

ARRANCAMIENTO DE FIBRAS EN HORMIGONES REFORZADOS CON FIBRAS

Facundo A. Isla^a, Bibiana Luccioni^b

^aCONICET, Instituto de Estructuras “Arturo M. Guzmán”, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Roca 1800, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina, fsisla@herrera.unt.edu.ar,
<http://www.herrera.unt.edu.ar/iest>

^bCONICET, Instituto de Estructuras “Arturo M. Guzmán”, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Roca 1800, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina, bluccioni@herrera.unt.edu.ar,
<http://www.herrera.unt.edu.ar/iest>

Keywords: Hormigón, Interfaz, Fibras, Acero, Deslizamiento, Compuesto, Modelo Constitutivo.

Resumen. En los últimos años se han desarrollado estudios experimentales que muestran las mejoras obtenidas en el comportamiento estructural al incorporar fibras al hormigón. Las fibras controlan la fisuración aumentando la ductilidad de los elementos estructurales. Este efecto de las fibras está directamente relacionado con la resistencia al arrancamiento de las mismas.

En este trabajo se extiende e implementa numéricamente un modelo para reproducir el arrancamiento de fibras en hormigones reforzados con fibras de acero. La idea es que este modelo sea luego implementado como parte de un modelo de compuesto utilizado para reproducir el comportamiento de HRF.

En primer lugar se describe el fenómeno de arrancamiento de las fibras, los modelos utilizados y la incorporación de la fuerza de fricción por presiones laterales a la fibra. A continuación se describe la implementación numérica del modelo no lineal. Se presentan, además, comparaciones con resultados experimentales que muestran la capacidad del modelo propuesto y aplicaciones que muestran el efecto de la esbeltez de las fibras en la respuesta de arrancamiento que es la responsable del comportamiento post-pico y, en particular, de la ductilidad del hormigón reforzado con fibras.

1 INTRODUCCION

El HRF es un H° en el que se introducen fibras de diverso tipo dispersas en la matriz frágil del hormigón con el fin de mejorar la capacidad de absorción de energía y controlar el desarrollo de fisuras. De este modo se aumenta la vida en servicio de las estructuras en especial cuando se ven expuestas a acciones dinámicas. Es evidente que las propiedades de los HRF dependen directamente del tipo, contenido, orientación y distribución de las fibras. Las fibras actúan interceptando las fisuras y retardando su propagación, si hay suficiente cantidad y están uniformemente distribuidas evitan que las microfisuras se unan aumentando la resistencia aparente de la matriz. La presencia de fibras favorece el desarrollo de múltiples fisuras de menor tamaño.

En relación al mecanismo de acción de las fibras cabe notar que la resistencia a tracción del HRF es una acción conjunta entre la resistencia de la matriz y la de las fibras que atraviesan las fisuras. La adherencia entre las fibras y la matriz posee varios componentes: la adhesión física y/o química entre ambas, la resistencia friccional, el componente mecánico asociado con la geometría de la fibra, y la trabazón (interlock) de las fibras entre sí. En la mayoría de los casos las fibras son arrancadas, en lugar de romperse, una vez que perdieron la adherencia con la matriz. Por lo tanto cuanto más largas sean las fibras mayor será la capacidad de resistir las fuerzas de arrancamiento

Este fenómeno de arrancamiento de barras embebidas en una matriz normalmente se estudia mediante ensayos de arrancamiento que se denominan comúnmente ensayos de "PullOut", denominación que se utiliza en ocasiones en el desarrollo del presente trabajo.

En fibras lisas de eje recto de acero inmersas en hormigón las componentes básicas que contribuyen a la resistencia al arrancamiento son la adherencia y la fricción. Deformando las fibras lisas o usando procesos especiales para generar geometrías particulares, como fibras con ganchos, rizadas, con cabezas o botones en los extremos, o fibras de sección poligonal torsionadas, ver Fig. 1 y 2, se logra una componente mecánica adicional en la resistencia al arrancamiento.

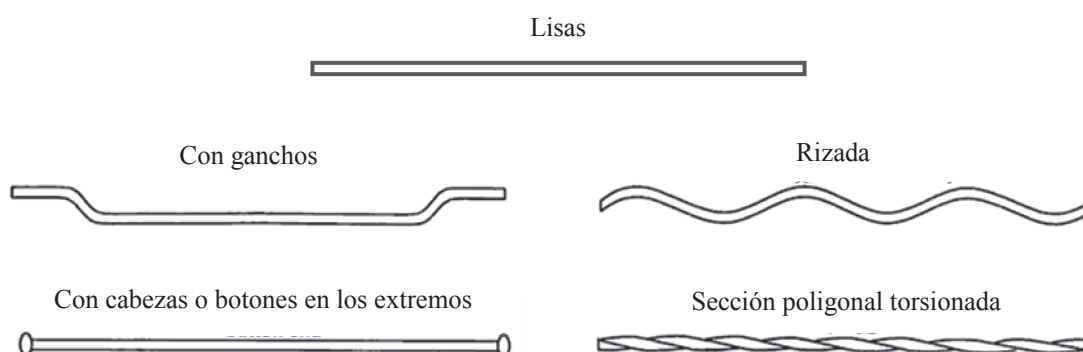


Figura 1: Tipos de Fibra de acero. Forma longitudinal



Figura 2: Tipos de Fibra de acero. Sección transversal

Para activar el mecanismo de trabajo de las fibras, es necesaria la generación de fisuras en la matriz. Fisurada la matriz, la misma queda dividida en bloques (Fig. 3.a) los cuales se mantiene unidos por las fibras. Estos bloques pueden desplazarse en dirección perpendicular (Fig. 3.b) a la fisura, paralelo (Fig. 3.c) a la dirección de la fisura o una combinación de ambas, al desplazarse los bloques generan el deslizamiento de la fibra.

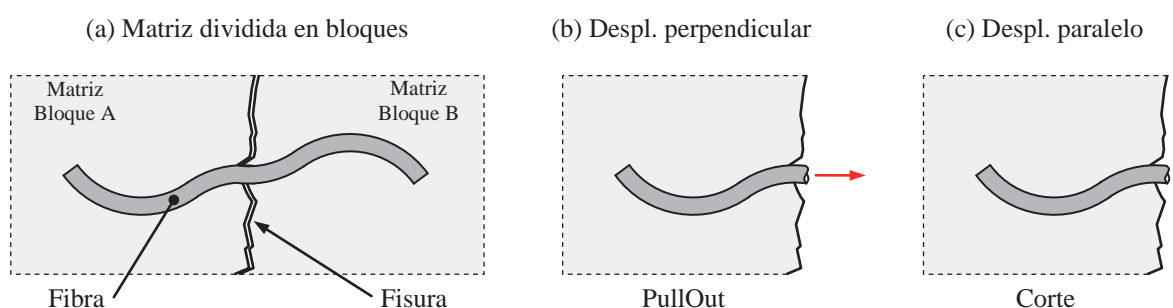


Figura 3: Mecanismos de desplazamiento

En primer lugar se presentara el modelo para fibras lisas propuesto por Naaman (1991), luego se plantea y desarrolla el modelo propuesto por Chanvillard (1999) el cual contempla fibras de geometría curva, permitiendo estimar el aporte de la componente mecánica en el PullOut. En base a estos dos modelos se desarrolla una herramienta numérica que es implementada en un software para resolver problemas de PullOut en un modelo discreto fibra-matriz. Se comparan los resultados obtenidos a través de la herramienta numérica con resultados experimentales y se estudia la influencia de la geometría de la fibra en la respuesta al ensayo de PullOut.

2 MODELO DE RESISTENCIA AL ARRANCAMIENTO PARA FIBRAS LISAS

En el problema de PullOut, el caso de fibra lisa y sección circular uniforme es el más sencillo que se puede presentar. El presente trabajo efusa como punto de parida el modelo propuesto por Naaman (1991) que se describe a continuación.

Se consideran dos fenómenos, el primero contempla la separación de la fibra respecto de la matriz mediante una discontinuidad (Fig. 4) que tiene origen en la cara de la fisura y se propaga hacia el extremo de la fibra inmerso en la matriz. Durante este proceso se generan deformaciones elásticas y deslizamiento en la Interfaz, esto último da origen a la discontinuidad. El segundo proceso consiste en el deslizamiento de la fibra como un

mecanismo dinámico, considerando que la fibra tiene movimiento de cuerpo rígido. En los gráficos de Fig. 5 se indica la variación de la tensión de corte media (valor medio de la distribución en la longitud de la fibra) en la interfaz en relación con el deslizamiento (Δ). El deslizamiento crítico (Δ_{critico}) separa el proceso de propagación de la discontinuidad y el de deslizamiento. El grafico inferior de Fig. 5 es una ampliación del grafico superior.

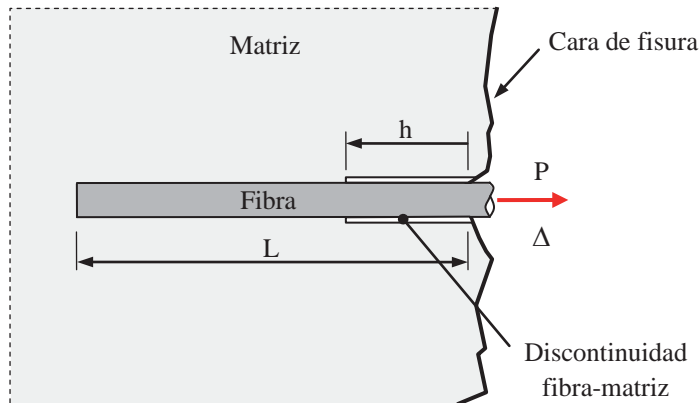


Figura 4: Fibra lisa

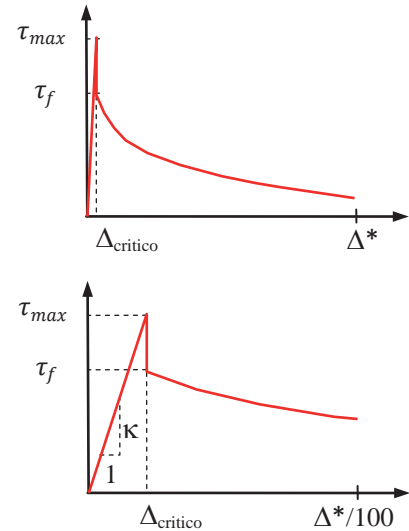


Figura 5: Relación Tensión de Corte vs Slip

2.1 Proceso de propagación de discontinuidad fibra-matriz

La resistencia al arrancamiento (P) y el deslizamiento de la fibra (Δ), están en función de la profundidad de la discontinuidad (h) y una serie de parámetros constantes que se definen más adelante. Entonces la variable de control en este proceso es la profundidad de la discontinuidad (h), haciendo variar (h) entre 0 y la longitud de la fibra inmersa en la matriz, se va construyendo la curva resistencia al arrancamiento vs deslizamiento (PullOut vs Slip). En este proceso de propagación de discontinuidad al referirse a deslizamiento de la fibra, se hace referencia al desplazamiento de la sección de fibra que se encuentra en la fisura, respecto de la cara de la fisura. A continuación se presentan las expresiones del modelo propuesto por Naaman.

Resistencia al arrancamiento (P) en función de la profundidad de discontinuidad (h):

$$P = \tau_f \cdot \psi \cdot h + \frac{\tau_{\max} \cdot \psi}{\lambda} \cdot \frac{1 - e^{-2 \cdot \lambda \cdot (L-h)}}{\frac{2}{Q} \cdot e^{-\lambda \cdot (L-h)} + \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \cdot [1 + e^{-2 \cdot \lambda \cdot (L-h)}]} \quad (1)$$

Deslizamiento en función de (h) y (P) estimada según Ec. (1):

$$\Delta = \frac{1}{A_m \cdot E_m} \cdot \left\{ P \cdot (Q - 1) \cdot h - \frac{\tau_f \cdot \psi \cdot h^2}{2} \cdot (Q - 2) - \tau_f \cdot \psi \cdot h \cdot L \right. \\ \left. + (P - \tau_f \cdot \psi \cdot h) \cdot \left[\frac{1 - e^{-\lambda \cdot (L-h)}}{1 + e^{-\lambda \cdot (L-h)}} \right] \cdot \frac{Q - 2}{\lambda} \right\} \quad (2)$$

Definición de los parámetros involucrados

$$Q = 1 + \frac{A_m \cdot E_m}{A_f \cdot E_f} \quad (3)$$

$$\lambda = \sqrt{\psi \cdot \kappa \cdot \left(\frac{1}{A_m \cdot E_m} + \frac{1}{A_f \cdot E_f} \right)} \quad (4)$$

h : Longitud de la discontinuidad, variable de control, se mide desde la cara de la fisura asía el extremo de la fibra.

L : Longitud inicial de fibra inmersa en la matriz.

ψ : Perímetro de fibra.

A_f : Área de la sección de la fibra.

A_m : Area de la sección de matriz.

E_f : Modulo de Elasticidad de la fibra.

E_m : Modulo de Elasticidad de la matriz.

τ_{max} : Tensión de corte máxima.

τ_f : Tensión de corte friccional.

κ : Modelo de adherencia, pendiente elástica en curva tensiones de adherencia vs. slip.

2.2 Proceso de deslizamiento fibra-matriz

Las deformaciones y presiones laterales en la interfaz fibra-matriz tienen una influencia considerable en la transferencia de tensiones. Tres tipos de efectos laterales deberían ser considerados: (1) contracción de la matriz alrededor de la fibra debido y deformaciones por efecto de cambios de temperatura, (2) efecto Poisson causado por la contracción excesiva de la fibra en la matriz circundante, (3) deformaciones laterales inducidas durante la carga del compuesto.

Tal vez, el más importante de los tres es la contracción de la matriz alrededor de la fibra que genera un mecanismo de presión de fijación que a veces es llamado misfit fibra-matriz.

El misfit fue definido por [Pinchin y Tabor \(1978\)](#) como "la diferencia entre el radio de la fibra y el radio del agujero en la ausencia de la fibra". En Fig. 6 se indica el efecto misfit.

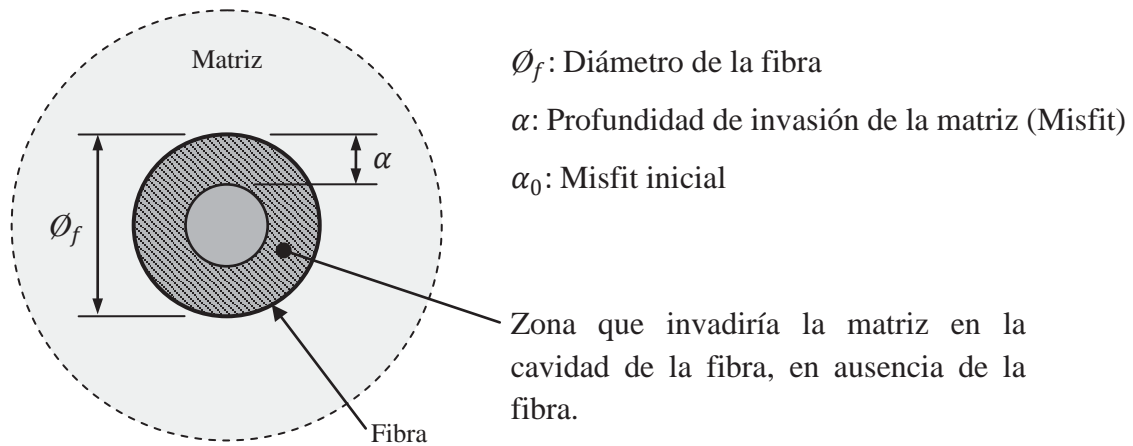


Figura 6: Mistif matriz-fibra

El efecto misfit, disminuye a medida que la fibra es extraída, debido a una acción combinada de abrasión y compactación del cemento y partículas de arena alrededor de la fibra. Esto sucede principalmente con fibras de acero, dado que son más duras que la matriz.

PullOut en el proceso de deslizamiento

Se incrementa el deslizamiento (Δ) a partir del deslizamiento máximo del proceso anterior (Δ_0) y se va estimando (P) con la siguiente expresión:

$$P(\Delta) = \psi \cdot \tau_d(\Delta) \cdot (L - \Delta) \quad (5)$$

Tensión de Corte media en interfaz fibra-matriz τ_d

$$\tau_d(\Delta) = \tau_f \cdot \frac{e^{-(\Delta-\Delta_0)^\eta} - \xi \cdot e^{-(L)^\eta}}{1 - \xi \cdot e^{-(L-\Delta+\Delta_0)^\eta}} \cdot \left[\frac{1 - \exp(K \cdot (L - \Delta + \Delta_0))}{1 - \exp(K \cdot L)} \right] \quad (6)$$

$$\Delta_0 = \frac{(Q - 2) \cdot \tau_f \cdot \psi \cdot L^2}{2 \cdot A_m \cdot E_m} \quad (7)$$

$$K = - \frac{4 \cdot \nu_f \cdot f}{E_f \cdot \varnothing_f \cdot \left(\frac{1 + \nu_m}{E_m} + \frac{1 - \nu_f}{E_f} \right)} \quad (8)$$

Calibración del modelo: Esta etapa consiste en la estimación del parámetro (ξ) para definir la forma de la curva

$$\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_f \cdot \nu_f \cdot L}{E_f} \cdot \left(\frac{1}{1 - \exp(K \cdot L)} \right) \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot P_x \cdot \nu_f}{E_f \cdot \psi} \cdot \left(\frac{1}{1 - \exp(K \cdot (L - \Delta_x + \Delta_0))} \right) \tag{10}$$

$$\xi = \frac{e^{-(L)^\eta} - \frac{\alpha}{\alpha_0} \cdot e^{-(L - \Delta_x + \Delta_0)^\eta}}{e^{-(\Delta_x - \Delta_0)^\eta} - \frac{\alpha}{\alpha_0}} \tag{11}$$

Definición de los parámetros involucrados

\varnothing_f : Diámetro de la fibra.

Δ_0 : Deslizamiento máximo producido en el proceso de propagación de la discontinuidad

η : Parámetro que define la forma de la curva, se ajusta en base a resultados experimentales. Naaman (1991) propone $\eta = 0.20$.

ξ : Parámetro que define la forma de la curva, se ajusta en base a resultados experimentales mediante Ecs. (9), (10) y (11).

ν_f : Coeficiente de Poisson de la fibra.

ν_m : Coeficiente de Poisson de la matriz.

f : Coeficiente de roce dinámico.

P_x, Δ_x : Coordenadas de un punto de la curva PullOut vs Slip, en la rama post-pico.

α : Profundidad de invasión de la matriz en la cavidad de la fibra, si no estuviera la fibra.

α_0 : Valor inicial de la profundidad de invasión de la matriz en la cavidad de la fibra, si no estuviera la fibra.

3 MODELO DE RESISTENCIA AL ARRANCAMIENTO PARA FIBRAS CURVAS

Las fibras con eje curvo poseen una componente mecánica adicional en la resistencia al arrancamiento. El presente trabajo se basa en el modelo propuesto por Chanvillard (1999) que se describe y desarrolla a continuación.

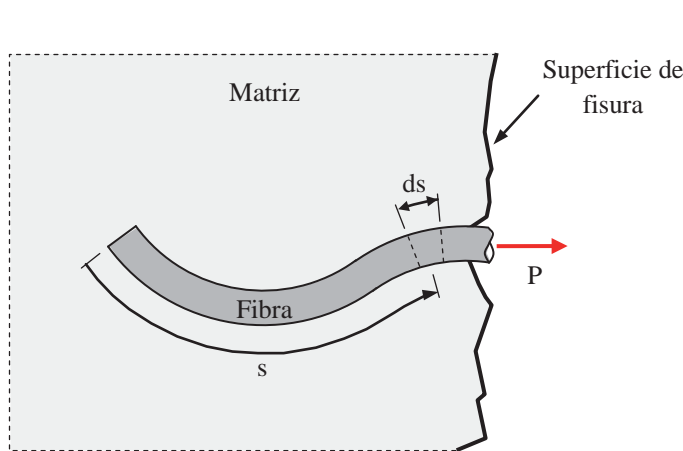


Figura 7: Fibra

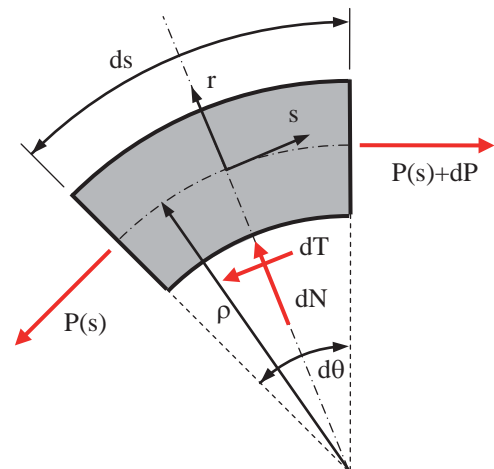


Figura 8: Elemento de fibra

El planteo de la ecuación diferencial en el problema de extracción de una fibra de una matriz, involucra equilibrio de fuerzas, equilibrio de energía y consideraciones de interacción en la interface fibra-matriz. Las fuerzas másicas son despreciables y no serán consideradas en el análisis.

3.1 Equilibrio de Fuerzas

Se aísla un segmento diferencial de fibra, en el cual se indican las fuerzas que actúan en el mismo.

Se plantea el equilibrio de fuerzas:

$$\sum F_s = 0 \Rightarrow -P(s) \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (P(s) + dP) \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - dT = 0$$

$$dP \approx dT \quad (12)$$

$$\sum F_r = 0 \Rightarrow -P(s) \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (P(s) + dP) \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + dN = 0$$

$$dN = (2 \cdot P(s) + dP) \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx (2 \cdot P(s) + dP) \cdot \left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx P(s) \cdot d\theta$$

$$dN \approx P(s) \cdot d\theta = P(s) \cdot \frac{ds}{\rho} = P(s) \cdot C \cdot ds$$

$$dN \approx P(s) \cdot C \cdot ds \quad (13)$$

3.2 Balance de Energía

El balance de energía mecánica, aplicado para el deslizamiento de un elemento de fibra, permite establecer que el trabajo realizado por las fuerzas externas ($W_{externo}$) es igual a la energía de deformación disipada ($W_{deformacion}$).

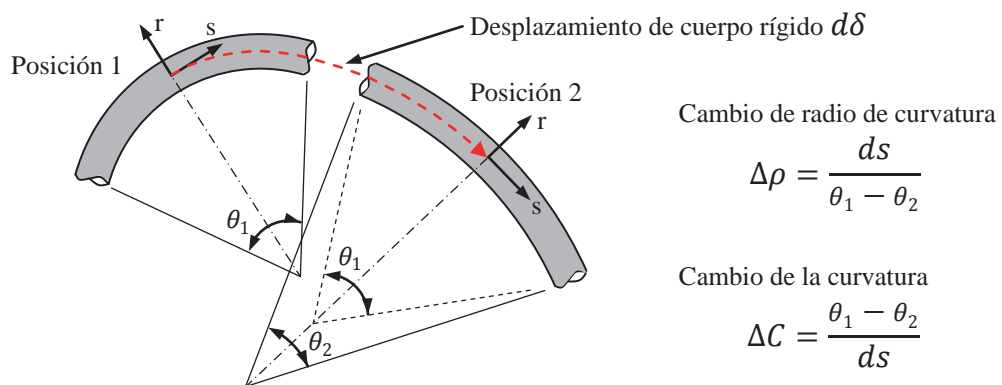


Figura 9: Elemento de fibra de longitud ds sometido a un desplazamiento

Trabajo de fuerzas externas

$$W_{externo} = \int_{\tilde{S}} p_i \cdot u_i \cdot d\tilde{S} \quad (14)$$

Energía de deformación

$$W_{deformacion} = \int_V \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot dV \quad (15)$$

Campo de desplazamiento: referido a coordenadas curvilíneas

$$u = \begin{cases} u_s = r \cdot s \cdot dC \\ u_r = 0 \\ u_z = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Vector de Fuerzas superficiales



Sección de fibra: $\tilde{S}_1 \rightarrow p_s = P/\tilde{S}_1$

Sección de fibra: $\tilde{S}_2 \rightarrow p_s = \frac{(P+dP)}{\tilde{S}_2}$ (17)

Figura 10: Referencia superficies

Superficie lateral: $\tilde{S}_3 \rightarrow p_s = dT/\tilde{S}_3$

Solo interesa la componente el vector en la dirección s .

Tensor de deformaciones

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} r \cdot dC & (1/2) \cdot s \cdot dC & 0 \\ (1/2) \cdot s \cdot dC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Tensor de Tensiones

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Remplazando en Ec. (14) las Ecs. (16) y (17), se obtiene la siguiente:

$$W_{externo} = -\frac{P}{\tilde{S}_1} \cdot \int_{\tilde{S}_1} \left(d\delta + r \cdot \left(s - \frac{ds}{2} \right) \cdot dC \right) \cdot d\tilde{S}_1 - \frac{dT}{\tilde{S}_3} \cdot \int_{\tilde{S}_3} (d\delta + r \cdot s \cdot dC) \cdot d\tilde{S}_3 \\ + \frac{P+dP}{\tilde{S}_2} \cdot \int_{\tilde{S}_2} \left(d\delta + r \cdot \left(s + \frac{ds}{2} \right) \cdot dC \right) \cdot d\tilde{S}_2 \quad (20)$$

Despreciando los términos de orden 2 y 3, trabajando algebraicamente, se obtiene:

$$W_{externo} = dP \cdot d\delta - dT \cdot d\delta \quad (21)$$

Remplazando en Ec. (15) las Ecs. (18) y (19), se obtiene:

$$W_{deformacion} = \int_V \sigma \cdot r \cdot dC \cdot dV = dC \cdot ds \cdot \int_{\tilde{S}_1} \sigma \cdot r \cdot d\tilde{S}_1 = dC \cdot ds \cdot M \quad (22)$$

Se plantea balance de energía, igualando (21) y (22):

$$W_{externo} = W_{deformacion} \quad \Rightarrow \quad dP \cdot d\delta - dT \cdot d\delta = dC \cdot ds \cdot M$$

$$dP = \frac{dC}{d\delta} \cdot ds \cdot M + dT \quad (23)$$

3.3 Interacción en interfaz fibra-matriz

Se propone como modelo de interacción en interfaz fibra-matriz la ley de Coulomb Ec. (24), la cual se expresa en términos de fuerzas Ec. (25):

$$\tau = c + \sigma \cdot f \quad (24)$$

$$dT = \tau_d \cdot \psi \cdot ds + dN \cdot f \quad (25)$$

Donde τ es una tensión de corte independiente de dN , ψ es el perímetro de la fibra y f el coeficiente de roce dinámico.

3.4 Expresión para estimar la carga de extracción de fibra

Combinando Ecs.(13), (23) y (25) se obtiene la ecuación diferencial para la carga de extracción de fibra:

$$dP = \left(\frac{dC}{d\delta} \cdot M + \tau_d \cdot \psi + P(s) \cdot C \cdot f \right) \cdot ds \quad (26)$$

4 MATRIZ SOMETIDA A ESTADO MULTIAXIAL

Si la matriz está sometida a un estado multiaxial de tensiones, esto influye en el comportamiento de la interacción fibra-matriz, aumentando o disminuyendo el efecto del mecanismo de sujeción según sea un estado medio de compresión o tracción respectivamente.

4.1 Interacción en interfaz fibra-matriz

Partiendo de Ec. (24) se considera que la tensión (σ) normal a la superficie lateral de la fibra, están compuestas por la una componente (dN) de la fuerza axial (P) debido a la curvatura y por una componente de tensión lateral media ($\tilde{\sigma}$) con origen en un estado multiaxial ajeno al deslizamiento de la fibra.

$$dT = \tau_d \cdot \psi \cdot ds + (dN - \tilde{\sigma} \cdot \psi \cdot ds) \cdot f \quad (27)$$

Se asume la siguiente relación ($\tilde{\sigma}$) vs (τ):

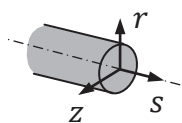


Figura 11: Fibra, ejes locales

Tensión lateral media

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} \quad (28)$$

Relación ($\tilde{\sigma}$) vs (τ)

$$\tau = \frac{dT}{\psi \cdot ds} = \tau_c - \tilde{\sigma} \cdot f \quad (29)$$

con

$$\tau_c = \tau_d + \frac{dN \cdot f}{\psi \cdot ds} \quad (30)$$

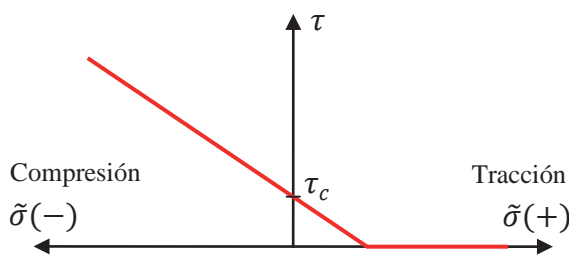


Figura 12: Relación ($\tilde{\sigma}$) vs (τ)

4.2 Expresión final para estimar la resistencia al arrancamiento de fibra

Combinando Ecs.(13), (23) y (27) se obtiene la ecuación diferencial para la carga de extracción de fibra:

$$dP = \left(\frac{dC}{d\delta} \cdot M + \tau_d \cdot \psi + P(s) \cdot C \cdot f + \tilde{\sigma} \cdot \psi \cdot f \right) \cdot ds \quad (31)$$

5 IMPLEMENTACION NUMERICA

En esta sección, se presentan los aspectos a considerar al resolver la ecuación diferencial de la resistencia al arrancamiento de fibra con eje curvo. Se indica la forma de evaluar las variables que intervienen, modificaciones a la propuesta original de los modelos y el algoritmo de resolución.

5.1 Geometría de fibra

Para definir la geometría del eje de la fibra y poder integrar la ecuación diferencial del modelo de resistencia al arrancamiento para fibras de eje curvo, se emplean polinomios paramétricos de tercer grado de Hermite, $X(s)$ y $Y(s)$.

Al definir la geometría de la fibra, se define los coeficientes de los polinomios de Hermite y con estos se determinan coordenadas curvilíneas, longitudes, curvatura y cambio de curvatura.

Para estimar el cambio de curvatura, es necesario que la curvatura tenga signo, para ello se propone la siguiente convención

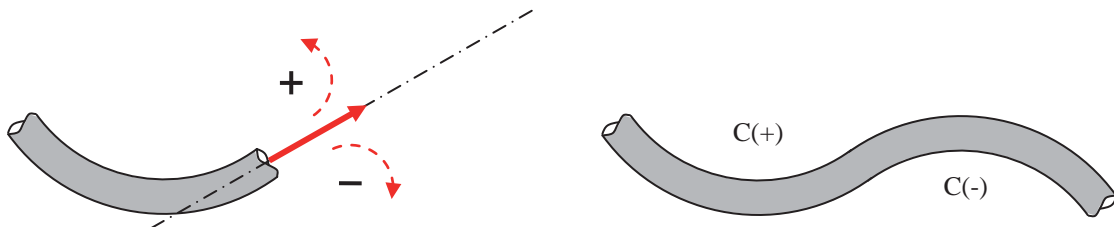


Figura 13: Convención de signo para la curvatura

Cuando el cambio de dirección del vector tangente a la curva entre dos puntos sucesivos, es un giro en sentido anti horario, se asigna signo positivo a la curvatura, si el giro es en sentido horario le corresponde signo negativo.

La expresión para evaluar la magnitud y signo de curvatura es:

$$C(s) = \frac{X'(s) \cdot Y''(s) - X''(s) \cdot Y'(s)}{\left(\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}\right)^3} \quad (32)$$

5.2 Modelo Adoptado para Estimar Resistencia al Arrancamiento

Se trabajara con una combinación entre los modelos de Naaman (1991) y Chanvillard (1999), esta metodología fue propuesta por Sujivorakul C. y Naaman Antoine E. (2003) y fue empleada también por Cunha Victor M.C.F. (2007).

En el proceso inicial de arrancamiento de fibra donde se propaga la discontinuidad en la interfaz fibra-matriz a lo largo de toda la fibra, se utiliza el modelo de Naaman (1991) expresado a través de las Ec. (1) y (2), teniendo en cuenta la siguiente observación.

Al estimar el deslizamiento (en casos particulares) a medida que se incrementaba (h), el deslizamiento llegaba a un valor pico y luego disminuye, este comportamiento no es aceptable en ensayos con control de desplazamientos. Por ello, se impone que una vez alcanzado un valor máximo de deslizamiento este se mantiene hasta finalizar el proceso de propagación de la discontinuidad.

Una vez que la discontinuidad en la interfaz fibra-matriz cubre toda la fibra, inicia el proceso de deslizamiento. Para este último se utiliza el modelo propuesto por Chanvillard (1999) desarrollado y ampliado en las secciones anteriores, pero evaluando la componente de adherencia y fricción (τ_d) a través del modelo de Naaman (1991) que contempla principalmente el efecto de contracción de la matriz alrededor de la fibra.

5.3 Fricción por efecto de la curvatura " $P(s) \cdot C \cdot f$ "

Al estimar esta componente, debe tenerse en cuenta que el valor de curvatura tiene un signo asociado y lo que se introduce en esta expresión es el módulo de la curvatura razón por la cual se debe aplicar valor absoluto a C , entonces la componente de fricción por efecto de la curvatura resulta:

$$P(s) \cdot |C| \cdot f \tag{33}$$

5.4 Estimación del Momento

El momento máximo que puede absorber la fibra en el cambio de curvatura, está asociado a la magnitud de la fuerza normal, en este trabajo esa fuerza corresponde a la fuerza de resistencia al arrancamiento en la sección de la fibra en evaluación. La relación Momento-Normal se obtiene modificando la profundidad del eje neutro (E.N.) y estimando el correspondiente momento y normal.

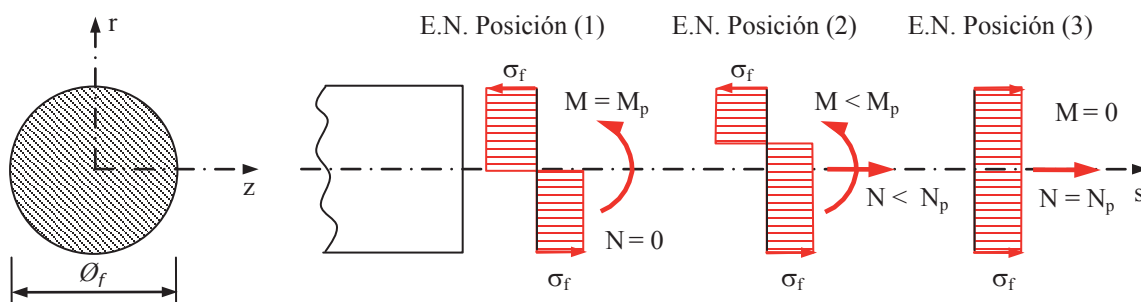


Figura 14: Sección de Fibra - Distribución de tensiones - Relación Momento y Normal plásticos

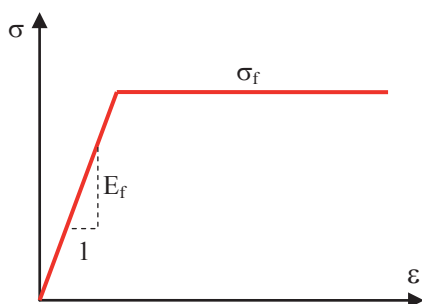


Figura 15: Ecuación constitutiva de la fibra

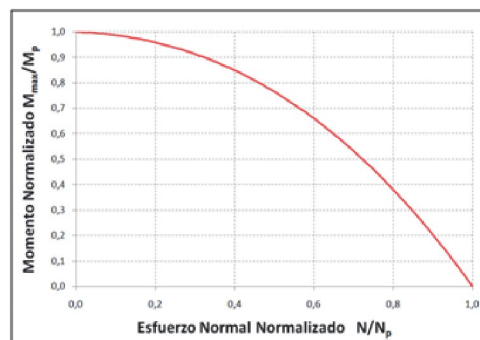


Figura 16: Relación Normalizada Momento-Normal

La ecuación que resulta de este planteo no es explícita por lo cual se opta por una resolución numérica, que es normalizada y posteriormente se efectúa un ajuste con un polinomio de tercer grado. La normalización consiste en dividir los valores obtenidos de momento y normal, en los valores de momento plástico y normal plástico respectivamente. A continuación se presenta el polinomio ajustado y en la Fig. 16 se muestra su gráfico.

$$M_{max} = M_p \cdot \left[1 - 0.0539 \cdot \left(\frac{N}{N_p} \right) - 0.7156 \cdot \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 - 0.2304 \cdot \left(\frac{N}{N_p} \right)^3 \right] \quad (34)$$

Para el caso de secciones circulares:

$$M_p = \frac{\varnothing^3}{6} \cdot \sigma_f \quad (35)$$

$$N_p = \frac{\pi \cdot \varnothing^2}{4} \cdot \sigma_f \quad (36)$$

Conocido el momento máximo (M_{max}) que puede absorber la sección, se construye el diagrama Momento-Curvatura. Para simplificar el cálculo se trabaja con una relación bilineal, como se muestra a continuación.

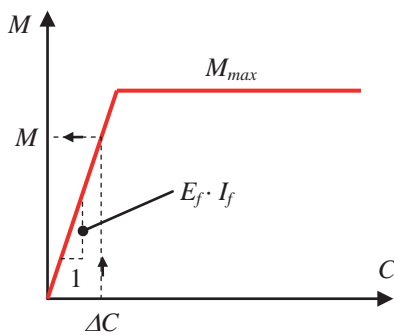


Figura 17: Diagrama Momento-Curvatura

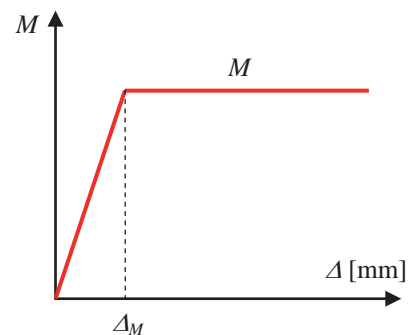


Figura 18: Momento-Desplazamiento del modelo

Una vez que se tiene el diagrama Momento-Curvatura (Fig. 17), se ingresa con el cambio de curvatura que se produce en el elemento de fibra y se determina el momento correspondiente. Este valor es corregido según la relación de Fig. 18, con la cual se considera que el cambio de curvatura es efectivo después de un desplazamiento mínimo (Δ_M) debido a la adaptación local de la matriz a la fibra. Chanvillard (1999) propone este valor en 0.1mm. También se podría usar este parámetro para la calibración del modelo.

5.5 Control de Fuerza Axial Máxima

Si la fuerza de resistencia al arrancamiento estimada supera la normal plástica (N_p), el modelo no es válido ya que se generan deformaciones plásticas en dirección axial y esto no es consistente con la hipótesis de desplazamiento de cuerpo rígido de la fibra que se plantea en el desarrollo de los modelos.

5.6 Algoritmo para integración numérica de la ecuación diferencial

ALGORITMO DE INTEGRACION

1 - Se cargan datos: $\psi, A_f, A_m, E_f, E_m, \tau_{max}, \tau_f, \kappa, \emptyset_f, \eta, \nu_f, \nu_m, \nu_m, f, P_x, \Delta_x$, Coordenadas nodos de fibra

2- Definición de geometría inicial de fibra

3 - Proceso de propagación de discontinuidad interfaz fibra-matriz

3.1 - Inicialización de variables

$$h = 0, \Delta_{max} = 0, \Delta h = \frac{L}{N^{\circ} \text{ de elementos en que se discretiza}}, \text{ Estimación de } \psi, Q, \lambda$$

3.2 - Incremento de profundidad de discontinuidad: $h = h + \Delta h$

3.3 - Estimación de resistencia al arrancamiento

$$P = \tau_f \cdot \psi \cdot h + \frac{\tau_{max} \cdot \psi}{\lambda} \cdot \frac{1 - e^{-2 \cdot \lambda \cdot (L-h)}}{\frac{2}{Q} \cdot e^{-\lambda \cdot (L-h)} + \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \cdot [1 + e^{-2 \cdot \lambda \cdot (L-h)}]} \quad (1)$$

3.4 - Estimación de deslizamiento

$$\Delta = \frac{1}{A_m \cdot E_m} \cdot \left\{ P \cdot (Q - 1) \cdot h - \frac{\tau_f \cdot \psi \cdot h^2}{2} \cdot (Q - 2) - \tau_f \cdot \psi \cdot h \cdot L + (P - \tau_f \cdot \psi \cdot h) \cdot \left[\frac{1 - e^{-\lambda \cdot (L-h)}}{1 + e^{-\lambda \cdot (L-h)}} \right] \cdot \frac{Q - 2}{\lambda} \right\} \quad (2)$$

Si $\Delta > \Delta_{max}$ entonces $\Delta_{max} = \Delta$

3.5 - Control de profundidad de discontinuidad

Si $h < L$ entonces $\Delta = \Delta_{max}$, Continuar en (3.2)

Si no, continuar en (4)

4 - Proceso de deslizamiento

4.1 - Inicialización de variables

$$\Delta_0 = \Delta_{max}, \Delta = 0, i = 0, \Delta \delta = \frac{\Delta_{aplicado}}{N^{\circ} \text{ de incrementos del deslizamiento total}}, \text{ Estimación de } K, \xi$$

$$M_p = \frac{\emptyset^3}{6} \cdot \sigma_f, N_p = \frac{\pi \cdot \emptyset^2}{4} \cdot \sigma_f$$

4.2 - Redefinición de geometría

4.3 - Resistencia al Arrancamiento Inicial: $P_0(\Delta_0) = \psi \cdot \tau_f \cdot (L - \Delta_0)$

4.4 - Incremento de deslizamiento: $\Delta = \Delta + \Delta \delta, i = i + 1$

4.5 - Redefinición de geometría

4.6 - Estimación de la tensión media de corte por efecto misfit

$$\tau_d(\Delta) = \tau_f \cdot \frac{e^{-(\Delta-\Delta_0)^\eta} - \xi \cdot e^{-(L)^\eta}}{1 - \xi \cdot e^{-(L-\Delta+\Delta_0)^\eta}} \cdot \left[\frac{1 - \exp(K \cdot (L - \Delta + \Delta_0))}{1 - \exp(K \cdot L)} \right] \quad (5)$$

4.7 - Integración sobre longitud de fibra

4.7.1 - Inicialización de variables: $s = 0$, $\Delta s = \Delta\delta$, $P_i = 0$ 4.7.2 - Incremento de coordenada curvilínea: $s = s + \Delta s$

4.7.3 - Estimación de curvatura y cambio de curvatura

$$C_i(s) = \frac{X'(s) \cdot Y''(s) - X''(s) \cdot Y'(s)}{(\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2})^3} \quad (32), \quad \Delta C = |C_i(s) - C_{i-1}(s)|$$

4.7.4 - Determinación de momento

$$M = E_f \cdot I_f \cdot \Delta C$$

$$M_{max} = M_p \cdot \left[1 - 0.0539 \cdot \left(\frac{P_i(s - \Delta s)}{N_p} \right) - 0.7156 \cdot \left(\frac{P_i(s - \Delta s)}{N_p} \right)^2 - 0.2304 \cdot \left(\frac{P_i(s - \Delta s)}{N_p} \right)^3 \right] \quad (34)$$

Si $M > M_{max}$ entonces $M = M_{max}$ Si $\Delta < \Delta_M$ entonces $M = M \cdot \frac{\Delta}{\Delta_M}$

4.7.5 - Resistencia al Arrancamiento

$$P(s)_i = P_i(s - \Delta s) + \left(M \cdot \frac{\Delta C}{\Delta\delta} + \tau_d \cdot \psi + P_i(s - \Delta s) \cdot |C_i(s)| \cdot f + \tilde{\sigma} \cdot \psi \cdot f \right) \cdot \Delta s \quad (31)$$

4.7.6 - Control intervalo de integración

Si $s < (L - \Delta)$ entonces continuar en (4.7.2)

Si no, continuar en (4.8)

4.8 - Control de Normal Plástica

Si $P \geq N_p$ entonces

No se cumple hipótesis de desplazamiento de cuerpo rígido, Continuar en (5)

Si no, continuar en (4.9)

4.9 - Control de deslizamiento aplicado

Si $\Delta \geq \Delta_{aplicado}$ entonces continuar en (5)

Si no, continuar en (4.4)

5 - Fin

6 EJEMPLOS DE APLICACION

En esta sección se presentan resultados numéricos obtenidos según el algoritmo desarrollado en la sección anterior. Los primeros resultados corresponden a simulaciones de datos experimentales obtenidos por Naaman (1991) y Cunha (2003), se adjuntan resultados numéricos donde se estudia la influencia del radio de curvatura de las fibras, la existencia de un estado multiaxial en la matriz y el esbeltez.

6.1 Comparación con datos experimentales obtenidos por Naaman (1991)

Se trata de una fibra lisa (Fig. 19), los parámetros ingresados en el modelo se adjuntan en Tabla 1, bajo la referencia Naaman 1 y 2. Los resultados se muestran en figuras 20 a 23. En color verde se representan los datos experimentales, en rojo y azul los resultados numéricos del proceso de propagación de discontinuidad y el proceso de deslizamiento, respectivamente.

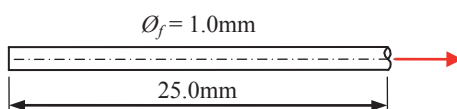


Figura 19: Geometría de fibra

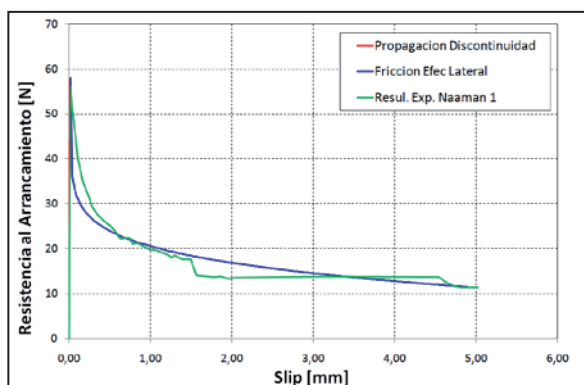


Figura 20: Matriz de baja resistencia

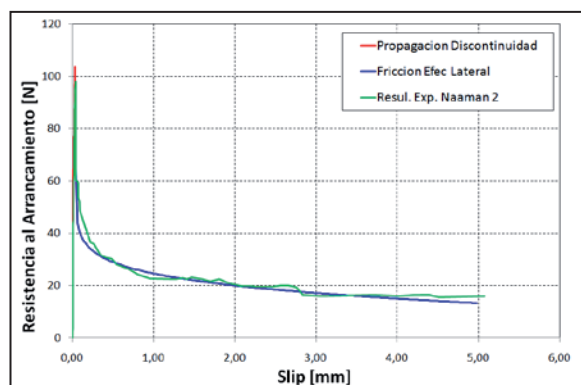


Figura 21: Matriz de alta resistencia

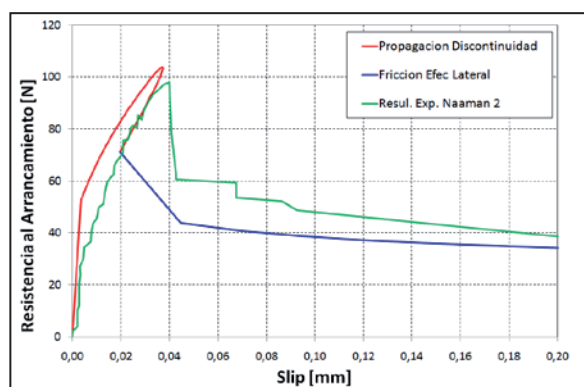


Figura 22: Ampliación Fig. 21 Modelo de propagación de discontinuidad original

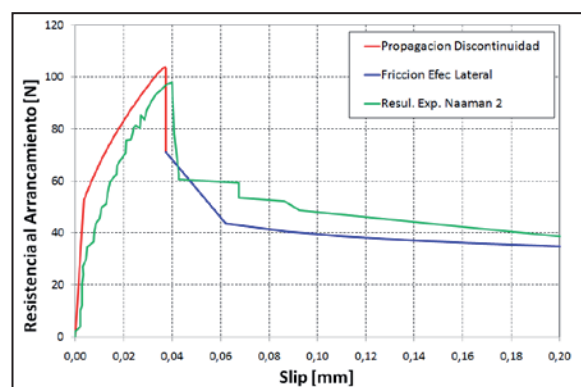


Figura 23: Ampliación de Fig. 21 Modelo de propagación de discontinuidad modificado

La Fig. 20 corresponde a resultados de una matriz de baja resistencia, donde la resistencia pico al arrancamiento es de 56N. La Fig. 21 corresponde a resultados de una matriz de alta resistencia, donde la resistencia pico al arrancamiento es de 97N. Para la matriz de alta resistencia se adjuntan ampliaciones de los resultados con el fin de apreciar el proceso de propagación de la discontinuidad fibra-matriz, en Fig. 22 resultados obtenidos con el modelo original y en Fig. 23 resultados obtenidos con el modelo modificado según lo explicado en apartado 5.2. En ambos casos (matriz de baja y alta resistencia) el modelo ajusta satisfactoriamente. Se observa que iniciado el proceso de deslizamiento la resistencia disminuye drásticamente.

6.2 Comparación con datos experimentales obtenidos por Cunha (2003)

En este caso se trata de una fibra con ganchos, la geometría se indica en Fig. 24 y los parámetros introducidos en el modelo se adjuntan en Tabla 1, bajo la referencia Cunha.

En Fig. 25 se presentan los resultados, en color verde se indicó los datos experimentales, en color gris los resultados de la simulación numérica considerando todas las componentes presentadas en secciones anteriores para la resistencia al arrancamiento. También se adjuntan las componentes por separado para ver la importancia de cada una, en azul componente de fricción por efecto lateral, en negro componente mecánica por cambio de curvatura y en rojo componente fricción por efecto de curvatura sumada a la componente mecánica por cambio de curvatura. Se despreciaron los resultados numéricos del proceso propagación de discontinuidad.

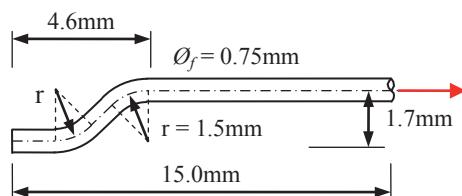


Figura 24: Geometría de fibra

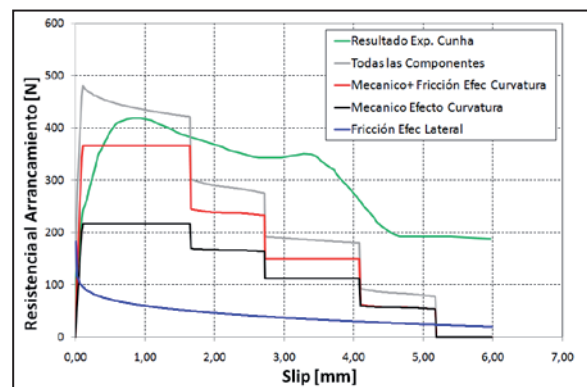


Figura 25: Resistencia al arrancamiento vs. deslizamiento. Todas las componentes y también para cada componente

Se puede observar (Fig. 25) el importante incremento en la resistencia al arrancamiento que generan los ganchos respecto a una fibra lisa (la curva azul, fricción efecto lateral, sería semejante a los resultados de una fibra lisa de igual longitud). La resistencia pico al arrancamiento es reproducida en valores aceptables, pero los valores post-pico se alejan de lo experimental. Esta diferencia puede atribuirse a la manera rígida en que se define la geometría de la fibra, en la cual no se contemplan las deformaciones que puede sufrir la cavidad de la matriz durante el deslizamiento de la fibra.

6.3 Comparación con datos exp. obtenidos por Cunha (2003) - Influencia de Curvatura

En este caso se trata de una fibra con ganchos donde se varia el radio de curvatura para estudiar la influencia de este. La geometría se indica en Fig. 26 y los parámetros introducidos en el modelo se adjuntan en Tabla 1, bajo la referencia Cunha.

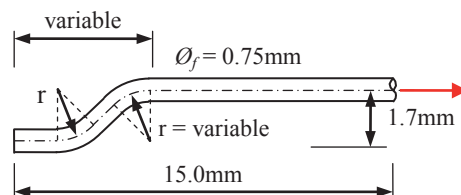


Figura 26: Geometría de fibra

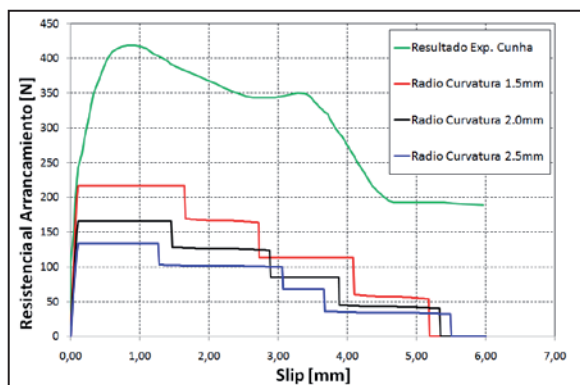


Figura 27: Componente efecto cambio de curvatura
Influencia del radio de curvatura

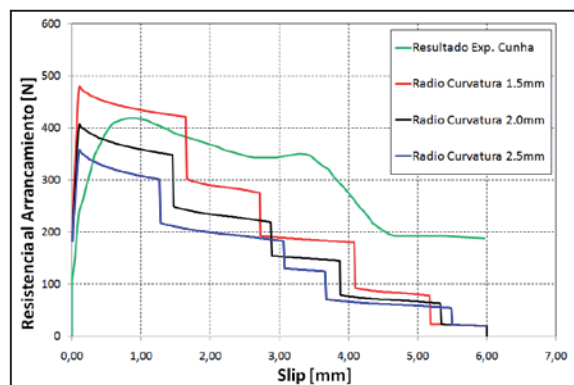


Figura 28: Todas las componentes
Influencia del radio de curvatura

Se puede observar la gran variabilidad que genera el radio de curvatura. Para un dada fibra los radios de curvatura iniciales no se mantienen durante el proceso de deslizamiento ya que la cavidad de la matriz donde se aloja la fibra se va deformando y las curvaturas tienden a suavizarse. El numero de saltos que se aprecia en las graficas se corresponde con los cambios de curvatura que sufre el extremo de la fibra inmerso en la matriz.

El efecto de los ganchos se manifiesta en el proceso de deslizamiento, que este efecto perdure durante el deslizamiento depende de la longitud del gancho, mientras la magnitud del efecto están en función del número de secciones de cambios de curvatura y del radios de curvatura.

6.4 Estudio numérico sobre influencia de un estado multiaxial en la matriz

En este caso se trata de una fibra con ganchos, la geometría se indica en Fig. 29 y los parámetros introducidos en el modelo se adjuntan en Tabla 1, bajo la referencia Fibra 1.

En Fig. 30 se adjuntan resultados de una fibra con presión lateral (4.0MPa) inducida por un estado multiaxial de la matriz y la misma fibra sin la presión lateral como referencia.

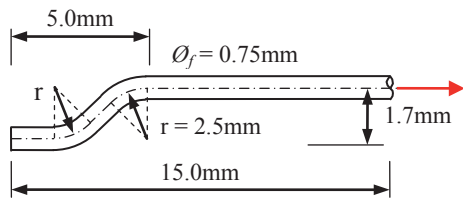


Figura 29: Geometría de fibra

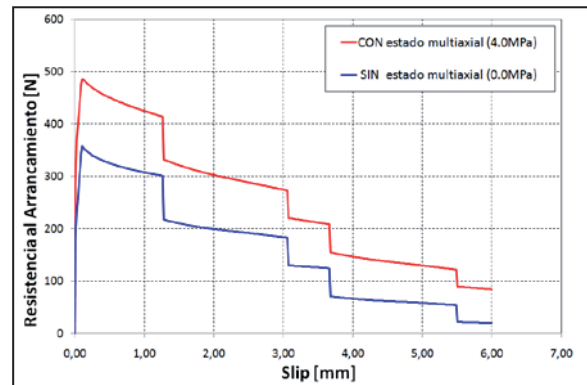


Figura 30: Influencia de un estado multiaxial en la matriz

Se puede apreciar que la influencia de un estado multiaxial de compresión en la matriz aumenta la resistencia al arrancamiento, lo cual era de esperar.

Este efecto debe ser estudiado en mayor profundidad y considerando su influencia en el efecto misfit.

6.5 Estudio numérico sobre influencia de la esbeltez

6.5.1 Fibra lisa

En laboratorio se observa que a mayor esbeltez de las fibras la resistencia al arrancamiento aumenta. Esto se justifica rápidamente en el caso de fibras lisas. Consideremos 2 muestras A y B de igual peso de fibras, en ambas todas las fibras poseen una la misma longitud, pero las fibras de la muestra A tienen un diámetro de 0.5mm y que las fibras de la muestra B un diámetro de 1.0mm. Entonces a igualdad de peso una fibra de la muestra B equivale a 4 veces una fibra de la muestra A, la suma de la superficie lateral de las fibras de la muestra A duplican a las de la muestra B. En consecuencia a mayor esbeltez, mayor superficie lateral, como el mecanismo de fijación de la fibra depende de la superficie lateral de la misma, al aumentar la superficie se incrementa la resistencia al arrancamiento. A continuación se presentan resultados numéricos de la resistencia al arrancamiento de fibras de 1.0mm y 0.5mm de diámetro.

En este caso se trata de dos fibras lisas, la geometría se indica en Fig. 31 y los parámetros introducidos en el modelo se adjuntan en Tabla 1, bajo la referencia Fibra 2 (1.0mm de diámetro) y Fibra 3 (0.5mm de diámetro).

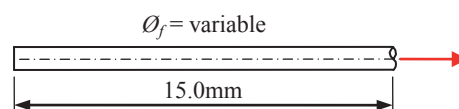


Figura 31: Geometría de fibra

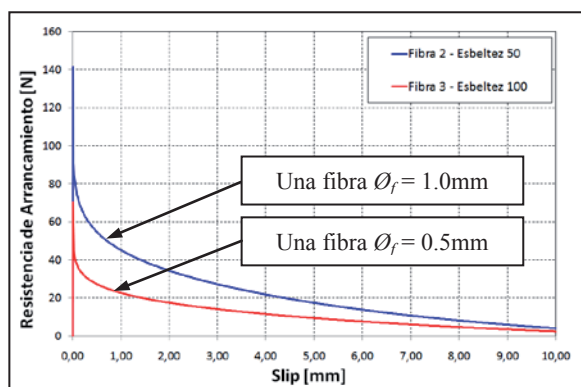


Figura 32: Efecto esbeltez - Comparación por unidad

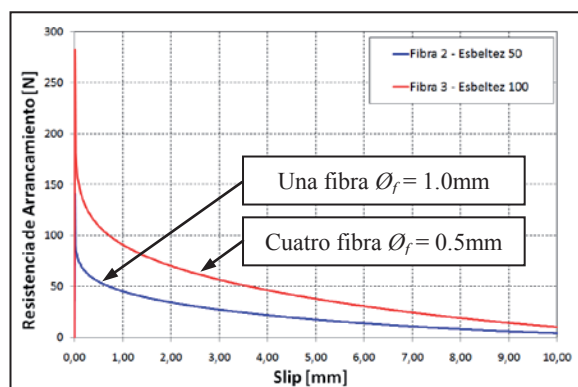


Figura 33: Efecto esbeltez - Comparación a igual peso

En Fig. 32 se comparan la resistencia al arrancamiento de una fibra de 1.0mm de diámetro y una fibra de 0.5mm de diámetro, es obvio que comparando por unidad de fibra la de mayor diámetro resiste mas. En Fig. 33 se compara a igualdad de peso, en estos resultados se pone de manifiesto que al aumentar la esbeltez aumenta la resistencia al arrancamiento.

6.5.2 Fibra con ganchos

El efecto esbeltez se manifiesta también en las fibras de eje curvo incrementando la componente de fricción por efecto lateral. Pero esta no es la componente principal de resistencia al arrancamiento, por lo cual puede tener poca influencia. Por otro lado, al tener fibras más esbeltas, disminuyendo el diámetro, la capacidad flexional se reduce con lo cual la componente mecánica que aporta el gancho disminuye. Por lo tanto, en fibras con ganchos no es fácil concluir que aumentar la esbeltez en las fibras aumentaría la resistencia al arrancamiento.

A continuación se desarrollan dos ejemplos, en el primero (6.5.2.1) son dos fibras de diámetro diferente (1.0mm y 0.5mm), pero con igual radio de curvatura (2.0mm) y el segundo (6.5.2.2) son dos fibras de diámetro 1.0mm y 0.5mm, con radio de curvatura 2.0mm y 1.0mm respectivamente. En Fig. 34 se indica geometría de la fibra.

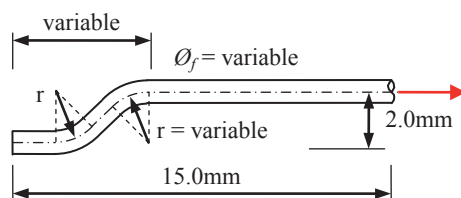


Figura 34: Geometría de fibra

6.5.2.1 Aumento de Esbeltez por reducción de diámetro de fibra

El aumento de esbeltez se considera como la disminución de diámetro de fibra. Los parámetros introducidos en el modelo se adjuntan en Tabla 1, bajo la referencia Fibra 4 (1.0mm de diámetro) y Fibra 5 (0.5mm de diámetro). En Fig. 35 y 36 se adjuntan resultados.

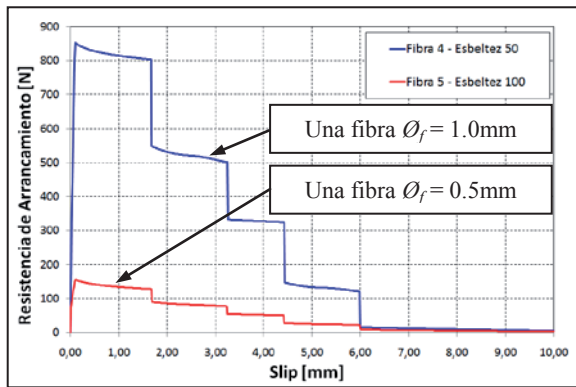


Figura 35: Efecto esbeltez - Comparación por unidad

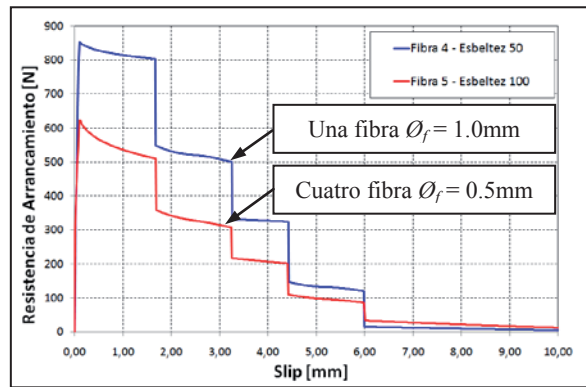


Figura 36: Efecto esbeltez - Comparación igual peso

Se observa (Fig. 36) que el aumento de esbeltez disminuye la resistencia al arrancamiento de la fibras.

6.5.2.2 Aumento de Esbeltez por reducción de diámetro de fibra y aumento de curvatura

El aumento de esbeltez se considera como la disminución de diámetro de fibra y al tener un diámetro menor de fibra se consideran radios de curvatura menores. Los parámetros introducidos en el modelo se adjuntan en Tabla 1, bajo la referencia Fibra 4 (1.0mm de diámetro) y Fibra 6 (0.5mm de diámetro). En Fig. 37 y 38 se adjuntan resultados.

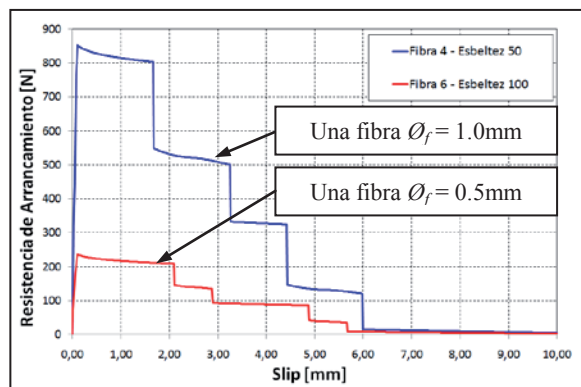


Figura 37: Efecto esbeltez - Comparación por unidad

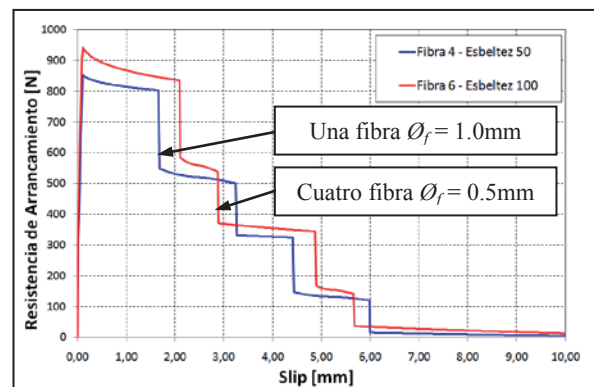


Figura 38: Efecto esbeltez - Comparación igual peso

Se observar (Fig. 38) un leve incremento en la resistencia al arrancamiento al aumentar la esbeltez y ajustar los radios de curvatura a esa esbeltez.

Entonces para contar con los beneficios del efecto esbeltez, en fibras con ganchos, es necesario incrementar los radios de curvatura, lo cual es factible por tener diámetros menores de fibra.

En la tabla siguiente se adjuntan las parámetros geométricas y características materiales empleados en las simulaciones presentadas.

Parámetros generales	Naaman 1	Naaman 2	Cunha	Fibra 1	Fibra 2	Fibra 3	Fibra 4	Fibra 5	Fibra 6
Fracción volumétrica de fibra V_f	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
Diámetro de fibra [mm]	0.50	0.50	0.75	0.75	1.00	0.50	1.00	0.50	0.50
Resistencia de Fibra [N/mm^2]	1000	1000	1100	1100	1200	1200	1200	1200	1200
Modelo de elasticidad de la fibra [N/mm^2]	207000	207000	207000	207000	207000	207000	207000	207000	207000
Modelo de elasticidad de la matriz [N/mm^2]	21000	21000	35000	35000	35000	35000	35000	35000	35000
Modulo de adherencia [$(N/mm^2)/mm$]	1425.7	2387	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500
Tensión tangencial máxima adherencia [N/mm^2]	1.48	9.73	5.00	5.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00
Tensión tangencial fricción [N/mm^2]	1.48	1.81	5.00	5.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00
Coefficiente de Poisson de la fibra	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
Coefficiente de Poisson de la matriz	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
Coefficiente de roce	1.00	1.00	0.72	0.72	0.72	0.72	0.72	0.72	0.72
η	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
Ordenada de curva experimental P_x [N]	56	98.345	230	230	230	230	230	230	230
Abcisa de curva experimental Δx [mm]	0.0183	0.04	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Tensión de confinamiento [N/mm^2]	0.00	0.00	0.00	-4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Longitud inmersa en matriz [mm]	25.00	25.00	15.54	15.47	15.00	15.00	15.65	15.65	15.74
Maximo Slip aplicado [mm]	5	5	6	6	10	10	10	10	10
Discretización de fibra [elementos diferenciales]	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Radios de curvatura [mm]	0.0	0.0	2.5-2.0-1.5	2.5	0.0	0.0	2.0	2.0	1.0

Tabla 1: Parámetros introducidos en el modelo para simulaciones efectuadas

7 CONCLUSIONES

Modelo de fricción por efecto lateral, ajusta satisfactoriamente. El proceso de propagación de la discontinuidad entre fibra y matriz es despreciable frente al proceso de deslizamiento de la fibra, por lo cual se podría prescindir del análisis del proceso de propagación de la discontinuidad entre fibra y matriz.

Entre las componentes de resistencia al arrancamiento de fibras, las de mayor relevancia son las relacionadas con la curvatura de la fibra.

Es de gran importancia la geometría de la fibra durante el deslizamiento de la misma, siendo el parámetro más relevante la el radio de curvatura. Una vez iniciado el proceso de deslizamiento, no se conoce la geometría real de la cavidad donde se aloja la fibra debido a las deformaciones que puede sufrir la matriz, entonces se podría utilizar el radio de curvatura como parámetro para calibración del modelo.

Basándose en el caso de fibras con ganchos, se observa que las componentes consideradas de la carga de extracción de fibra, no son suficientes para reproducir el comportamiento cuando el gancho abandona completamente su zona inicial, pasando a una zona de mucho menor curvatura o zona recta.

Se debe estudiar las deformaciones que puede sufrir la cavidad de la matriz donde se aloja la fibra, para definir la geometría de esta última y poder estimar los cambios de curvatura con mayor precisión.

En fibras lisas el aumento de esbeltez incrementa la resistencia al arrancamiento. En fibras con ganchos, es necesario incrementar los radios de curvatura, lo cual es factible por tener diámetros menores de fibra debido al aumento de esbeltez, para incrementar la resistencia al arrancamiento.

Debe estudiarse en mayor profundidad el efecto del estado multiaxial y su influencia en el efecto misfit.

Traducir el modelo presentado que es un modelo discreto de una fibra a un modelo constitutivo posible de ser implementado dentro de la teoría de mezclas y poder aplicarlo en la resolución de sólidos continuos formados por materiales compuestos, en particular hormigón con fibras de acero.

REFERENCIAS

- Chanvillar Giles. *Modelos the pullout of wire-draw steel fibers*. Cement and Concrete Research 29 (1999) 1027-1037
- Cunha Victor M.C.F., Sena-Cruz José M. y Barros Joaquim A.O. *Impact of the fibre manufacturing quality on the fibre pullout performance*. *Fibre Reinforcent Concrete: Design and Applications*, RILEM (2008) 83-93
- Cunha Victor M.C.F., Sena-Cruz José M. y Barros Joaquim A.O. *Pullout behaviour of hooked-end steel fibres in self-compacting concrete*, (2007)
- Naaman Antoine E., Member, ASCE, Namur George G., Alwan Jamil M. y Najm Husam S. *Fiber pullout and bond slip. I: Analytical Study*. Journal of Structural Engineering, Vol. 117, No. 9, September 1991. ASCE, ISSN 0733-9445/91/0009-2769
- Naaman Antoine E., Member, ASCE, Namur George G., Alwan Jamil M. y Najm Husam S. *Fiber pullout and bond slip. II: Experimental Validation*. Journal of Structural Engineering, Vol. 117, No. 9, September 1991. ASCE, ISSN 0733-9445/91/0009-2791
- Naaman Antoine E., Bentur A., Wu S.T., Banthia N., Baggott R., Hansen W., Katz A., Leung C.K.Y., Li V.C., Mobasher B., Robertson R. Soroushian P., Stang H., Taerwe L.R., *Fiber-matrix interfaces*. High Performance Fiber Reinforced Cement Composite (HPFRCC2) RILEM (1996) 149-192
- Pinchin D.J. y Tabor D. *Interfacial contact pressure and frictional stress transfer in steel fiber*. RILEM Symp. on Testing and Test Methods of Fibre Cemenet Composites (1978) 337-344
- Sujivorakul C. y Naaman Antoine E. *Modeling bond components of deformed steel fibers in FRC composites*. High Performance Fiber Reinforced Cement Composite (HPFRCC4), RILEM (2003) 35-48