imágenes obtenidas de las simulaciones de crecimiento de grano de aluminio monofásico obtenidas mediante simulaciones con AC bidimensional (Cattaneo y Silvetti, 2008).

Las imágenes utilizadas tienen una dimensión de 298x298 pixels. Esta matriz de trabajo puede tomar n valores posible correspondiente a las n orientaciones cristalográficas consideradas, por lo tanto estas imágenes tiene n colores de acuerdo a un mapeo de colores indexados. Se realiza un pre-procesamiento a la imagen resultante para convertirla a valores binarios; se utiliza el método de Sobel que encuentra los bordes usando la aproximación Sobel de las derivadas y devuelve bordes en aquellos puntos donde el gradiente de gr es máximo y se aplica un umbral con valor 0,1 para ignorar los bordes menos intensos.

Luego se aplica el método de conteo de cajas para obtener la dimensión fractal de la microestructura de la imagen.

Se analizarán dos tipos de microestructuras de aluminio, una con 20 y otra con 100 orientaciones a las siguientes temperaturas de crecimiento de grano: 573, 673, 773 y 873°K.

En la Figura 11 se muestra la microestructura obtenida para el aluminio con 100 orientaciones a una temperatura de 773 K y un tiempo de simulación de 3000 pasos, así como la imagen binaria correspondiente; mientras que la Figura 12 muestra la curva de regresión correspondiente a la obtención de la dimensión fractal; en la misma puede observarse que corresponde con una estructura de tipo fractal.



Microestructura obtenida mediante simulación   Imagen resultante del pre procesamiento

Figura 11. Microestructura de aluminio con 100 orientaciones

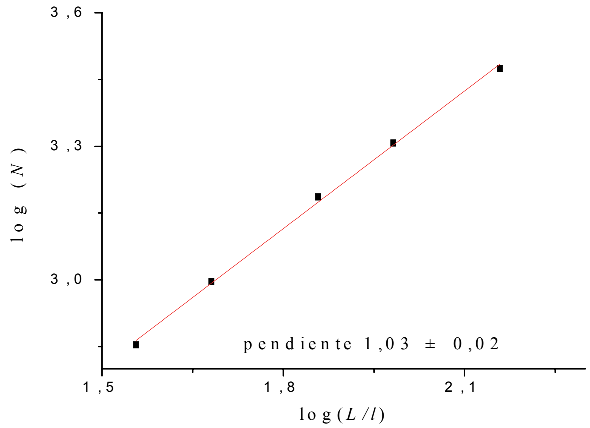


Figura 12. Curva de regresión correspondiente a la obtención de la dimensión fractal para la microestructura mencionada.

En la Figura 13 se muestra cómo varía el tamaño de grano y la dimensión fractal de la microestructura con el tiempo de simulación para las diferentes temperaturas de ensayo. Puede observarse que mientras aumenta el tamaño de grano la dimensión fractal disminuye.

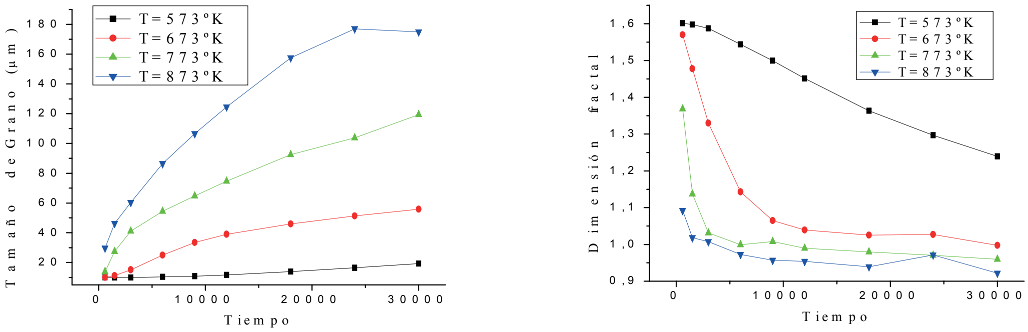


Figura 13. Variación del tamaño de grano y la dimensión fractal de la microestructura con el tiempo de simulación para diferentes temperaturas de ensayo. Aluminio 100 orientaciones

En la Figura 14 se grafican la dimensión fractal en función de la inversa del tamaño de grano, observándose que todos los puntos se alinean sobre la misma recta cuya ordenada al origen es 0,888 ± 0,005 y pendiente 6,79 ± 0,09.

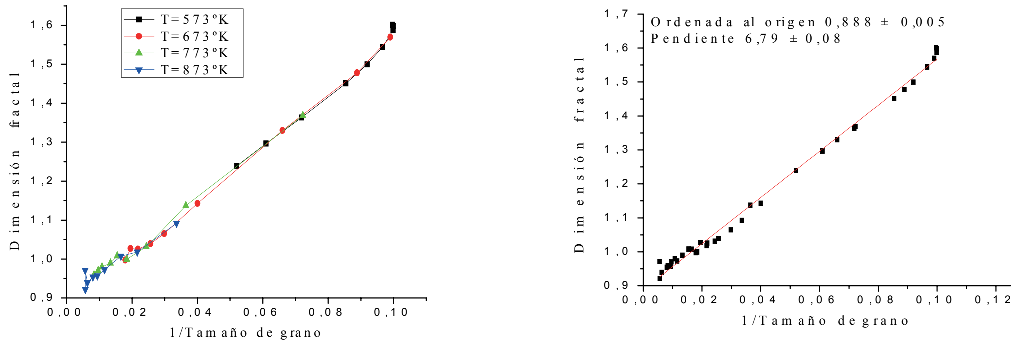
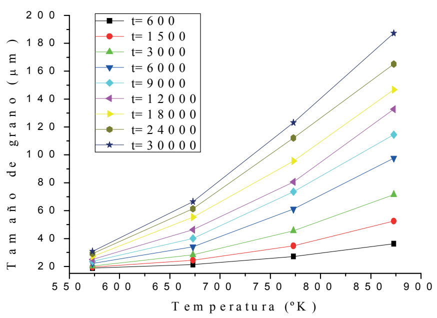
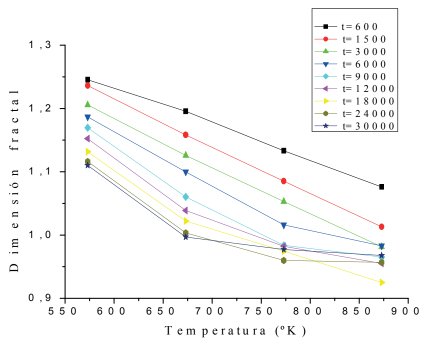


Figura 14. Dimensión fractal en función de la inversa del tamaño de grano para diferentes temperatura de ensayo

En la Figura 15 se muestra cómo varía el tamaño de grano y la dimensión fractal de la microestructura de aluminio con 20 orientaciones con el tiempo de simulación para las diferentes temperaturas de ensayo. Nuevamente puede notarse que mientras aumenta el tamaño de grano la dimensión fractal disminuye.



Tamaño de grano para aluminio con 20 orientaciones en función de la temperatura



Dimensión fractal

Figura 15.

En la Figura 16 se grafican la dimensión fractal en función de la inversa del tamaño de grano para aluminio con 20 orientaciones, observándose que todos los puntos se alinean sobre la misma recta con ordenada al origen es 0,910 ± 0,003 y pendiente 6,1 ± 0,1.

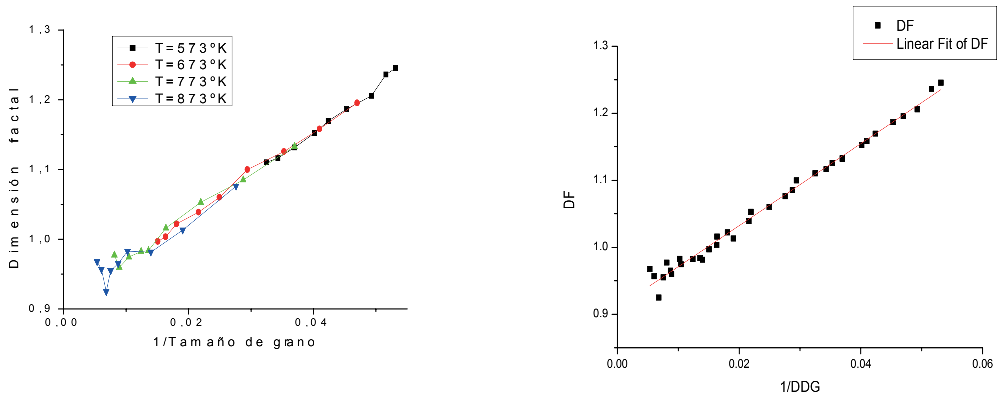


Figura 16. Dimensión fractal en función de la inversa del tamaño de grano para aluminio con 20 orientaciones

4.3 Determinación de la dimensión fractal de hojas vegetales adquiridas mediante digitalización.

Son numerosos aunque no abundantes los trabajos que utilizan a los fractales y su geometría para describir y simular comportamientos naturales aparentemente caóticos. Solé y Manrubia (1995) describen el comportamiento de los claros en ambientes de bosque tropical a través de un modelo autómata celular simple al que llaman "El juego del bosque". Pastor y Broschart (1990) utilizan el análisis fractal para examinar la distribución espacial de varias especies latifoliadas en rodales de Minnesota. Milne (1992) enfoca el estudio de la fragmentación del paisaje desde el punto de vista de las distribuciones fractales.

La inmensa variedad de plantas y sus numerosas características taxonómicas plantean la identificación de especies vegetales como un desafío tanto científico como tecnológico. La diversidad de especies vegetales hacen que las técnicas tradicionales sean difíciles, lentas, altamente especializadas ya que la mayoría son manuales y, por lo tanto, incapaces de mantenerse el ritmo de las necesidades de investigación y registro de la flora (Judd *et al.* , 1999 ; Kurmann y Hemsley, 1999) con lo que se evidencia la necesidad de sistemas y herramientas para identificar y clasificar especies vegetales (Martínez Bruno *et al.*, 2008).

La identificación de especies vegetales puede ser realizada de dos maneras: (a) usando información relativa al ADN o (b) mediante el reconocimiento de patrones que proporcionan información visual, por ejemplo, mediante análisis biométrico y morfológico. Generalmente la clasificación de plantas involucra el análisis de varias partes del espécimen, como flores, semillas, hojas, aunque conlleva la dificultad de que semillas y flores son difíciles de encontrar pues son estacionales y dependen tanto de la edad como del entorno de la planta. Sin embargo, las hojas son fáciles de encontrar, recolectar y guardar como imágenes digitales, simplificando así la adquisición de datos. Tales imágenes proporcionan gran cantidad de información visual y sus atributos (forma, color, textura, distribución de las nervaduras) se pueden usar para caracterizar a una especie. En este trabajo se usaron los contornos y áreas como características principales y se consideraron hojas de plantas de tres familias distintas, Leguminosas

(*Bahuinia candicans* - Pezuña de vaca), Malváceas (*Hibiscus rosa-sinensis* - Rosa china) y Rutáceas (*Citrus aurantium* - Naranjo agrio). En todos los casos se trata de hojas simples de formas diferentes: bilobulada en el caso de *B. candicans*, dentadas para *H. rosa-sinensis* y elípticas con el pecíolo alado para *C. aurantium*. (Figura 17)

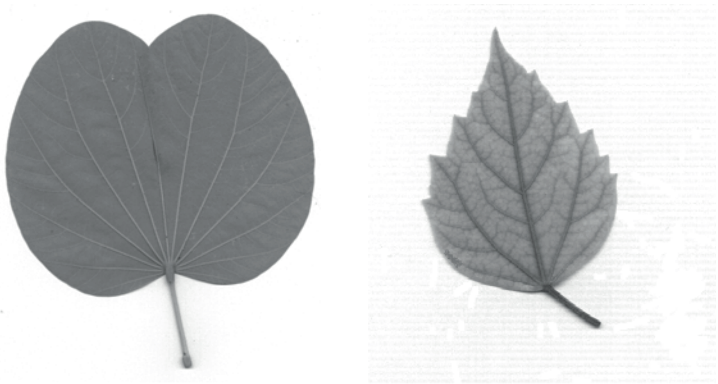


Figura 17. *Bahuinia candicans*, *Hibiscus rosa-sinensis*, *Citrus aurantium*

4.3.1 Procesamiento de las imágenes

Se analiza el procesamiento para una de las especies, *H. rosa-sinensis* o rosa china, y para cuatro tamaños de hoja diferentes (Figura 18). Las imágenes fueron digitalizadas en escala de grises con la misma resolución mediante de un scanner flatbed Visio OneTouch. Los archivos fueron almacenados con formato TIFF (Tagged Image File Format) ya que permite almacenar 48 bits de color incluyendo capas y canales alfa.

En el tratamiento de las imágenes se buscaba poder expresar las imágenes como matrices de ceros y unos, ya que de esa manera simplificaría el conteo de cajas para distintas particiones.

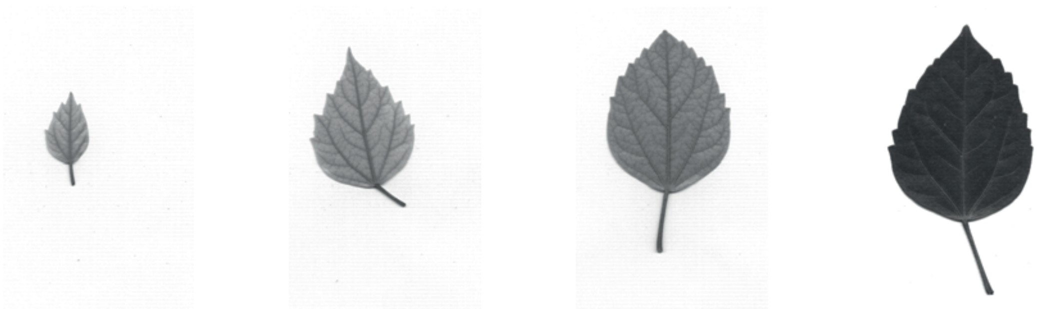


Figura 18. Los cuatro tamaños de hojas de *H. rosa-sinensis* considerados

Las imágenes digitalizadas inicialmente tenían una dimensión de 300x300 pixels. Se realizó un pre procesamiento usando una aplicación para tratamiento de imágenes a efectos de eliminar el ruido; además se generaron figuras de 1000 x 1000 ya que de esta manera se facilitaría realizar las particiones para trabajar con el método de las cajas. A partir de las imágenes tratadas se generaron nuevos archivos extrayendo partes de la hoja para su posterior tratamiento y evaluación como se observa en la Figura 19.

Figura 19. Pre-procesamiento para eliminar partes de la hoja, sin considerar pecíolo, y tomando media hoja.

Se programó usando Matlab aplicando algunas funciones propias del lenguaje de programación y, en ciertos casos, se generaron programas específicos.

A partir de las imágenes digitalizadas se generaron matrices que, por tratarse de imágenes en escala de grises, contenían valores entre 0 y 255 (Figura 20). Tomando como umbral el valor 200 fueron convertidas a 0 y 1 para obtener una imagen en blanco y negro con las que trabajó en adelante (Figura 21).

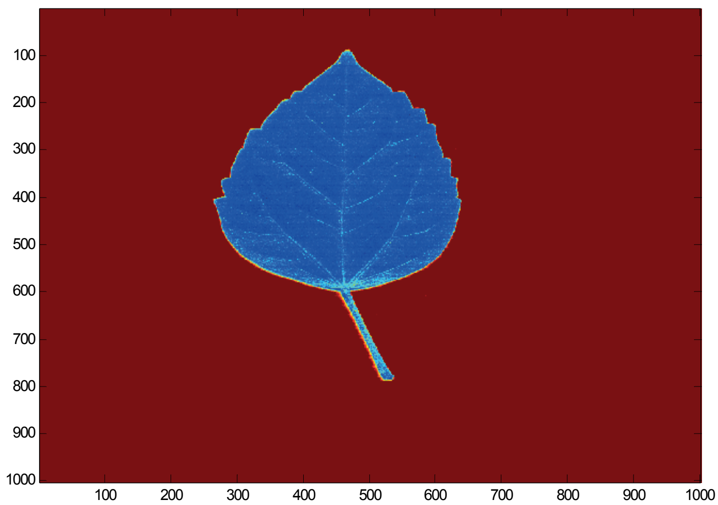
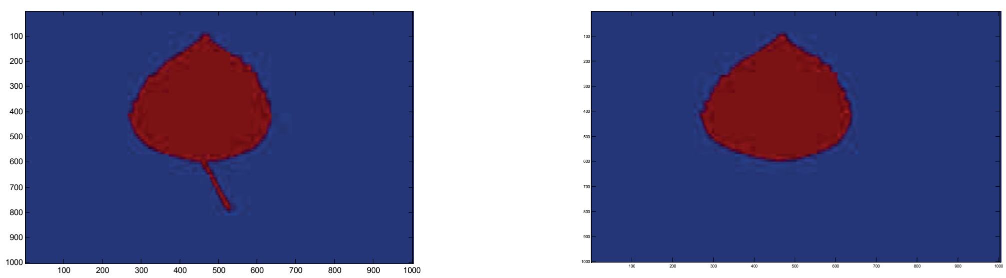


Figura 20. Imagen de la matriz generada mediante MATLAB y sin pre-procesamiento

A continuación se generó la matriz perímetro de la imagen, como se muestra en la Figura 21.



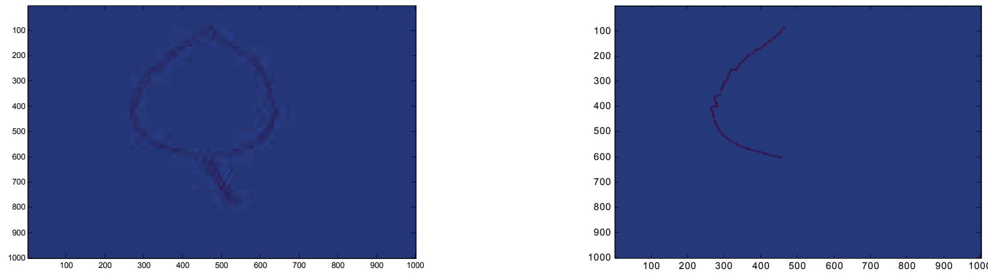


Figura 21. Imágenes de matrices definitivas, ceros (azul) y unos (rojo), de áreas y perímetros para una de las familias consideradas.

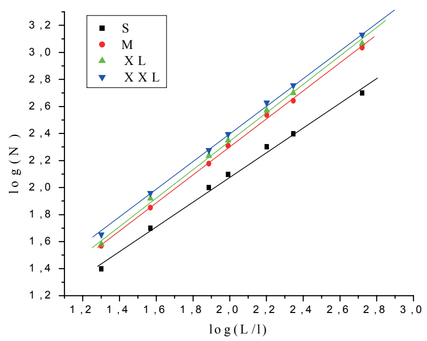
Para obtener el borde exterior del perímetro de media hoja se generó un archivo TIFF desde la imagen en blanco y negro, se eliminó la línea de perímetro interno de la media hoja mediante una aplicación de procesamiento de imágenes.

Luego se aplica el método de conteo de cajas para obtener la dimensión fractal de la cada imagen. Para calcular parámetros como valores del área o de los perímetros de cualquier imagen que se convirtió en matriz, se supone que el área o perímetro es directamente proporcional al número de pixels de valor 1 o, lo que es lo mismo, se realiza la suma de todos los elementos de la matriz, y este resultado está relacionado directamente con el área o perímetro.

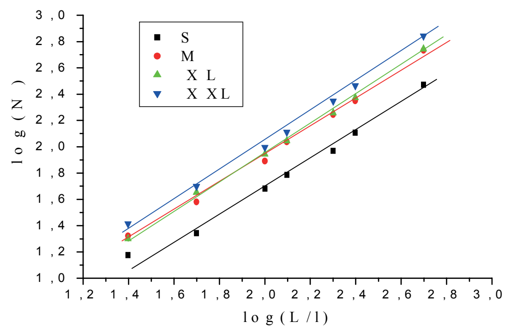
4.3.2 Resultados

Se analizarán en las tres especies de plantas cómo varía la dimensión fractal considerando las áreas y los perímetros de las imágenes por el método de las cajas. Los cuatro tamaños de las hojas se los representa en forma creciente con las letras S, M, XL y XXL.

En la Figura 22 se muestra la dimensión fractal para el caso de *H. rosa-sinensis* y considerando diferentes porciones de la hoja.



Dimensión fractal de *H. rosa-sinensis* - sin tallo, considerando el perímetro



Dimensión fractal *H. rosa-sinensis* - medio borde, sin pecíolo

Figura 22.

Nomenclatura:

Df/Area/CT	Áreas de hoja entera con pecíolo
Df/Area/ST	Áreas de hoja entera sin pecíolo
Df/Peri /CT	Perímetro de hoja entera con pecíolo
Df/Peri /ST	Perímetro de hoja entera sin pecíolo
Df/borde/MH/ST	Borde de media hoja sin pecíolo

Los valores de las distintas dimensiones fractales obtenidas por este método, se determinaron con un error del 99 %.

En las Tablas 1, 2 y 3 se muestran los valores que se obtuvieron para cada familia y para los distintos tamaños considerados.

Tamaño	S	M	XL	XXL
Df/Area/CT	1,77836	1,50519	1,94729	1,95268
Df/Area/ST	1,55432	1.52194	1.51317	1.51171
Df/Peri /CT	1,17438	1,16165	1,14915	1,14572
Df/Peri /ST	0.89658	0.871	0.89607	0.88412
Df/borde/MH/ST	1,07536	1,10554	0,99737	1,12347

Tabla 1. *B. candicans*

Tamaño	S	M	XL	XXL
Df/Area/CT	1,69558	1,85861	1,91437	1,90326
Df/Area/ST	1,70168	1,92041	1,8684	1,92265
Df/Peri/CT	1,12431	1,15247	1,19116	1,15974
Df/Peri/ST	0,91431	0,88432	0,88304	0,88052
Df/borde/MH/ST	1,00859	1,08687	1,08554	1,09432

Tabla 2. *H. rosa-sinensis*

Tamaño	S	M	XL	XXL
Df/Area/CT	1,78251	1,8708	1,88853	1,90544
Df/Area/ST	-	-	-	-
Df/Peri /CT	1,20361	1,15541	1,11987	1.11652
Df/Peri /ST	0,84551	0,86938	0,90203	0,89833
Df/borde/MH/ST	1,09203	1,15575	1,08798	1,06706

Tabla 3. *Citrus aurantium*

5 CONCLUSIONES

Todos los casos estudiados (crecimiento de bacterias en un entorno fijo y bajo diferentes condiciones de movimiento obtenido mediante simulación, crecimiento de granos en aluminio obtenido mediante simulación y hojas vegetales obtenidas mediante digitalización) presentan una estructura del tipo fractal y, a partir del estudio de la dimensión fractal correspondiente, podemos concluir lo siguiente:

Para el crecimiento de bacterias la dimensión fractal de las colonias con movimiento de tipo agitado siempre es mayor que la dimensión fractal de las colonias con movimiento de tipo browniano o estáticas, para iguales tiempos de simulación. Además la dimensión fractal para colonias con movimiento browniano es mayor que las colonias con crecimiento estático para tiempos de simulación largos.

Para el crecimiento anormal de granos se obtiene que la dimensión fractal de la microestructura resulta proporcional a la inversa del tamaño de grano de la microestructura (Figuras 14 y 16)

Al estudiar las imágenes de hojas, se obtuvo que para todas las especies y en las diferentes partes analizadas tienen estructura fractal (Figura 22), aunque el estudio realizado no permite deducir una regla para la identificación de la especie.

Se generó software que permite convertir imágenes obtenidas por diferentes medios de digitalización en imágenes binarias para su posterior tratamiento.

REFERENCIAS

Barnslay, M. *Fractals everywhere*. New York, Academia Press, 1988.

Cattaneo, C. A.; L. Larcher y C. A. Acosta. Determinación de parámetros de crecimiento de microorganismos usando autómatas celulares, *Mecánica Computacional*, XXVII: 3283-3298, 2008.

Cattaneo, C. A. y S. P. Silvetti. Modelo híbrido para el crecimiento de grano aplicando Autómatas Celulares y Método de Monte Carlo, *Mecánica Computacional,* XXVII: 2385-2395, 2008

Colás, R. On the variation of grain size and fractal dimension in an austenitic stainless steel. *Materials Characterization* 46: 353-358, 2001.

Gangepain, J. J. and C. Roques-Carmes. Fractal approach to two dimensional and three dimensional surface roughness. *Wear* 109: 119-126, 1986.

Hornbogen, E. On Fractal Aspects of Martensitic Microstructure. *Z Metallk d*, 78(5):352-354, 1987.

Hornbogen, E. Fractal Analysis of Grain Boundaries in Hot- Worked Poly-Crystals *Z. Metallkd*. 78(9): 622-625, 1987

Hornbogen, E. Fractals in microstructure of metals, *International Materials Reviews* , 34(6): 277-296, 1989.

Jin X.C., S. H. Ong y Jayasooriah. A practical method for estimating fractal dimension. *Pattern Recognition Letters*, 16: 457-464, 1995.

Judd W.; C. Campbell, E. A. Kellog and P. Stevens. *Plant Systematics: A Phylogenetic Approach*, Sinauer Associates, Massachusetts, 1999.

Keller, J., R . Crownover and S. Chen. Texture description and segmentation through fractal geometry. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* , 45: 150-160, 1989.

Kopelman, R. Fractal reaction kinetics. *Science* 241: 1620–1626, 1988

Kurmann, M.H. and A. R. Hemsley. *The Evolution of Plant Architecture*, Royal Botanic Gardens, Kew, London, 1999.

Larcher, L.; S. Togo y C. A. Cattaneo. Simulación de crecimiento de microorganismos bajo distintas condiciones de movilidad, *Mecánica Computacional,* XXVII: 3381-3395. 2008.

Lu S.Z. y A. Hellawell. An application of fractal geometry to complex microstructures: Numerical characterization of graphite in cast irons. *Acta Metallurgica et Materialia*; (United States); 42(12):4035-4047, 1994.

Mandelbrot, B. B. *Fractals: Form, Chance and Dimension* . Freeman, San Francisco, CA, 1977.

Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, CA, 1982.

Mandelbrot, B. B., D. E. Passoja and A. J. Paullay. Fractal character of fracture surfaces of metals, *Nature* 308: 721-722, 1984.

Martinez Bruno, O., R. de Oliveira Plotze, M. Falvo and M. de Castro. Fractal dimension applied to plant identification. *Information Sciences* 178: 2722–2733, 2008.

Milne, B. Spatial aggregation and neutral models in fractal landscapes. *The American Naturalist* 39(1): 32-57, 1992.

Pastor, J. and Broschart, M. The spatial pattern of a northern conifer-hardwood landscape. *Landscape Ecology*, 4 (1) 55-68, 1990.

Peleg, S., J. Naor, R. Hartley and D. Avnir. Multiresolution texture analysis and classification. *1EEE Trans. Pattern Anal. Machine lntell.* 4: 518-523, 1984.

Pentland, A.P. Fractal based description of natural scenes. *IEEE Trans. Pattern AnaL Machine lntell.* 6, 661-674, 1984.

Sarkar, N. and Chaudhuri, B.B. An efficient approach to estimate fractal dimension of textural images, *Pattern Recognition* 25, 1035-1041, 1992.

Sarkar, N. and Chaudhuri, B.B. An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image. *IEEE Trans. Syst. Man Cybernet.* 24, 115-120, 1994.

Savageau, M.A. Michaelis–Menten mechanism reconsidered: Implications of fractal kinetics. *J. Theor. Biol.* 176: 115–124, 1995.

Schmittbuhl, J., J-P. Vilotte and S. Roux. Reliability of self-affine measurements. *Phys Rev E*, 51:131-157, 1995

Solé, R. and S. Manrubia. Are Rainforest self-organized in a critical state?. *J. Theor. Biol.* 173: 31-40, 1995.

Sornette, D., A. Johansen and J. P. Bouchaud. Stock market crashes, precursors and replicas. *Journal de Physique I France 6*, 1 : 167–175, 1996.

Streitenberger P.; D. Förster, G. Kolbe and P. Veit. The fractal geometry of grain boundaries in deformed and recovered zinc, *Scripta Metallurgica et Materialia*, 33(4):541-546, 1995.

Su H. and Z. Yan. Fractal analyses of martensitic transformations. *Materials Letters*, 13:102-104, 1992.

Sullivan, D. Differentiable structures on fractal like sets, determined by intrinsic scaling functions on dual Cantor sets, *AMS Proc. Symp. Pure Math.*, 48:15-23, 1987

Tanaka M. Characterization of grain-boundary configuration and fracture surface roughness by fractal geometry and creep-rupture properties of metallic materials, J. Mater Sci, 27(17), 1993.

Voss, R. Random fractals: characterization and measurement. In: R. Pynn and A. Skjeltorp, Eds., *Scaling Phenomena in Disordered Systems*. Plenum , New York, 1986.

Wilkin, R. Riding the Waves: Applying Elliott Wave Theory to the Financia l and Commodity Markets *The Alchemist* June, 2006.