

MODELO PARA MATERIALES GRANULARES GRUESOS EN ESTADO SUELTO

Adriana Pernich^a, Fernando G. Flores^{b1}

^a*Departamento Construcciones, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue, Buenos Aires 1400, 3800 Neuquén, Argentina, apernich@uncoma.edu.ar, <http://www.uncoma.edu.ar>*

^b*Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Velez Sarsfield 1601, 5000 Córdoba, Argentina, fflores@efn.uncor.edu, <http://www.uncor.edu.ar>*

Resumen. Se presenta un modelo constitutivo tangente en el que se considera que el material es homogéneo e isótropo y las deformaciones pueden variar desde pequeñas a grandes. El tensor incremento de deformación se descompone en forma aditiva en una parte elástica y otra plástica para modelar el material dentro de la mecánica de los medios continuos con una formulación Lagrangiana actualizada. El comportamiento elástico puede ser lineal o no lineal y las deformaciones plásticas serán tanto volumétricas como de distorsión. La superficie de fluencia está compuesta por una parte fija con una regla de flujo no asociada y una parte móvil que considera endurecimiento - ablandamiento por deformación plástica volumétrica y tiene una regla de flujo asociada. Este modelo ha sido planteado para representar el comportamiento de materiales granulares secos de grano grueso en estado suelto, teniendo por ello baja densidad. Se considera además que los granos no se deforman ni se rompen y que el material presenta un comportamiento compresible y puramente friccional. Este modelo tiene como objetivo final simular el llenado y vaciado de silos y tolvas suponiendo que pueden asimilarse a estados axilsimétricos o de deformación plana. Aquí se presentan la simulación de ensayos triaxiales (el rango de bajas a medias presiones) y resultados preliminares de llenado y vaciado de silos.

Palabras clave: relación constitutiva, material granular, elastoplasticidad, elementos finitos, silos

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos para materiales granulares no cohesivos se han desarrollado principalmente dentro de la mecánica de suelos. Estos materiales están compuestos al menos por dos fases una de ellas sólida y la otra es un fluido (líquido o gaseoso). En general se considera que las partículas no se deforman ni se rompen. Cuando el material granular se deforma, ocurren cambios de volumen significativos causados por el cambio de las posiciones relativas de los granos y a la expulsión del fluido contenido en los espacios entre las partículas.

La historia de la formación de un depósito de material granular en general se refleja en la estructura que forman las partículas. Esta estructura controla la respuesta del material al ser sometido a nuevos estados de carga. Es de esperar que el arreglo de partículas dependa tanto de la tensión actual como de la historia de tensiones por la cual el material llegó a su estado actual.

Distintos investigadores han incorporado en los modelos aspectos importantes que caracterizan el comportamiento macroscópico de los materiales granulares como: compresibilidad volumétrica, existencia de estados críticos, cambios en la permeabilidad y densidad del material granular por acción de la presión, la dependencia de la resistencia al corte de la tensión media y el fenómeno de dilatancia entre otras. Los modelos se basan principalmente en los resultados de ensayos triaxiales. Entre la bibliografía donde pueden encontrarse algunos de estos modelos caben citarse [Chen and Han \(1988\)](#), [Desai and Siriwardane \(1984\)](#), [Wood \(1991\)](#), [Schofield and Wroth \(1968\)](#) y [Chen and Baladi \(1985\)](#) entre otros.

Una recopilación de modelos constitutivos que se han desarrollado para diferentes suelos dentro de la mecánica de suelos es presentada por [Wroth and Houslyby \(1985\)](#) junto con algunas de sus aplicaciones.

2. CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES GRANULARES

Para el modelo constitutivo que se presenta se tuvieron en cuenta las siguientes condiciones: a) que represente el comportamiento de materiales de grano grueso (elevada permeabilidad al aire) considerando que los granos no se deforman ni se rompen, b) las propiedades resistentes son función de la presión y c) que contenga el menor número de parámetros posible y que estos se puedan encontrar a partir de datos experimentales. Dado que el objetivo es simular el llenado y vaciado de tolvas y silos se considera que el material se encuentra seco por lo cual tensión media efectiva coincide con la presión total y no se consideran efectos reológicos.

Es de esperar que durante la etapa de llenado las deformaciones sean pequeñas y durante la etapa de vaciado de pequeñas a grandes y dependerán del tipo de flujo que se produzca. El peso propio del material y a la interacción friccional con las paredes del depósito serán las acciones que produzcan el estado tensional en el material granular.

3. MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO ADOPTADO PARA MATERIAL GRANULAR

Las constantes del material y las variables de estado del modelo serán las que definan el estado real del material cuando es sometido a deformación. Ambos grupos de parámetros aparecen en las ecuaciones a resolver y están relacionados entre sí. Al realizar el análisis de un problema es conveniente utilizar cantidades derivadas de los ensayos triaxiales como la tensión media

$p = 1/3(\sigma'_1 + 2\sigma'_3)$ y la tensión desviadora $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ definidas por Roscoe Wood (1991) y las correspondientes variables de deformación volumétrica $\varepsilon_p = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$ y deformación de corte $\varepsilon_q = 2/3(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$. Estas variables permiten calcular el trabajo como $dW = pd\varepsilon_p + qd\varepsilon_q$.

El tensor incremento de deformación será descompuesto de forma aditiva en una parte elástica y otra plástica. Se considerará al material como compresible y puramente friccional. Se lo modelará dentro de la mecánica de los medios continuos como un sólido deformable adoptando una formulación Lagrangeana actualizada. El modelo constitutivo tangente considerará que el comportamiento es elástico no lineal, y las deformaciones plásticas podrán ser tanto volumétricas como de distorsión. Se adopta una superficie de fluencia compuesta por una parte fija con una regla de flujo no asociada y una parte móvil que considera endurecimiento - ablandamiento por deformación plástica volumétrica y que tiene una regla de flujo asociada.

El modelo con el cual se trabaja es una aproximación al comportamiento de los materiales granulares gruesos almacenados a granel ha sido implementado en el programa de elementos finitos desarrollado por Flores (1999).

3.1. Ley elástica

Las teorías sobre las propiedades elásticas tienen como base la teoría de contacto Hertziano. A partir de esta teoría, se espera que el módulo volumétrico de un ensamble de partículas angulares sea proporcional a la raíz cuadrada de la presión. Puede esperarse que el módulo de corte también sea una ley de potencia de la presión.

Se considera que el material granular es homogéneo e isótropo. Las propiedades en el rango elástico podrán ser representadas por un modelo elástico no lineal donde el módulo tangente sigue una ley de potencia y es función de la presión y una relación de Poisson constante como propone Lade (1977) que adopta la propuesta de Duncan and Chang (1970) basada en el trabajo de Jambu (1963). Los módulos volumétrico y de corte se calculan a partir del módulo de Young y del coeficiente de Poisson utilizando las expresiones de la teoría de la elasticidad clásica.

El módulo tangente tiene la siguiente expresión:

$$E(p) = k_u p_a \left(\frac{p}{p_a} \right)^n \quad (1)$$

donde:

- p : es la presión
- k_u y n : son parámetros de caracterización del material, que se obtienen a partir de la curva de descarga recarga de un ensayo triaxial de compresión isótropa
- p_a : es la presión de referencia, usualmente la presión atmosférica

3.1.1. Forma algorítmica

La forma algorítmica de la expresión (1) se escribe

$$E(p_m) = k_u p_a \left(\frac{p_m}{p_a} \right)^n \quad (2)$$

donde:

- p_m : es la presión promedio en el elemento en el paso n

Definido el módulo de Young y siendo el coeficiente de Poisson constante, los módulos de compresión volumétrica K_n y transversal G_n , válidos para el elemento se calculan:

$$\begin{aligned}
 K_{(p_m)} &= K_n = \frac{E(p_m)}{3(1-2\nu)} \\
 G_{(p_m)} &= G_n = \frac{E(p_m)}{2(1+\nu)}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

3.2. Plasticidad

3.2.1. Superficie de fluencia

La superficie de fluencia a considerar está compuesta por dos superficies f_1 y f_2 que se intersectan. Entre ambas forman una superficie que se aproxima a una gota con el ápice en el origen del espacio de tensiones. La primera superficie, f_1 , permanece fija en el espacio de tensiones y corresponde al modelo de Drucker - Prager para tener en cuenta la fluencia por corte siendo una aproximación al criterio de falla de Mohr Coulomb. La segunda parte de la superficie de fluencia, f_2 , corresponde al modelo Cam Clay modificado para considerar la fluencia por consolidación. Esta superficie se expande en el espacio de tensiones cuando el material endurece por consolidación y se contrae si ablanda por expansión, representando un comportamiento elastoplástico con endurecimiento isótropo. La intersección de ambas superficies es una aproximación al lugar geométrico de los estados críticos para un dado volumen específico [Chen \(1980\)](#).

3.2.2. Superficie potencial plástica. Regla de flujo

La superficie de fluencia f_1 tiene una regla de flujo que sólo permite deformaciones de distorsión a volumen constante ($\dot{\Delta}^P = 0$), en concordancia con el modelo de estado crítico. Integrando la regla de flujo se obtiene que el potencial plástico es un cilindro en el espacio de tensiones principales, cuyo radio corresponde al máximo valor admisible de la variable q para el correspondiente valor de p , cuya expresión es:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{q}{\sqrt{3}} - R(p) \\
 R(p) &= \alpha p + K_p
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

La superficie de fluencia f_2 tiene una regla de flujo asociada, de modo que se producirán tanto deformaciones plásticas volumétricas como de distorsión en la proporción que fije el vector normal a la superficie potencial plástica en el espacio de tensiones. Entonces:

$$g_2 = f_2 = q^2 - M^2 p(p_o - p) = 0
 \tag{5}$$

3.2.3. Ley de endurecimiento - ablandamiento

La expansión o contracción de la superficie de fluencia, f_2 , está controlada por la deformación volumétrica plástica y corresponde a una ley de endurecimiento isótropo. En su trabajo [Chen \(1980\)](#) enfatiza que el utilizar un cap da en forma apropiada el comportamiento en un ciclo de carga descarga isotrópica eliminando la necesidad de utilizar diferentes módulos volumétricos para carga y descarga y además permite controlar la dilatación plástica.

Cuando el material sufre una contracción volumétrica endurece por deformación provocando que el cap se expanda. Esta es una característica de los modelos desarrollados por Roscoe,

Schofield y Wroth y ha sido presentado en detalle por Wood (1991) y es adoptado por Chen (1980). Esta ley permite que el material se ablande por deformación volumétrica cuando sufre una expansión volumétrica produciéndose una disminución del tamaño del cap. En ambos casos el volumen específico plástico es el parámetro que se utiliza para determinar el tamaño de las sucesivas superficies geoméricamente similares.

La ley de endurecimiento - ablandamiento es de tipo empírica y se obtiene ajustando un polinomio lineal o cuadrático a la curva de compresibilidad volumétrica de un ensayo triaxial de compresión isótropa. Para ello se considera que los cambios volumétricos plásticos son mucho mayores que los cambios volumétricos elásticos. Por considerar que las partículas son rígidas e indeformables la variación volumétrica responde al acomodamiento de los granos. Se considera que estas hipótesis son razonablemente aproximadas ya que en los silos no se producen niveles elevados de tensiones.

3.3. Modelo de Drucker - Prager (f_1, g_1)

La función de fluencia:

$$f_{DP} = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - K_p = 0 \quad (6)$$

donde:

$J_2 = \frac{1}{2} S : S$: es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones con
($S_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$) y ($p = \frac{\sigma_{ii}}{3}$)

$I_1 = \sigma_{ii}$: es el primer invariante del tensor de tensiones

α y K_p : son parámetros que pueden obtenerse en función de los parámetros c (cohesión) y ϕ (ángulo de fricción interna) del criterio de Mohr - Coulomb

Si se hace coincidir las dos superficies a lo largo del meridiano de compresión (el cono de Drucker Prager es circunscrito a la pirámide hexagonal de Mohr Coulomb) los coeficientes α y K_p se calculan con las siguientes expresiones:

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (7)$$

$$K_p = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}$$

Para unificar los invariantes que se van a utilizar para expresar a f_1 y f_2 se adoptaron los siguientes invariantes:

- La tensión desviadora generalizada q

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt{3} \sqrt{J_2} \quad (8)$$

- La presión p

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{I_1}{3} \quad (9)$$

Utilizando éstos invariantes, la superficie de Drucker Prager puede escribirse como:

$$f_1 = \frac{q}{\sqrt{3}} - 3\alpha p - K_p = 0 \quad (10)$$

manteniendo las definiciones de las constantes del material dadas en (7).

La regla de flujo correspondiente es:

$$\dot{\Delta}^p = 0 \quad (11)$$

lo que significa que si el estado de tensiones yace sobre la superficie f_1 el incremento de las deformaciones plásticas de distorsión estará dado por:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma}_1 \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\mathbf{S}}{q} \quad (12)$$

que conduce a una superficie potencial plástico, que es un cilindro en el espacio de tensiones:

$$g_1 = \frac{q}{\sqrt{3}} - R(p) \quad (13)$$

cuyo radio está dado por:

$$R(p) = \alpha p + K_p \quad (14)$$

El parámetro $\dot{\gamma}_1$ es el parámetro de consistencia plástico correspondiente.

Se define la deformación plástica efectiva con:

$$\frac{\dot{\bar{e}}^p}{\bar{e}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{e}}^p : \dot{\mathbf{e}}^p} \quad (15)$$

3.4. Modelo Cam Clay modificado (f_2, g_2, p_o)

La función de fluencia:

$$f_2 = q^2 - M^2 p(p_o - p) = 0 \quad (16)$$

donde:

M : parámetro que determina la forma del elipsoide (cociente entre los ejes principales del elipsoide)

p_o : parámetro que fija el tamaño del elipsoide, y es función de la deformación volumétrica

Se supone que la regla de flujo es asociada, por lo cual el potencial plástico g_2 :

$$g_2 = f_2 \quad (17)$$

La regla de flujo se expresa como:

$$\dot{\Delta}^p = \dot{\gamma}_2 \frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}_2 M^2 (2p - p_o) \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (18)$$

y

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma}_2 \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}_2 2q \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{q} \quad (19)$$

siendo $\dot{\gamma}_2$ el parámetro de consistencia plástico correspondiente.

La ley de endurecimiento isótropo empírica que se obtiene ajustando un polinomio cuadrático a la curva experimental que se obtiene en un ensayo de compresión isótropa, y tiene la forma:

$$p_o(\Delta^p) = a_0 + a_1 \Delta^p + a_3 (\Delta^p)^2 \quad (20)$$

4. ALGORITMO DE INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS

A continuación se presentan los algoritmos de integración y como se determina cual de ellos se debe utilizar.

4.1. Modelo de Drucker - Prager

Dados los invariantes del estado de tensiones de prueba (p^*, q^*) se valúa f_1 . Si:

$$f_1^* = \frac{q^*}{\sqrt{3}} - 3\alpha p^* - K_p > 0 \quad (21)$$

por condición de consistencia se deben encontrar los valores de la variables de estado para que:

$$f_1^{n+1} = \frac{q_{n+1}}{\sqrt{3}} - 3\alpha p_{n+1} - K_p = 0 \quad (22)$$

Por la regla de flujo se tiene que:

$$\dot{\Delta}^p = 0 \quad (23)$$

y

$$\dot{e}^p = \dot{\gamma} \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\mathbf{S}}{q} \quad (24)$$

asumiendo que la corrección está dada por

$$p_{n+1} = p^* - K \dot{\Delta}^p \quad (25)$$

pero por la regla de flujo (23) queda que:

$$p_{n+1} = p^* \quad (26)$$

Asumiendo que la corrección para la parte desviadora está dada por:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}^* - 2G \dot{e}^p \quad (27)$$

reemplazando \dot{e}^p por (24) en la expresión anterior, se obtienen las componentes del tensor desviador de tensiones \mathbf{S}_{n+1}

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}^* \left(1 - 2G \dot{\gamma} \frac{3}{2\sqrt{3}q^*} \right) \quad (28)$$

Como

$$q^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{S}^* : \mathbf{S}^*} \quad (29)$$

$$q_{n+1} = \left(1 - 2G \dot{\gamma} \frac{3}{2\sqrt{3}q^*} \right) q^* \quad (30)$$

reemplazando q_{n+1} de (30) en (22):

$$\left(1 - 2G \dot{\gamma} \frac{3}{2\sqrt{3}q^*} \right) \frac{q^*}{\sqrt{3}} - 3\alpha p^* - K_p = 0 \quad (31)$$

despejando el parámetro de consistencia

$$\dot{\gamma} = \frac{2\sqrt{3}q^*}{3 \ 2G} \left(1 - \frac{(3\alpha p^* + K_p) \sqrt{3}}{q^*} \right) \quad (32)$$

Reemplazando $\dot{\gamma}$ en las expresiones anteriores, se tienen:

- el incremento de las deformaciones plásticas de distorsión

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \frac{\mathbf{S}^*}{2G} \left(1 - \frac{(3\alpha p^* + K_p) \sqrt{3}}{q^*} \right) \quad (33)$$

- la deformación plástica efectiva

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{2}{3} \frac{1}{2G} \left(1 - \frac{(3\alpha p^* + K_p) \sqrt{3}}{q^*} \right) \quad (34)$$

- el tensor desviador de tensiones y el invariante q_{n+1} , en el paso $n + 1$

$$S_{n+1} = S^* \left(\frac{(3\alpha p^* + K_p) \sqrt{3}}{q^*} \right) \quad (35)$$

$$q_{n+1} = \sqrt{3} (3\alpha p_{n+1} + K_p) \quad (36)$$

- el incremento de las deformaciones plásticas volumétricas y la presión en el paso $n + 1$, por (26), son:

$$\dot{\Delta}^p = 0 \quad p_{n+1} = p^* \quad (37)$$

4.2. Modelo Cam Clay

Dados los invariantes del estado de tensiones de prueba (p^*, q^*) , y suponiendo $p_o^* = p_{on}$ es el valor del parámetro que fija el tamaño del elipsoide en el paso convergido n se valúa f_2 . Si:

$$f_{2n+1}^* = (q_{n+1}^*)^2 - M^2 p_{n+1}^* (p_{on} - p_{n+1}^*) > 0 \quad (38)$$

por condición de consistencia se deben encontrar los valores de la variables de estado para que:

$$f_2^{n+1} = (q_{n+1})^2 - M^2 p_{n+1} (p_{on+1} - p_{n+1}) = 0 \quad (39)$$

Debido a que f_2 es una función no lineal de los invariantes p y q , no es posible encontrar una solución cerrada que cumpla con la condición de consistencia (39). Para encontrar la solución se ha implementado un procedimiento de dos pasos:

1. Encontrar el estado correspondiente a la intersección entre la trayectoria elástica de prueba que conecta el estado n y el estado de prueba n_{n+1}^* y la superficie de fluencia del paso n . Este punto intersección se denomina *int* y es encontrado toda vez que el paso anterior haya sido elástico.
2. Integrar el paso plástico.

4.2.1. Estado intersección

Se conoce el estado tensional al final del paso previo convergido, n , el cual está caracterizado por las variables de estado q_n, p_n, p_{on} y por cumplirse que $f_{2n} \leq 0$. El estado de prueba para el paso $n + 1^*$ es caracterizado por $q_{n+1}^*, p_{n+1}^*, p_{on}^*$ pero éste no cumple la condición de fluencia por ser ($f_{2n+1}^* > 0$).

Para encontrar el estado intersección, int , entre la trayectoria elástica que lleva desde el estado n al estado de prueba $n + 1^*$ y la superficie de fluencia definida en el paso n se deben encontrar los valores de p y q en el punto int . Para ello se considera, que:

$$p_{int} = p_n + \beta \Delta p \quad \text{con} \quad \Delta p = p_{n+1}^* - p_n \quad (40)$$

$$q_{int} = q_n + \beta \Delta q \quad \text{con} \quad \Delta q = q_{n+1}^* - q_n \quad (41)$$

tal que en el punto intersección, int , se cumple que:

$$f_2(p_{int}, q_{int}) = f_{int} = 0 \quad (42)$$

Para obtener una forma linealizada de f_2 se desarrolla en serie de Taylor a partir del estado n :

$$\begin{aligned} f_2(p_{int}, q_{int}) &= (q_n + \beta \Delta q)^2 - M^2 (p_n + \beta \Delta p) [p_{on} - (p_n + \beta \Delta p)] \\ &= \beta^2 [(\Delta q)^2 + M^2 (\Delta p)^2] + \\ &\quad \beta [2q_n \Delta q - M^2 \Delta p (p_{on} - 2p_n)] + \\ &\quad q_n^2 - M^2 p_n (p_{on} - p_n) \end{aligned} \quad (43)$$

Donde, el parámetro β tiene las siguientes características:

$$\beta \in [0, 1]$$

$$\beta = 0 \quad : \text{ en el estado } n$$

$$\beta \in (0, 1] \quad : \text{ en el estado } int$$

Igualando a cero la expresión (43) y denominando

$$C_{\Delta 2} = (\Delta q)^2 + M^2 (\Delta p)^2 \quad (44)$$

$$C_{\Delta} = 2q_n \Delta q - M^2 \Delta p (p_{on} - 2p_n)$$

$$C = q_n^2 - M^2 p_n (p_{on} - p_n) = f_{2n}$$

se obtienen para β los siguientes valores si $((C_{\Delta})^2 - 4C_{\Delta 2}C) > 0$:

$$\beta_1 = \frac{-C_{\Delta} + \sqrt{(C_{\Delta})^2 - 4C_{\Delta 2}C}}{2C_{\Delta 2}} \quad \beta_2 = \frac{-C_{\Delta} - \sqrt{(C_{\Delta})^2 - 4C_{\Delta 2}C}}{2C_{\Delta 2}} \quad (45)$$

si $((C_{\Delta})^2 - 4C_{\Delta 2}C) = 0$ entonces:

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{-C_{\Delta}}{2C_{\Delta 2}} \quad (46)$$

(no es posible que $((C_{\Delta})^2 - 4C_{\Delta 2}C) < 0$). El valor β que corresponde utilizar para obtener el valor de las variables en el estado intersección es el que cumple la condición $0 \leq \beta \leq 1$ cuando

$\beta_1 \neq \beta_2$. Las actualizaciones de los invariantes y del tensor de tensiones desviador entonces pueden calcularse con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} p_{int} &= p_n + \beta \Delta p \\ q_{int} &= q_n + \beta \Delta q \end{aligned} \quad (47)$$

y la actualización (aproximada) del tensor de tensiones desviador:

$$\mathbf{S}_{int} = \mathbf{S}_n + \beta (\mathbf{S}_{n+1}^* - \mathbf{S}_n) \quad (48)$$

Los incrementos de deformación tendrán una parte elástica entre los estados n e int y una parte no elástica entre int y $n + 1$. La parte no elástica del incremento total de deformaciones se puede aproximar haciendo:

$$\delta \Delta_{ne} = \delta \Delta (1 - \beta) \quad (49)$$

para la parte de deformación volumétrica incremental, y para el incremento no elástico del tensor desviador de deformaciones:

$$\delta \mathbf{e}_{ne} = \delta \mathbf{e} (1 - \beta) \quad (50)$$

4.2.2. Integración del paso plástico

Se utiliza una aproximación linealizada cuando en el estado de prueba se tiene:

$$f_{n+1}^* = (q_{n+1}^*)^2 - M^2 p_{n+1}^* (p_{on} - p_{n+1}^*) > 0 \quad (51)$$

y se busca encontrar el estado caracterizado por $(p_{n+1}, q_{n+1}, p_{on+1})$ para el cual $f_{n+1} = 0$.

Para utilizar un algoritmo de punto medio se escribe la regla de flujo en función del estado de prueba $n + 1^*$ y del estado intersección int . La regla de punto medio para todas las componentes del tensor de deformaciones plásticas es:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{int} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1}^* \right] \quad (52)$$

Particularizando para la regla de flujo correspondiente al potencial plástico g_2 , el incremento de deformación volumétrica plástica es:

$$\dot{\Delta}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial p} = -\dot{\gamma} M^2 (p_o - 2p) = \varepsilon_{ii}^p \quad (53)$$

la regla de punto medio entonces se escribe:

$$\dot{\Delta}^p = \dot{\gamma} [(-M^2) (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*)] \quad (54)$$

Las componentes del tensor desviador de deformaciones plásticas es:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma} 2q \frac{\mathbf{S}_3}{q} \quad (55)$$

la regla de punto medio entonces se escribe:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma} \left[\left(\frac{3}{2} \right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}_{n+1}^*) \right] \quad (56)$$

La deformación plástica efectiva es:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\mathbf{e} : \mathbf{e}} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial q} = \dot{\gamma} 2q \quad (57)$$

y la correspondiente forma de la regla de punto medio

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} (q_{int} + q_{n+1}^*) \quad (58)$$

El incremento del tensor de deformaciones plásticas:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \left\{ [(-M^2) (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*)] \frac{1}{3} \mathbf{1} + \left(\frac{3}{2}\right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}_{n+1}^*) \right\} \quad (59)$$

La condición de consistencia entonces:

$$\begin{aligned} \dot{f}_2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{int} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1}^* \right] \Delta \boldsymbol{\sigma} + \\ &\quad \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} \right)_{int} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} \right)_{n+1}^* \right] \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p \\ &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

la derivada de la función de fluencia respecto de las tensiones es:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -M^2 (p_o - 2p) \frac{1}{3} \delta_{ij} + 2q \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{q} \quad (61)$$

La ley de endurecimiento isótropa empírica es:

$$p_o(\Delta) = a_1 + a_2 \Delta^p + a_3 (\Delta^p)^2 \quad (62)$$

La derivada de la función de fluencia respecto de las deformaciones plásticas:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} = -M^2 p (a_2 + 2a_3 \Delta^p) \delta_{ij} \quad (63)$$

Reemplazando en (60), las expresiones (61) y (63) la condición de consistencia queda:

$$\begin{aligned} \dot{f}_2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{int} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1}^* \right] \Delta p + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{int} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1}^* \right] \Delta \mathbf{S} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_o} \frac{\partial p_o}{\partial \Delta^p} \frac{\partial \Delta^p}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} \right)_{int} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_o} \frac{\partial p_o}{\partial \Delta^p} \frac{\partial \Delta^p}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} \right)_{n+1}^* \right] \dot{\Delta}^p \end{aligned} \quad (64)$$

Se proceden a encontrar las expresiones de los incrementos: Δp , ΔS y $\dot{\Delta}^p$ en función de las variables de estado en el paso previo n y en el estado de prueba $n + 1$.

El incremento de la presión:

$$\begin{aligned}\Delta p &= p_{n+1}^j - p_{int} \\ &= p_{n+1}^* - K_n \dot{\gamma}_2 [(-M^2) (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*)] - p_{int}\end{aligned}\quad (65)$$

Si se considera que el estado plástico esta “congelado” y que la trayectoria que lleva del estado anterior n al estado de prueba $n + 1^*$ se supuso elástico, entonces teniendo en cuenta (49) se puede escribir:

$$p_{n+1}^* = p_{int} + K_n \delta \Delta_{ne} \quad (66)$$

reemplazando a ésta última en (65), en se obtiene:

$$\Delta p = K_n \delta \Delta_{ne} - K_n \dot{\gamma}_2 [(-M^2) (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*)] \quad (67)$$

El incremento de las componentes del tensor desviador de tensiones:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{S} &= \mathbf{S}_{n+1}^j - \mathbf{S}_{int} \\ &= \mathbf{S}_{n+1}^* - 2G_n \dot{\gamma}_2 \left[\left(\frac{3}{2} \right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}_{n+1}^*) \right] - \mathbf{S}_{int}\end{aligned}\quad (68)$$

haciendo las mismas consideraciones, se puede escribir

$$S_{n+1}^* = S_{int} + 2G_n \delta e_{ne} \quad (69)$$

reemplazando (69) en (68) se tiene:

$$\Delta \mathbf{S} = 2G_n \delta \mathbf{e}_{ne} - 2G_n \dot{\gamma}_2 \left[\left(\frac{3}{2} \right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}_{n+1}^*) \right] \quad (70)$$

Finalmente el incremento de la deformación volumétrica plástica:

$$\dot{\Delta}^p = \varepsilon_{ii}^p \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Delta^p}{\partial \varepsilon^p} = \delta_{ij} \quad (71)$$

Reemplazando las expresiones obtenidas para Δp , ΔS y $\dot{\Delta}^p$ y las derivadas de la función f_2 , la condición de consistencia queda expresada como:

$$\begin{aligned}\dot{f}_2 &= \frac{(-M^2)}{2} [(p_o - 2p)_{int} + (p_o - 2p)_{n+1}^*] \Delta p \frac{\delta_{ij}}{3} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(2q \frac{\mathbf{S} 3}{q 2} \right)_{int} + \left(2q \frac{\mathbf{S} 3}{q 2} \right)_{n+1}^* \right] \Delta \mathbf{S} + \\ &+ \frac{(-M^2)}{2} [(p(a_2 + 2a_3 \Delta^p))_{int} + (p(a_2 + 2a_3 \Delta^p))_{n+1}^*] \dot{\Delta}^p \delta_{ij}\end{aligned}\quad (72)$$

Por considerar “congelado” el estado plástico:

$$\Delta_{int}^p = \Delta_{n+1}^{p*} = \Delta_n^p \quad \text{y} \quad (p_o)_{int} = (p_o)_{n+1}^* = (p_o)_n \quad (73)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \dot{f}_2 &= [-M^2 (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*)] \{K_n \delta \Delta_{ne} - K_n \dot{\gamma}_2 [-M^2 (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*)]\} \\ &+ \frac{3}{2} (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}_{n+1}^*) \left\{ 2G_n \delta \mathbf{e}_{ne} - \dot{\gamma}_2 \frac{3}{2} 2G_n (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}_{n+1}^*) \right\} + \\ &+ \frac{3M^4}{2} (a_2 + 2a_3 \Delta_n^p) (p_{int} + p_{n+1}^*) \dot{\gamma}_2 (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (74)$$

Despejando de la expresión (74) el parámetro de consistencia $\dot{\gamma}_2$:

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{- \left[M^2 (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*) K_n \delta \Delta_{ne} + \frac{3}{2} (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}_{n+1}^*) 2G_n \delta \mathbf{e}_{ne} \right]}{K_n M^4 (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*)^2 - 2G_n \frac{3}{2} (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}_{n+1}^*)^2 + \frac{3M^4}{2} (a_2 + 2a_3 \Delta_n^p) (p_{int} + p_{n+1}^*) (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*)} \quad (75)$$

Encontrado el primer valor aproximado de $\dot{\gamma}_2 = \dot{\gamma}_2^j$, con $j = 0$, se procede a actualizar las variables:

$$\left(\dot{\Delta}^p \right)^j = \dot{\gamma}_2^j [(-M^2) (p_{on} - p_{int} - p_{n+1}^*)] \quad (76)$$

$$\left(\dot{\mathbf{e}}^p \right)^j = \dot{\gamma}_2^j \left[\left(\frac{3}{2} \right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}_{n+1}^*) \right] \quad (77)$$

$$\left(\dot{e}^p \right)^j = \dot{\gamma}_2^j (q_{int} + q_{n+1}^*) \quad (78)$$

$$(\Delta_{n+1}^p)^j = \Delta_n^p + \left(\dot{\Delta}^p \right)^j \quad (79)$$

$$(\mathbf{e}_{n+1}^p)^j = \mathbf{e}_n^p + \left(\dot{\mathbf{e}}^p \right)^j \quad (80)$$

$$(p_{n+1})^j = p_{n+1}^* - K_n \left(\dot{\Delta}^p \right)^j \quad (81)$$

$$(\mathbf{S}_{n+1})^j = \mathbf{S}_{n+1}^* - 2G_n \left(\dot{\mathbf{e}}^p \right)^j \quad (82)$$

$$(q_{n+1})^j = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(\mathbf{S}_{n+1})^j : (\mathbf{S}_{n+1})^j} \quad (83)$$

$$(p_o)_{n+1}^j = a_1 + a_2 (\Delta_{n+1}^p)^j + a_3 \left((\Delta_{n+1}^p)^j \right)^2 \quad (84)$$

Con las variables actualizadas, en primer aproximación, se procede a verificar si el estado encontrado verifica la función de fluencia f_2 :

$$(f_2)_{n+1}^j = \left((q_{n+1})^j \right)^2 - M^2 (p_{n+1})^j \left((p_o)_{n+1}^j - (p_{n+1})^j \right) \quad (85)$$

$$\left| (f_{2n+1})^j \right| < tol \quad (86)$$

$$tol = 0,01 \left| f_{2n+1}^* \right| \quad (87)$$

Si la condición no se cumple, puede mejorarse la solución (85) adicionando deformaciones plásticas con las siguientes consideraciones Ortiz and Simo (1986):

- las deformaciones totales permanecen fijas
- las deformaciones plásticas adicionales tienen la finalidad de relajar las tensiones

Con el fin de mejorar la solución dada por (85) se procede a desarrollar en serie de Taylor la expresión de la superficie de fluencia (16) en el entorno de la primera aproximación a la solución $(n+1)^{j=0}$. Incrementando la iteración

$$j = j + 1$$

entonces el nuevo estado j mejorado se busca que cumpla:

$$(f_{2n+1})^j = (f_{2n+1})^{j-1} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1}^{j-1} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)_{n+1}^{j-1} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 \quad (88)$$

las derivadas de la función de fluencia

$$\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = M^2(2p - p_o)\Delta p + 2q \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{q} \Delta \mathbf{S} \quad (89)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} = -M^2 p (a_2 + 2a_3 \Delta p_{n+1}^p) \Delta \left(\dot{\Delta}^p \right) \quad (90)$$

En este caso, los incrementos de Δp , ΔS , $\Delta \left(\dot{\Delta}^p \right)$ y $\Delta \left(\dot{\mathbf{e}}^p \right)$ entre la iteración j y $j - 1$ son:

$$\Delta p = \delta \dot{\gamma} K_n \left(M^2 \left((p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1} \right) \right) \quad (91)$$

$$\Delta \mathbf{S} = -\delta \dot{\gamma} 2G_n 3 (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1} \quad (92)$$

$$\Delta \left(\dot{\Delta}^p \right) = \delta \dot{\gamma} \left(-M^2 \left((p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1} \right) \right) \quad (93)$$

$$\Delta \left(\dot{\mathbf{e}}^p \right) = \delta \dot{\gamma} 3 (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1} \quad (94)$$

entonces se tiene que:

$$\Delta p = -K_n \Delta \left(\dot{\Delta}^p \right) \quad (95)$$

$$\Delta \mathbf{S} = -2G_n \Delta \left(\dot{\mathbf{e}}^p \right) \quad (96)$$

Reemplazando en

$$(f_{2\ n+1})^j = (f_{2\ n+1})^{j-1} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \sigma}\right)_{n+1}^{j-1} \Delta \sigma + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \epsilon^p}\right)_{n+1}^{j-1} \Delta \epsilon^p = 0 \quad (97)$$

las expresiones anteriores se obtiene para $\delta \dot{\gamma}$ la siguiente expresión :

$$\delta \dot{\gamma} = \frac{-(f_{2\ n+1})^{j-1}}{M^4 K_n ((p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1})^2 + 9 2G_n ((S_{n+1})^{j-1} : (S_{n+1})^{j-1}) + M^4 (p_{n+1})^{j-1} \left(a_2 + 2a_3 \left(\dot{\Delta}^p\right)^{j-1}\right) ((p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1})} \quad (98)$$

Conocido el valor de $\delta \dot{\gamma}$ se procede a una nueva actualización de las variables utilizando (94), (93) con las cuales se obtienen los valores para $(\Delta_{n+1}^p)^j$ y $(\dot{\epsilon}^p)^j$ y luego los valores para $(p_{n+1})^j$, $(S_{n+1})^j$ y $(q_{n+1})^j$. Con los valores de actualizados de los invariantes del tensor de tensiones se vuelve a verificar si se cumple la condición:

$$(f_{2\ n+1})^j = \left((q_{n+1})^j\right)^2 - M^2 (p_{n+1})^j \left((p_o)_{n+1}^j - (p_{n+1})^j\right) \quad (99)$$

$$\left|(f_{2\ n+1})^j\right| < tol \quad (100)$$

de no cumplirse se procede a una nueva corrección.

4.3. Algoritmo de selección de la superficie de fluencia activa

El criterio que se utiliza para integrar el paso plástico es el siguiente:

- Se calcula p_{cc} que es la abscisa de la intersección entre f_1 y f_2
- Si $f_1(p_{n+1}^*, q_{n+1}^*) < 0$ y $f_2(p_{n+1}^*, q_{n+1}^*) > 0$, se utiliza la función f_2
- Si $f_1(p_{n+1}^*, q_{n+1}^*) > 0$ y $f_2(p_{n+1}^*, q_{n+1}^*) > 0$ y $p_{n+1}^* > p_{cc}$, se utiliza la función f_2
- Si $f_1(p_{n+1}^*, q_{n+1}^*) > 0$ y $f_2(p_{n+1}^*, q_{n+1}^*) > 0$ y $p_{n+1}^* < p_{cc}$, se utiliza la función f_1

Se denota con p_{n+1}^* al valor de la presión de prueba en el paso $n + 1$ y con q_{n+1}^* a la tensión desviadora generalizada calculada con el tensor desviador de tensiones de prueba en el paso $n + 1$. De esta manera se evitan problemas en el punto de intersección. Se optó por mantener las superficie con intersección no suave, como una aproximación dada su mayor simpleza.

4.3.1. Calculo de la presión de referencia p_{cc}

Con el fin de encontrar la presión de referencia p_{cc} se procede a igualar los valores de q^2 del modelo de Drucker Prager y del modelo cam clay modificado. De la expresión (10):

$$q^2 = 3(3\alpha p + K_p)^2 \quad (101)$$

y de (16)

$$q^2 = M^2 p (p_o - p) \quad (102)$$

igualando (101) y(102):

$$3(3\alpha p + K_p)^2 - M^2 p(p_o - p) = 0 \quad (103)$$

la cual puede escribirse

$$Ap^2 + Bp + C = 0 \quad (104)$$

$$A = 27\alpha^2 + M^2 \quad (105)$$

$$B = 18\alpha K_p - M^2 p_o$$

$$C = 3K_p^2$$

Pueden presentarse los siguientes casos:

- Si $K_p = 0$ habrá siempre dos raíces para los estados de tensiones posibles, uno será $p_{cc} = 0$ y el que interesa:

$$p_{cc} = \frac{M^2 p_o}{27\alpha^2 + M^2} \quad (106)$$

- Si $K_p \neq 0$ pueden presentarse los siguientes casos:

- $B^2 - 4AC < 0$, no hay intersección. Lo cual significa que el elipsoide es muy pequeño y que el material debe endurecer por deformación para que el elipsoide aumente su tamaño y la intersección sea posible. En este caso, $f_1 < 0$ y $f_2 > 0$ por lo cual estará activa la función f_2 .
- $B^2 - 4AC = 0$, el elipsoide f_2 es tangente a la función f_1 y habrá una raíz doble:

$$p_{cc} = \frac{M^2 p_o - 18\alpha K_p}{2(27\alpha^2 + M^2)} \quad (107)$$

- $B^2 - 4AC > 0$, el elipsoide f_2 intersecta a f_1 para dos valores de presión, de los cuales solo interesa el mayor:

$$p_{cc} = \frac{M^2 p_o - 18\alpha K_p + \sqrt{-36\alpha K_p M^2 p_o + M^4 p_o^2 - 12K_p^2 M^2}}{2(27\alpha^2 + M^2)} \quad (108)$$

5. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS CONSTITUTIVOS

- Los parámetros que definen las características del material granular se determinan a partir de los datos de ensayos estándar de la mecánica de suelos.
- Para el módulo elástico tangente E_{ur} se ha utilizado el procedimiento dado por [Duncan and Chang \(1970\)](#). Los valores de la relación de Poisson utilizados son los propuestos por [Lade \(1977\)](#) debido a que no hay un procedimiento experimental adecuado para su determinación.

- Los valores del ángulo de fricción interna ϕ y de la cohesión c , se obtienen ajustando una recta a la envolvente de falla en el rango de tensiones bajo a medio. La envolvente de falla se obtiene como la tangente a los círculos de Mohr para las tensiones desviadoras máximas obtenidas en los ensayos con diferentes presiones de confinamiento y la misma relación de vacíos inicial.
- Para determinar el valor de la relación de tensiones correspondiente al estado crítico $M = q_{cs}/p_{cs}$ a partir de los ensayos de compresión triaxiales se debe construir el gráfico de $q = \sigma_1 - \sigma_3$ en función de $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$ para los valores últimos obtenidos para cada ensayo con distinto valor de σ_3 para la misma relación de vacíos inicial. A los valores obtenidos se le ajusta una recta cuya pendiente es el valor del parámetro M .
- Para determinar los coeficientes que definen la ley de endurecimiento, se ajusta un polinomio cuadrático a la curva de compresión normal en el rango de tensiones bajas a medias. Como resultado del ajuste se tienen los coeficientes a_1 , a_2 y a_3 .

Los valores de los ensayos triaxiales correspondientes a la arena del río Sacramento, publicados por [Lee and Seed \(1967\)](#) fueron utilizados para construir los gráficos y obtener los valores de los parámetros del modelo.

6. ESTADOS DEL MATERIAL GRANULAR DURANTE LA ETAPA DE VACIADO DEL SILO

Durante la etapa de vaciado de un silo o una tolva, el material que se encuentra almacenado cerca de la salida comienza a experimentar una expansión volumétrica que se propaga hacia arriba. La relación constitutiva permite que el material se ablande a causa de las deformaciones plásticas expansivas hasta que la condición impuesta por el ápice de la función de Drucker Prager es violada por el estado de tensiones del material. En este caso el material se ha expandido de modo que la relación de vacíos es mayor a la máxima inicial del material (justo en el momento en que el material ingresa al silo) lo cual significa que no hay contacto entre las partículas sólidas. A este estado en el que no hay contacto entre las partículas se lo denomina estado disgregado. Al haberse perdido el contacto entre los granos el material ha perdido su capacidad de transmitir fuerzas internas, estando los granos en caída libre por acción de la gravedad.

Desde el punto de vista algorítmico, cuando el estado del material en el punto de integración ha disgregado se procede a hacer que la contribución al vector de fuerzas internas sea nula. El vector de fuerzas externas y la matriz de masa concentrada del elemento no se alteran, lo cual somete al material a la acción de la gravedad estando los granos en caída libre.

Si en el próximo paso, el volumen del elemento se contrae y las partículas vuelven a tener contacto entre sí, el grano vuelve a transmitir fuerzas internas.

Durante la etapa transitoria, son de esperarse alternancias entre los estados en los cuales el material transmite fuerzas internas y en el que se encuentra en caída libre.

Cuando todos los nodos del elemento tienen sus coordenadas fuera del volumen del silo o tolva se cumple lo que se denomina la condición cinemática de salida del elemento. Cuando esto sucede, se eliminan las contribuciones del elemento al vector de fuerzas internas, al vector de fuerzas externas y a la matriz de masa globales del sistema.

El programa de elementos finitos se detiene cuando alguna de las siguientes condiciones se satisface:

- han salido todos los elementos de sólido granular
- se ha llegado al valor límite máximo dado al pseudo tiempo
- por distorsión excesiva de algún elemento dentro de la tolva o silo resulta un determinante Jacobiano con valor menor o igual a cero

7. CASOS DE APLICACIÓN

Se presentan los resultados de la simulación de un *ensayo triaxial de compresión convencional drenado* en arena suelta. Los valores de los parámetros constitutivos fueron deducidos a partir de los datos experimentales publicados por [Lee and Seed \(1967\)](#). Los valores de los parámetros utilizados para una relación de vacíos inicial del material $e_o = 0,87$ son: densidad $\rho = 1460 Kg/m^3$, el ángulo de fricción interna $\phi = 34^\circ$ y no tiene cohesión ($c = 0$), la relación de Poisson $\nu = 0,3$, el número módulo $k_{ur} = 960$, la presión de referencia $p_a = 100000 Pa$ el exponente $n = 0,57$ para el módulo elástico tangente y los parámetros para el modelo Cam Clay $M = 1,2496$ y $M = 1,36$, $a_1 = 77719$, $a_2 = 6,39 \cdot 10^7$ y $a_3 = 1,53 \cdot 10^8$. Por razones de simetría se simula un cuarto de la probeta considerando un estado axilsimétrico.

En la Figura [1] se muestra un esquema del modelo de la probeta cuyas dimensiones son $D = 3,55cm$ y $H = 8,64cm$ junto con un esquema de la historia de carga correspondiente al ensayo (presión de confinamiento p_c y presión desviadora p_d).

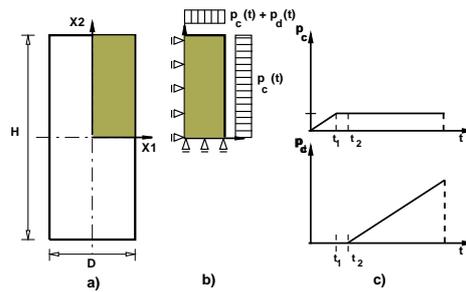


Figura 1: Esquema de una probeta cilíndrica y esquema de la historia de carga

En las Figuras [2] y [3] se muestra la comparación de los resultados de dos simulaciones correspondientes a los valores de la presión de confinamiento de $100 KPa$ y $200 KPa$ respectivamente. Para M se adoptaron dos valores uno obtenido a partir de los datos experimentales ($M = 1,2496$) y el valor aproximado con una expresión dada por [Wood \(1991\)](#) en función del ángulo de fricción interna ($M = 1,36$).

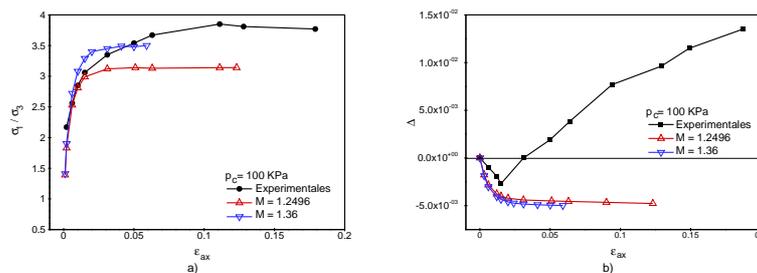


Figura 2: Comparación de los resultados de la simulación de un ensayo de compresión convencional drenado para $p_c = \sigma_3 = 100 KPa$

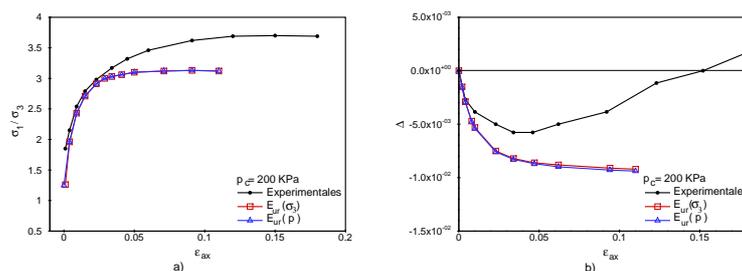


Figura 3: Comparación de los resultados de la simulación de un ensayo de compresión convencional drenado para $p_c = \sigma_3 = 200\text{ KPa}$

En las figuras puede observarse que el valor del coeficiente M tiene mayor influencia en el gráfico de la relación de tensiones en función de la deformación axial en especial para la menor presión de confinamiento, influencia que casi ha desaparecido para la mayor presión de confinamiento. En ambos casos el modelo no es capaz de capturar la expansión volumétrica que se produce al aumentar la presión desviadora debido a que no incorpora la influencia de la presión de confinamiento en las deformaciones de corte ni de la presión desviadora en la deformación volumétrica. Dado que el modelo será utilizado para simular el llenado y vaciado de tolvas y silos, donde los niveles de tensiones son bajos se considera que es posible que logre capturar los rasgos relevantes tanto del proceso de llenado como de vaciado.

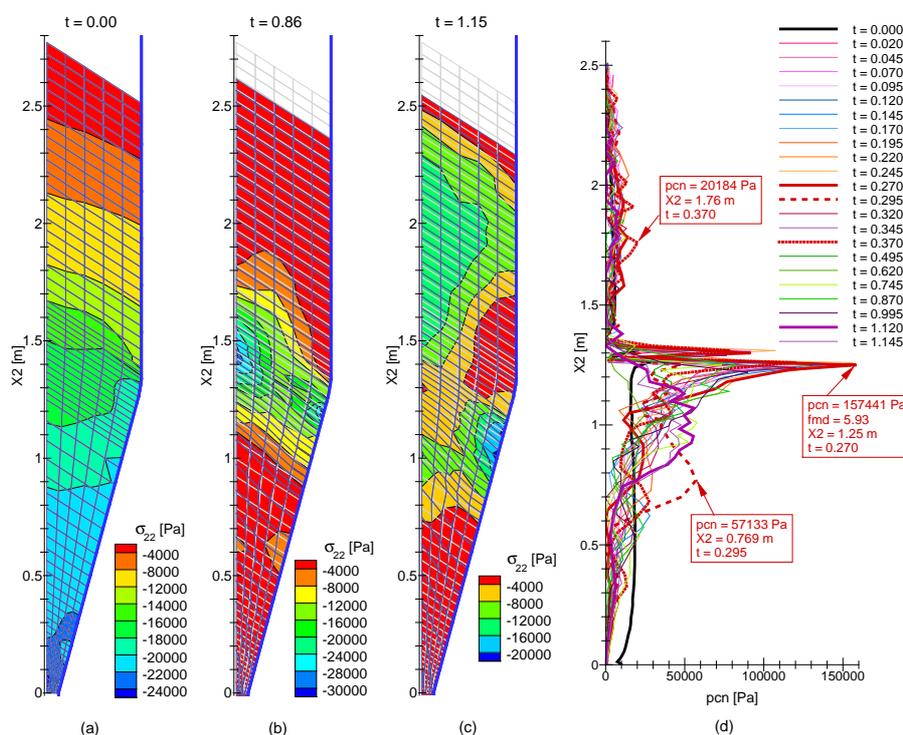


Figura 4: Silo simétrico de laboratorio. Distribuciones de la tensión vertical en el grano para: a) fin del llenado, b) $t = 0,86$ de iniciado el vaciado y c) $t = 1,15$ correspondiente al final de la simulación del vaciado. d) las presiones normales de contacto sobre la pared distintos tiempos

El modelo constitutivo descrito utilizando los valores de los parámetros de caracterización de la arena utilizados en la simulación de los ensayos triaxiales se utilizó para simular el llenado concéntrico de un silo de laboratorio de $2,80\text{ m}$ de altura total y $0,80\text{ m}$ de ancho con una tolva en

cuña cuya inclinación respecto de la horizontal es de 75° . Dada la geometría del silo se considera que el comportamiento del mismo puede representarse como un estado de deformación plana. Por ser el llenado concéntrico las capas de material tienen una inclinación igual al ángulo de reposo del material.

Los procesos de llenado progresivo y vaciado considerando condición de contacto mecánico con fricción entre el material granular y la pared son los descritos en Pernich and Flores (2008) para las tolvas. La simulación del vaciado concluye debido a la excesiva distorsión de un elemento en el cual el determinante Jacobiano tiene un valor menor que cero. En la Figura [??] se muestran las distribuciones de la tensión vertical solo en la mitad del silo, por razones de simetría, al finalizar el llenado ($t = 0,00$) y las correspondientes a los tiempos de vaciado $t = 0,86$ y $t = 1,15$ y la distribución de la presión normal de contacto sobre la pared para distintos tiempos desde el final del llenado hasta la finalización de la simulación del vaciado.

7.1. Conclusiones

El modelo constitutivo presentado permite obtener una aproximación tanto en la simulación de los ensayos de la mecánica de suelos como en el llenado y vaciado de silos capturando las principales características de los mismos y siendo los resultados bastante cercanos a los valores experimentales. Todos los parámetros de caracterización del material se obtienen a partir de los datos de ensayos rutinarios con procedimientos simples.

REFERENCIAS

- Chen W. Plasticity in soil mechanics and landslides. *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE - EM3*, 106:443–464, 1980.
- Chen W. and Baladi G. *Soilplasticity. Theory and Implementation*, volume-. Elsevier, 1985.
- Chen W. and Han D. *Plasticity for Structural Engineers*, volume-. Springer Verlag, 1988.
- Desai C. and Siriwardane H. *Constitutive Laws for Engineering Materials. With emphasis on geologic materials*, volume-. Prentice Hall, 1984.
- Duncan M. and Chang C. Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of the Soil Mechanics Foundation Division ASCE*, 96:1629–1653, 1970.
- Flores F. Simpack/delta. an explicit finite element program. *Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba*, 1:–, 1999.
- Jambu N. Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests. *European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering Proceedings*, 1:19–25, 1963.
- Lade P. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. *International Journal Solids and Structures*, 13:1019–1035, 1977.
- Lee K. and Seed H. Drained strength characteristics of sands. *Journal of the Soil Mechanics Foundation Division ASCE*, 93:117–141, 1967.
- Ortiz M. and Simo J. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal of Numerical Methods Engineering*, 23:353–366, 1986.
- Pernich A. and Flores F. Estado tensional en tolvas. modelo del llenado y vaciado. *Mecánica Computacional*, 27:681–696, 2008.
- Schofield A. and Wroth P. *Critical State Soil Mechanics*, volume-. Mc Graw Hill, 1968.
- Wood D. *Soil behaviour and critical state soil mechanics*, volume-. Cambridge University Press, 1991.
- Wroth C. and Houlsby G. Soil mechanics - property characterization and analysis procedures.

Proceedings of the Eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1:1–55, 1985.