

DETECCIÓN DEL CENTRO GEOMÉTRICO DE ANOMALÍAS 2D POR UN MÉTODO DE MÍNIMA DISPERSIÓN

^aCarlos Adolfo Calvo^a, Armando Luis Imhof^b, Sergio Valerio Jofré^a

^aDepartamento de Matemática, Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de San Juan, ccalvo@unsj.edu.ar, serjofre2004@yahoo.com.ar

^bInstituto Geofísico Sismológico Volponi, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Universidad Nacional de San Juan, aimhof@unsj.edu.ar

Palabras clave: Tomografía, Anomalía, Dispersión, Sistemas Lineales.

Resumen: Existen numerosos métodos de inversión por la técnica de tomografía en tiempo de viaje. En este trabajo se desarrolla un procedimiento original para la determinación del centro de anomalías, homogéneas e isotrópicas en un medio también homogéneo e isotrópico, haciendo uso de la teoría del rayo recto (*straight-ray theory*).

La alteración del tiempo de viaje de los rayos que atraviesan el medio base es un indicador de la presencia de una anomalía. Los emisores, receptores y la inclusión están ubicados en forma arbitraria en un dominio bi-dimensional; siendo datos las coordenadas de aquéllos y los tiempos de viaje (i.e. primeros arribos) de los rayos.

El método desarrollado se inicia con la determinación de la velocidad en el medio base y con ésta, se calculan las distancias relativas de los segmentos interiores a la anomalía. Para ubicar a estos segmentos se construye el funcional dispersión cuyo mínimo conduce a un sistema lineal de ecuaciones. La resolución de este sistema, bien condicionado, permite la determinación de las coordenadas de los puntos medios de los segmentos. Con ellos se encuentra el centro geométrico de la anomalía. Este resultado complementado con la inclinación del segmento de máxima longitud permite conocer la dirección en que se orientan las perforaciones (exploración). Además el método, con información adicional sobre la velocidad dentro de la anomalía, permite determinar la forma de la misma. La experimentación numérica muestra la validez del método en lo que respecta a la ubicación del centro de la anomalía resultando un esquema de gran robustez, implementación computacional sencilla y tiempos de cálculo menores a otros métodos.

1 INTRODUCCION

Mediante la técnica tomográfica (Sheriff and Geldard, 1995) se pretende determinar el centro geométrico de una inclusión (anomalía) inserta en un medio que la contiene. Se considera éste homogéneo e isótropo, por lo cual los rayos que se propagan son rectos (Santamarina, Klein and Fam, 2001). El tiempo de viaje (i.e. primeros arribos) de estos rayos resulta una característica de estas ondas y la alteración de este tiempo es un indicador de la presencia de una anomalía. De las características posibles de determinar: forma, tamaño, inclinación y ubicación del centro, la última es muy importante pues define la dirección en que se orientan las perforaciones (exploración). En el presente trabajo se propone un método de determinación del centro, basado en la mínima dispersión del funcional dispersión, resultando un esquema de sencilla implementación computacional, gran robustez y tiempos de cálculo menores a otros métodos.

2 FORMULACION DEL PROBLEMA

Dado un medio (1), con una inclusión (2) en su interior. Los tiempos de primeros arribos de los rayos originados en los emisores s_i y captados en los receptores r_j , son alterados por la presencia de la inclusión (ver figura 1a). Se pretende determinar el centro geométrico de la misma. La ubicación de los emisores y los receptores es arbitraria en una región plana (problema bidimensional). Tanto el medio base como la inclusión son homogéneos lo que supone propagación de rayos rectos con velocidades V_1 y V_2 respectivamente. La anomalía es de tal forma que un rayo corta su contorno en a lo sumo dos puntos, además hay al menos un rayo que no la intersecciona. Son datos: La ubicación de los emisores y los receptores, y los tiempos de viaje entre ellos. Como hipótesis adicional se supone $V_1 < V_2$

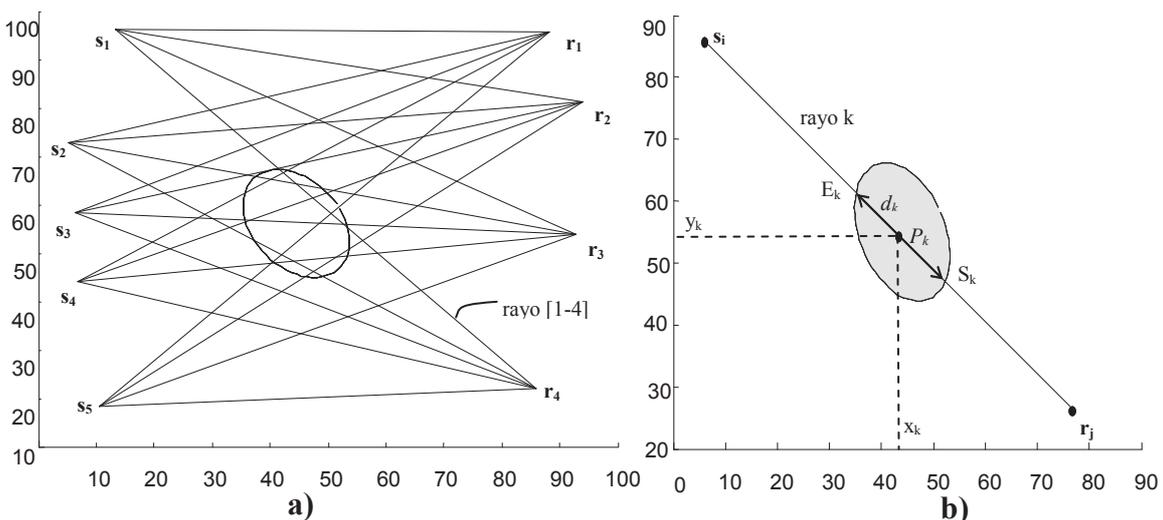


Figure 1: a) Emisores, receptores e inclusión b) Rayo k determina $E S$ y P_k

3 FORMULACIÓN DEL MÉTODO

Para cada par emisor s_i , receptor r_j corresponde un rayo $[i - j]$ con tiempo de viaje

T_{ij} y distancia total recorrida D_{ij} . Los rayos que atraviesan la anomalía determinan los puntos de ingreso E, salida S y distancia de viaje d_{ij} en el interior de la misma. Se conforman las matrices:

$$T = \{T_{ij}\} \quad D = \{D_{ij}\} \quad D_{ij} = \|s_i - r_j\| \quad d = \{d_{ij}\} \quad i=1\dots n \quad j=1\dots m$$

Los rayos que no tocan a la inclusión ($d_{ij} = 0$) permiten calcular V_1 como:

$$V_1 = \min_{ij} \left(\frac{D_{ij}}{T_{ij}} \right) \quad \text{caso } V_1 < V_2$$

Se descompone T_{ij} en el recorrido externo $\frac{(D_{ij} - d_{ij})}{V_1}$ e interno $\frac{d_{ij}}{V_2}$ a la anomalía, de donde se despeja d_{ij} , y se lo expresa en notación matricial:

$$d_{ij} = \left(\frac{V_2}{V_2 - V_1} \right) (D_{ij} - T_{ij} V_1) \quad \mathbf{d} = K (\mathbf{D} - \mathbf{T} V_1) \quad (1)$$

$$\text{Siendo } K = \frac{V_2}{V_2 - V_1}$$

Es importante notar que la matriz \mathbf{d} ($n \times m$) tiene elementos $d_{ij} > 0$, para aquellos rayos $[i - j]$ que intersectan a la inclusión. Los valores próximos a cero (i. e. menores al 3% del máximo de los d_{ij}) se anulan. Puesto que no se conoce V_2 , \mathbf{d} queda indefinida por el factor K . Esto impide la determinación del contorno pero no la dirección (max) del máximo segmento interior, ni tampoco la ubicación del centro geométrico de la anomalía (queda demostrado en la sección 5).

Se seleccionan los elementos no nulos de \mathbf{d} , renombrando a estos rayos con el subíndice k ($k=1..N$) y denominando E_k y S_k a los puntos de entrada y salida del rayo k a la anomalía. Sea (x_k, y_k) las coordenadas de P_k , punto medio del segmento de longitud d_k (ver figura 1b). La ubicación de P_k queda unívocamente determinada por los x_k (los y_k dependen de estas abscisas).

4 PRINCIPIO DE DISPERSIÓN MÍNIMA

Para definir el centro geométrico C de la anomalía, se considera una distribución de segmentos $\{d_k\}$, ubicados en P_k , resultando pesos w_k independientes de V_2 .

$$L = \sum_{k=1}^N d_k \quad w_k = \frac{d_k}{L} = \frac{D_k - T_k V_1}{\sum_{k=1}^N (D_k - T_k V_1)} \quad (2)$$

$$C(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{d_k P_k}{L} \right) = \sum_{k=1}^N w_k P_k(x_k, y_k) \quad (3)$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^N w_j x_j \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^N w_j y_j \quad \text{coordenadas de C}$$

Para la determinación de los puntos P_k se usa un método basado en el mínimo del

funcional dispersión, se toma, como medida de la misma, la varianza σ^2 (Montgomery and Runger, 2004):

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N w_k (x_k - \bar{x})^2 + \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N w_k (y_k - \bar{y})^2 \tag{4}$$

A distintas formas de la inclusión, le corresponden distintos valores de la dispersión, generándose una relación funcional entre contornos y dispersión. Se observa que al alejarse de la forma de la anomalía, la dispersión de los P_k aumenta, por ello se adopta el siguiente criterio:

La forma de la anomalía corresponde a la dispersión mínima de los puntos P_k

Puesto que se conoce la trayectoria recta del rayo k ($y = m_k x + b_k$); σ^2 resulta ser sólo función de la abscisa x_k : $\sigma^2 = \sigma^2(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Las ecuaciones $\frac{\partial \sigma^2}{\partial x_k} = 0$ conducen a la obtención de los x_k .

5 DESARROLLO DEL PROCESO DE DERIVACIÓN

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial x_i} = 0 = \frac{2}{N-1} \sum_{k=1}^N w_k (x_k - \bar{x}) (\delta_{ki} - w_i) + \frac{2}{N-1} \sum_{k=1}^N w_k (y_k - \bar{y}) (\delta_{ki} - w_i) m_i \tag{5}$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial y_i} = \delta_{ki} \text{ delta de Kroneker} \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_i} = w_i \quad y_i = m_i x_i + b_i \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = m_i$$

Analizamos los términos del segundo miembro de (5).

$$(x_k - \bar{x}) = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} - w_j) x_j \quad (y_k - \bar{y}) = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} - w_j) (m_j x_j + b_j) \tag{6}$$

reemplazando (6) en (5) e intercambiando el orden de las sumatorias:

$$0 = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (\delta_{kj} - w_j) w_k (\delta_{ki} - w_i) \right) x_j + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (\delta_{kj} - w_j) w_k (\delta_{ki} - w_i) \right) m_i (m_j x_j + b_j) \tag{7}$$

agrupando en el primer miembro los términos que acompañan a x_j

$$\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (\delta_{kj} - w_j) w_k (\delta_{ki} - w_i) \right) (1 + m_i m_j) x_j = - m_i \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (\delta_{kj} - w_j) w_k (\delta_{ki} - w_i) \right) b_j$$

Llamando

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^N (\delta_{kj} - w_j) w_k (\delta_{ki} - w_i) \quad a_{ij} = h_{ij} (1 + m_i m_j) \quad f_i = - m_i \sum_{j=1}^N h_{ij} b_j \tag{8}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = f_i} \quad \text{o en forma matricial} \quad \boxed{A x = f} \tag{9}$$

Los parámetros del sistema lineal (9) dependen de la geometría de emisores-receptores (m_k y b_k) y de w_k , todos independientes de V_2 .

La resolución de (9) permite conocer los x_k y los $y_k = m_k x_k + b_k$, coordenadas de los puntos P_k , luego usando (3) determinamos C sin el conocimiento de V_2 .

6 VALIDACIÓN NUMÉRICA

6.1 Simulación de datos

Para simular datos (matrices **D** y **T**), se lleva a cabo la construcción de un modelo, según los siguientes pasos:

1) Alrededor de una región base cuadrada ($L \times L$), se realiza una distribución regular de zonas rectangulares y dentro de ellas se ubican los emisores $s_i(x_i, y_i)$ y receptores $r_j(x_j, y_j)$ en forma aleatoria, siguiendo el criterio de alteraciones pequeñas dentro de una distribución aproximadamente regular (ver figura 2a).

2) Se calculan los parámetros geométricos del rayo y se forma $D = \{D_{ij}\}$

$$D_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad m_{ij} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \quad b_{ij} = y_j - m_{ij}x_j$$

3) Ubicación de una elipse E , que simula la anomalía, en la zona rectangular central con parámetros elegidos aleatoriamente: coordenadas (x_c, y_c) de su centro, orientación θ del eje mayor y semiejes a, b con $a > b$

4) Determinación de la matriz **d** de segmentos interiores (Calvo e Imhof, 2007), lo que permite calcular $T_{ij} = \frac{(D_{ij} - d_{ij})}{V_1} + \frac{d_{ij}}{V_2}$ y la matriz $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}$.

6.2 Aplicación del modelo propuesto

1) A partir de $s_i(x_i, y_i)$ y de $r_j(x_j, y_j)$ se calculan $D_{ij} = \{D_{ij}\}$, m_{ij} y b_{ij}

2) $V_1 = \min_{ij} \left(\frac{D_{ij}}{T_{ij}} \right)$ $\mathbf{d} = K (\mathbf{D} - \mathbf{T}V_1)$ se adopta $K=2$

3) Se calcula el máximo d_{ij} y su dirección (max). Se anulan los próximos a cero

4) Se renumeran el resto. Resultan $m_k, b_k, \theta^* = \arctan(m_{\max}), b_{\max}$

5) Se calculan $L; w_k; h_{ij}; a_{ij}; f_i$ usando (2) y (8)

6) Se resuelve el sistema lineal (9) obteniéndose $x_k; y_k = m_k x_k + b_k; P_k(x_k, y_k)$

7) Se determina el centro de la anomalía: $C(x_c^*, y_c^*) = \sum_{k=1}^N w_k P_k(x_k, y_k)$

8) Se determina dirección de exploración $m_e = \frac{-1}{m_{\max}}$

7 EVALUACIÓN DEL MODELO Y RESULTADOS OBTENIDOS

Los parámetros que se eligieron para evaluar la calidad del modelo son:

a) $\kappa(A)$ Condición de la matriz **A**.

b) $\delta = \sqrt{(x_c - x_c^*)^2 + (y_c - y_c^*)^2}$ Separación entre centros (ver figura 2b)

c) $\Delta\theta = \theta - \theta^*$ Cambio en la orientación

Se simularon 100.000 casos, con los siguientes datos:

Región base cuadrada $L = 100$.

Parámetros de la elipse: $8 \leq b \leq a \leq 30$ $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ $30 \leq x_c \leq 70$ $30 \leq y_c \leq 70$

Los resultados registrados en la [Tabla 1](#) incluyen valores promedio, máximo y en la última columna una medida de dispersión de los valores de los parámetros.

La condición relativamente baja ($\kappa \sim 10^1$) indica la pérdida de un dígito de precisión de los datos al resolver el sistema lineal. Este valor es llamativo pues los métodos de mínimos cuadrados conducen habitualmente a sistemas mal condicionados.

La ubicación del centro de la anomalía es muy precisa. El cambio en la orientación es apreciable, pero no incidente en la elección de la dirección de exploración.

Parámetro	Valor promedio	Valor máximo	V_99
$\kappa(A)$	12	309	51
δ	1.6	6.09	5.0
$\Delta\theta = \theta - \theta^*$	6°	30°	18°

Tabla 1: V_99 valor que incluye el 99% de los casos.

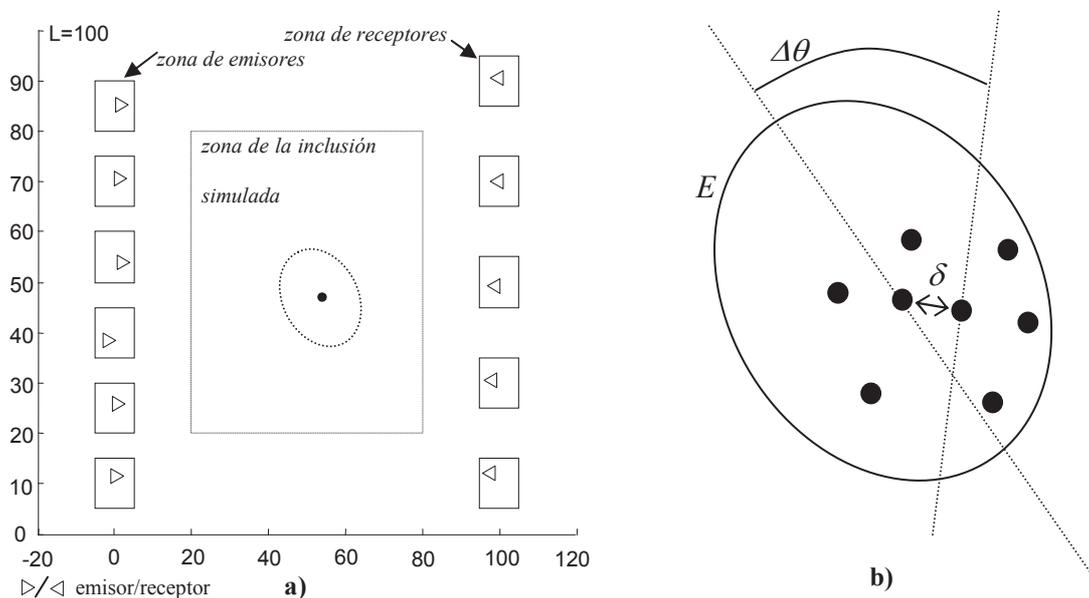


Figure 2: a) Dominio para simulación

b) E Elipse simulada y P_k obtenidos

8 CONCLUSIONES

El método propuesto conduce a un sistema lineal bien condicionado. El procedimiento resulta simple, directo, robusto y de fácil implementación computacional. La experimentación numérica con distribuciones aleatorias de emisores, receptores y anomalías para un número alto de simulaciones demuestra la validez del método en lo que respecta a la ubicación de la inclusión.

REFERENCIAS

- Sheriff, R.E. & Geldard, L.P., Exploration Seismology, 2nd Edition. Cambridge University Press., NY.,1995.
- Santamarina, J.C., Klein. & Fam, Soils and Waves, Ed. Wiley & Sons,2001.
- Montgomery, D.C. & Runger, G.C., Probabilidad y Estadística Aplicada a la Ingeniería,

Ed. Mc Graw Hill, 2004

Calvo, C. A. y IMHOF, A. L., Detección de Anomalías 2D por un método de Inversión Tomográfica por mínima dispersión, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y diseño en Ingeniería*. Vol.23, # 3 pp. 295-304, Barcelona, 2007