

ESTABILIDAD DE SISTEMAS CONTROLADOS SOBRE REDES DE COMUNICACIÓN ANTE RETARDOS DE TRANSMISIÓN

Flavia E. Felicioni, Sergio J. Junco

*Departamento de Control, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Ríobamba 245 Bis – S2000EKE Rosario – Argentina.
{flaviaf,sjunco}@fceia.unr.edu.ar*

Palabras Clave: Sistemas Controlados sobre redes, retardos de transmisión, Estabilidad robusta frente a retardos, retardos acotados pero desconocidos.

Resumen. En este artículo se consideran los efectos de los retardos de transmisión introducidos por la red de comunicaciones en los lazos de control. En particular, se considera que los mismos son constantes, y que las plantas son lineales y SISO (una entrada-una salida). El retardo se incorpora al modelo discreto del sistema usando la transformada z modificada (MZT), y en relación con ciertas características de estos modelos se propone realizar un análisis de estabilidad para retardos acotados pero desconocidos, utilizando criterios de respuesta en frecuencia en tiempo discreto. Además, la utilización de una aproximación de los modelos obtenidos con la MZT permite simplificar y generalizar el análisis de estabilidad, a través de una caracterización asociada al grado relativo de la planta continua. Tras el análisis de características frecuenciales de cierto tipo de combinaciones de planta y controlador (ambos estables), se puede conjeturar que ciertos polos de lazo cerrado que se mueven hacia la inestabilidad con retardos temporales crecientes son determinantes de la variación de índices simples de performance comúnmente usados en la práctica.

1 INTRODUCCIÓN

Actualmente, los sistemas de control en lazo cerrado con intercambio de información entre sensores, controladores y actuadores a través de redes de comunicación son prácticamente omnipresentes en sistemas embarcados (*embedded systems*, en inglés). Esta situación es también una tendencia creciente en aplicaciones industriales (Tipsuwan y Chow, 2003). Dado que estos sistemas (designados con el acrónimo NCS por las siglas de *Networked Control Systems*) en general comparten la red de comunicación con otros usuarios, los lazos de control asociados se ven afectados por la aparición de retardos de transmisión de la información que procesan (NID, por las siglas en inglés de *Network-Induced Delays*), los cuales dependen de características físicas y de gestión de la red. Desviándose de la hipótesis básica de sincronismo entre sensado y actuación de la teoría de control digital clásica, esta situación afecta la performance de diseño de los lazos, pudiendo inclusive llegar a comprometer su estabilidad. En este artículo se considera el efecto de los NID en la estabilidad de la clase de sistemas monovariantes lineales y estacionarios (LTI, por *Linear Time Invariant*).

Los retardos temporales pueden modelarse como constantes o variables, del tipo determinístico o aleatorio, en dependencia del hardware elegido y de los protocolos de red adoptados (Nilsson, 1998) (Halevi y Ray, 1998). En este trabajo, los NID se modelan como acotados, constantes y desconocidos, lo cual es válido, por ejemplo, en aplicaciones que utilizan protocolos de red con agendado (*scheduling*) de tipo estático, tales como token ring o token bus (Zhang et al., 2001). En estos casos de NID constantes el sistema preserva su invariancia en el tiempo, lo cual facilita la investigación de su estabilidad y de la degradación de su performance nominal. En relación con la estabilidad, se procura determinar el *retardo crítico* o *margen de retardo* (Zhang et al., 2001) para un diseño dado que ignora la presencia de NID o que lo asume constante de un valor fijo (como se verá en el desarrollo del trabajo, el uso de este concepto de *retardo crítico* requiere sumo cuidado, ya que hay casos donde el comportamiento estable para ciertos valores de retardo no lo implica para valores *menores*). Este problema se puede extender a uno de re-ajuste de un diseño dado de tal manera que el controlador siga manteniendo la estabilidad en caso de que el valor de retardo se incremente. Es decir, el interés radica en verificar o garantizar cierta *robustez frente a retardos*, que es precisamente el problema abordado en este artículo.

Desde el punto de vista del diseño de control, estos problemas han sido enfocados de dos maneras, una con modelos en tiempo discreto (DT, por *Discrete-Time systems*) y otra con modelos aproximados en tiempo continuo (CT, por *Continuous-Time systems*).

El estudio de problemas LTI en el dominio CT se puede hacer usando la transformada de Laplace, como, por ejemplo, en (Zhong, 2003), donde se analiza la estabilidad de lazo cerrado mediante el diagrama Dual-Locus para una configuración de planta particular (de segundo orden sin ceros) y un controlador continuo (una ganancia), con un retardo entre sensor y controlador. En (Juanole, 2002), se considera una aproximación (utilizando la aproximación de Padé para un retardo inferior al período de muestreo) para analizar la calidad de servicio de la red y el margen de fase de la planta, ambos en CT.

Sin embargo, debe observarse que el uso del enfoque CT sólo puede arrojar resultados próximos a los exactos si el período de muestreo tiende a cero (en la práctica, si la frecuencia de muestreo es muy superior a la frecuencia más alta presente en la salida de la planta). Pero una alta frecuencia de datos a transmitir por una red, compartida entre múltiples transmisores/receptores, implica un aumento en el tráfico, lo que, entre otros problemas, puede ser responsable de un valor importante de retardo. Por lo tanto, como ha

sido observado en (Lian et al., 2001), existe un compromiso entre la selección de períodos de muestreo de los lazos de control y el valor del retardo de manera de evitar el deterioro de su performance. De esto se deduce que no es el análisis en el dominio continuo, sino en el discreto, el más adecuado para tratar el problema de los NCS.

En el dominio DT, en (Branicky et al., 2000) se reportan condiciones de estabilidad y se determina el dominio de atracción, en función de la relación retardo-período de muestreo para un integrador controlado por realimentación de estado (es decir, para la combinación de planta dinámica y controlador más simple posible). La posibilidad de extender tales resultados a plantas más complejas o generales con los criterios allí mencionados es muy difícil o imposible y los autores sugieren utilizar simulaciones para encontrar las relaciones.

Para el problema en cuestión, el retardo τ puede asumir cualquier valor continuo, no necesariamente uno múltiplo del periodo de muestreo del sistema. En este artículo se tratará este problema en DT para sistemas LTI-SISO con la transformada Z modificada (Jury, 1964), o MZT por sus siglas en inglés. La misma provee una descripción entrada/salida en el dominio transformado, alternativa al modelo temporal en el espacio de estados de sistemas muestreados. Esta técnica ha sido usada en el contexto del modelado de los NCS con NID en (Felicioni y Junco, 2005) y en (Yook et al., 2000), donde ha permitido definir índices de performance de lazo cerrado que permiten evaluar la mejor arquitectura de un controlador en redes para un dado sistema. Esta discretización transforma la función transferencia continua no-racional en una transferencia discreta racional, es decir, de dimensión finita. De esta manera, el retardo se integra con la planta en un único modelo discreto racional.

A diferencia del caso continuo, donde el retardo es expresado por un único parámetro, en el modelo MZT queda representado por dos coeficientes, uno que es múltiplo entero del período de muestreo y otro que expresa una fracción del mismo. En la respuesta en frecuencia (RF) asociada a esta FT-DT MZT, la parte fraccional del retardo sólo afecta la función magnitud, mientras que tanto la parte fraccional como la parte entera influyen sobre el argumento.

Cuando la variación de la magnitud de la RF puede ser acotada en función del rango de valores que la parte fraccional puede asumir, entonces, el análisis de estabilidad robusta puede reducirse al análisis de ciertas relaciones entre magnitudes para un conjunto discreto de valores de la parte fraccional (*Sección 3.1, Proposición a* de este artículo).

La obtención de estas cotas (máximas y mínimas) de la magnitud requiere conocer la expresión simbólica de la FT-DT MZT de la planta en particular, la cual puede ser obtenida utilizando una tabla de transformada z modificada, o con algún software de tipo simbólico (por ejemplo, Maple). En la mayor parte de los casos la determinación de estas cotas implica la resolución de ecuaciones trascendentes. Dado que en muchos casos esta resolución es muy compleja o simplemente imposible, se propone aquí la utilización de una aproximación de los coeficientes del numerador de la MZT introducida por (Hara et al., 1989), donde cada coeficiente tiene una dependencia polinomial de la parte fraccional. Si bien los resultados usando esta aproximación son válidos cuando el período de muestreo es pequeño, en este trabajo se mostrará a través de varios ejemplos la ventaja de su empleo, respecto a una aproximación continua muy difundida en la literatura que trata estos problemas en CT (ambas aproximaciones se discuten en la Sección 2.4). El uso de la FT-DT MZT aproximada permite formular la *Proposición b* de este artículo, la que simplifica el análisis de cotas máximas y mínimas a ciertos valores de la parte fraccional del retardo que dependen solamente del orden de la planta continua y su grado relativo. Esta forma de dependencia permite generalizar los resultados a todas las plantas que tienen este mismo

par de índices estructurales, mientras que con el modelo MZT exacto sólo se pueden hacer predicciones (o diseños) para plantas específicas.

Finalmente, se presenta aquí una tercera proposición (Proposición c, en Sección 3.2) que, para cierto tipo de sistemas y controladores, que permite conjeturar que ciertos polos de lazo cerrado que se mueven hacia la inestabilidad con retardos temporales crecientes son determinantes de la variación de índices simples de performance comúnmente usados en la práctica (por ejemplo, el tiempo de respuesta y el sobrevalor de la respuesta al escalón). Este resultado generaliza lo observado vía simulación en un caso de estudio en (Felicioni y Junco, 2005).

2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA Y MODELOS MATEMÁTICOS

2.1 Hipótesis de modelado del NCS y problema planteado.

Las propiedades del NCS relevantes para este artículo se exponen en base al esquema de la Figura 1. La planta continua y el controlador discreto se comunican vía una red de comunicaciones de tiempo real, de la cual sólo se modelan los retardos que ella induce.

En relación con el manejo de las señales en la red se considera: muestreo periódico de la salida de la planta; controlador y actuador manejados por los eventos a su entrada (Zhang et al., 2001).

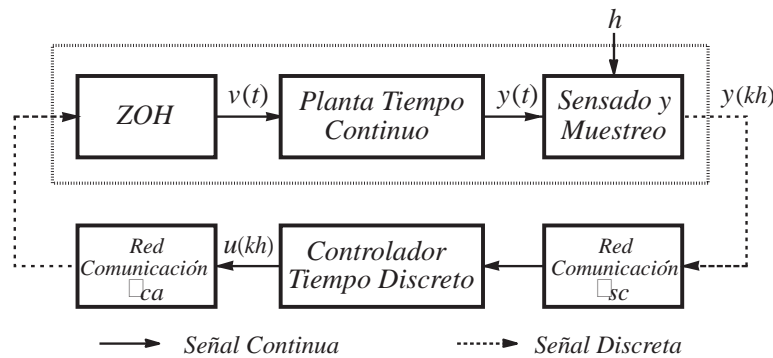


Figura 1: Modelo del NCS con retardos inducidos por la red.

Se distinguen dos clases de retardos inducidos por la red: del sensor al controlador τ_{sc} , y del controlador al actuador τ_{ca} . Cualquier retardo computacional τ_{comp} del controlador (tiempo de ejecución de la ley de control) puede ser absorbido en τ_{sc} o τ_{ca} . Ambos retardos de red pueden ser superiores o inferiores al período de muestreo h . Con la hipótesis de controlador lineal y estacionario, para cada instante t_k de muestreo de la salida, estos retardos pueden englobarse en un único retardo $\tau_{(k)}$ efectivo sobre la acción de control ($\tau_{(k)} = \tau_{sc,k} + \tau_{comp} + \tau_{ca,k}$), como se modela gráficamente en la Figura 2. En la literatura, $\tau_{(k)}$ se conoce también como retardo de entrada-salida. Como ya se dijo en la introducción, bajo ciertas condiciones (Zhang et al., 2001) (Halevi y Ray, 1998), (Nilsson, 1998) se puede considerar que $\tau_{(k)} = \tau$ constante para todo k (índice del tiempo discreto).

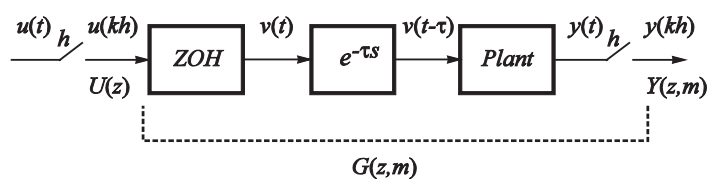


Figura 2: Retardo global entrada-salida modelado sobre la acción de control.

Estabilidad robusta frente a retardos constantes: Dado el sistema de control con la configuración de la Figura 1, las hipótesis anteriores y un retardo genérico constante τ en la acción de control, el problema de **estabilidad robusta** enfocado en este artículo consiste en determinar el valor τ^* tal que para todo $0 < \tau < \tau^*$ el sistema sea estable.

Para resolver este problema se analizará la estabilidad del lazo cerrado de una familia de sistemas LTI, donde cada elemento en la familia tiene asociada una función transferencia calculada con la MZT para cada valor de retardo. El interés es entonces reducir, bajo alguna suposición, la cantidad de elementos de esta familia. Más concretamente, se busca un método que, a partir de la determinación de una propiedad (estabilidad) para algunos valores de retardos, permita predecir la validez de la misma propiedad sobre el intervalo definido por esos valores (estabilidad robusta).

2.2 Modelado matemático con la transformada z modificada

Considérese una planta descrita por la transferencia continua sin retardo

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1)$$

Un retardo en cascada con esta planta cambia el polinomio numerador anterior por un quasipolinomio real en s , y deja invariable al polinomio denominador, como se ve en (2).

$$G(s) = G_0(s) e^{-\tau s} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} \quad (2)$$

El retardo se puede descomponer como un múltiplo del período de muestreo más una fracción del mismo:

$$\tau = (l - 1)h + \tau' \quad \text{con } 0 < \tau' < h \text{ y } l \text{ un entero} \quad (3)$$

El retardo fraccional puede a su vez escribirse como:

$$\tau' = (1 - m)h \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1 \quad (4)$$

- si $m \rightarrow 1$, entonces $\tau = (l - 1)h$ (en el dominio z existe un término $z^{-(l-1)}$).
- si $m \rightarrow 0$, entonces $\tau = lh$ (en el dominio z existe un término z^{-l}).

Considerando que la acción de control se mantiene con un ZOH (retenedor de orden cero) de transferencia $H(s) = \frac{1 - e^{-sh}}{s}$, la aplicación de la MZT a la cascada de la Figura 2 se hace como sigue:

$$\begin{aligned} G_d(z, m) &= \mathcal{Z}_m \{ G_0(s) H(s) e^{-\tau s} \} = z^{-(l-1)} \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{1 - e^{-hs}}{s} G_0(s) e^{-(1-m)hs} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z^{l+1}} \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{G_0(s)}{s} e^{mhs} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Un método para calcular la $\mathcal{Z}_m \{ \cdot \}$, que parte de la representación de Laplace, es el teorema del Residuo (Ogata, 1996).

$$\mathcal{Z}_m \{ \cdot \} = \sum_{p_i = \text{polos de } G_0(s)} \left[\text{residuos de } \frac{G_0(s) e^{mhs} z}{z - e^{hs}} \Big|_{en p_i} \right] \quad (6)$$

Otra forma equivalente de calcularla es usando la técnica de fracciones simples descrita en (Franklin y Powell, 1980).

La función transferencia discreta es el cociente entre dos polinomios, donde el numerador tiene coeficientes dependientes de m (la parte fraccional del retardo) mientras la parte entera del retardo sólo afecta el valor del exponente de z que multiplica al denominador de la planta calculado para retardo nulo:

$$G_d(z, m) = \frac{N_p(z, m)}{z^l D_p(z)} \quad (7)$$

2.3 Estabilidad del sistema en lazo cerrado

Considérese ahora el esquema de la **Figura 2** retroalimentado con un controlador discreto descrito por la siguiente función transferencia

$$C(z) = k_c \frac{N_c(z)}{D_c(z)} \quad (8)$$

La *ganancia de lazo* es el producto de (7) y (8), esto es

$$L(z, m) = C(z)G_d(z, m) = k_c \frac{N_c(z) N_p(z, m)}{D_c(z) z^l D_p(z)} \quad (9)$$

La función transferencia de lazo cerrado es $T(z, m) = \frac{L(z, m)}{1+L(z, m)}$, cuyo denominador es

$$D_{LC}(z, m) = z^l D_c(z) D_p(z) + k_c N_c(z) N_p(z, m) \quad (10)$$

Este polinomio puede ser escrito equivalentemente como sigue

$$D_{LC}(z, m) = a_n(m) z^n + a_{n-1}(m) z^{n-1} \dots + a_1(m) z + a_0(m) \quad (11)$$

El análisis de estabilidad se hará en base al siguiente resultado básico:

Teorema (Hinrichsen y Pritchard, 2005): El sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si el polinomio (10),(11) es Schur, es decir si todas sus raíces están dentro del círculo unitario.

2.4 Consideraciones de Respuesta en Frecuencia de sistemas discretos

En esta Sección, se analizan la RF de la ganancia del lazo MZT (9) simplificada usando una aproximación continua muy difundida en la literatura y la de una aproximación discreta, definidas en las subsecciones 2.4.1) y 2.4.2) respectivamente. Un análisis comparativo ilustra el mejor desempeño de la aproximación discreta, lo cual justifica la elección de esta última para atacar el problema planteado en este artículo cuando sea muy complicado resolverlo con el modelo exacto.

Aproximaciones de RF de sistemas discretos

Asociado con el período de muestreo h , se define la frecuencia de muestreo $\omega_s = 2\pi/h$, y el rango de frecuencias de Nyquist $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$.

La función de respuesta en frecuencia de un sistema $G_d(z)$ discreto, se calcula reemplazando z por e^{sh} con $s = j\omega$ y equivalentemente se puede calcular con la *fórmula de modulación del impulso* (15) (Astrom y Wittenmark, 1990; Araki et al., 1993)

$$G_d(e^{sh}) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_0(s + j k \omega_s) H(s + j k \omega_s) \quad (12)$$

En el caso ideal de que $G_0(s)$ sea de banda limitada, entre $-\omega_s$ y ω_s (Francis y Chen, 1990), ecuación (12) resulta

$$G_d(e^{sh}) = \frac{1}{h} G_0(s) H(s) \quad (13)$$

2.4.1 Aproximación continua

La RF del dispositivo ZOH se puede aproximar para bajas frecuencias como $H(s) \approx h e^{-sh/2}$, es decir el ZOH actúa como un retardo de valor $h/2$ (Francis y Chen, 1990).

Sea el retardo τ definido en (2), entonces la aproximación de la planta y el ZOH es

$$G(s)H(s) \approx h e^{-s(\frac{h}{2}+\tau)} G_0(s) \quad (14)$$

Entonces, teniendo en cuenta sólo el contenido de ancho de banda limitada ($k=0$) en (12), y reemplazando con la aproximación (14), se obtiene la aproximación continua $\bar{G}_d(s)$ de $G_d(z)$ como sigue

$$G_d(e^{sh}) \approx \frac{1}{h} G(s)H(s) \approx \bar{G}_d(s) = e^{-s(\frac{h}{2}+\tau)} G_0(s) \quad (15)$$

A partir de lo cual se puede obtener que

$$\begin{cases} |\bar{G}_d(s)| = |G_0(j\omega)| \\ \arg \bar{G}_d(s) = \arg G_0(j\omega) - \omega \left(\frac{h}{2} + \tau\right) \end{cases} \quad (16)$$

En (16) se puede apreciar que el retardo no afecta la magnitud (la cual es independiente de m) y sólo agrega argumento negativo (lineal con la frecuencia).

Con la aproximación (16) se puede calcular el máximo retardo que el sistema puede tolerar, utilizando el criterio presentado en (Mirkin y Palmor, 2005), ver Sección 2.4.3).

2.4.2 Aproximación del MZT exacto

Ante la presencia de retardos (3), los ceros límites de la función transferencia discreta cuando el período de muestreo tiende a cero están determinados solamente por el grado relativo del sistema continuo (Hara et al, 1989) como se enuncia a continuación,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{p-n} \mathcal{Z}_m \{H(s) G_0(s) e^{-[(l-1)+(1-m)]hs}\} = \frac{k}{(n-p)!} \frac{(z-1)^p B_{n-p}(z,m)}{z^l} \quad (17)$$

Donde

$$B_x(z, m) = \sum_{k=0}^x b_{xk}(m) z^{x-k} \quad (18)$$

Siendo los coeficientes

$$b_{xk}(m) = \sum_{i=0}^{x-k} (-1)^{x-k-i} (i + (1-m))^x \binom{x+1}{x-k-i} \quad \text{con } k = 0, \dots, x \quad (19)$$

$x=n-p$ es el grado relativo de $G_0(s)$, n grado del denominador y p del numerador.

Los coeficientes de $B_x(z, m)$ son siempre positivos o nulos, debido a que $0 \leq (1-m)$ para $0 \leq m \leq 1$, y se puede comprobar que sus raíces pertenecen al eje real negativo del plano complejo. En consecuencia, la parte de la respuesta en frecuencia asociada con $B_x(z, m)$, se manifiesta en la zona de alta frecuencia.

Además, si el período de muestreo es elegido adecuadamente (Astrom y Wittenmark, 1990), (Franklin y Powell, 1980), los polos de $G(s)$ son mapeados en regiones de baja frecuencia del plano complejo z .

Por ambos motivos, la mayor diferencia entre la respuesta en frecuencia de la planta discreta (7) y el modelo aproximado (17) está relacionada con la aproximación que se realiza en el polinomio denominador de (17) (es decir $(z-1)^n$).

Entonces, para reducir el error, se guarda el denominador de (7) y se considera sólo una aproximación del numerador de la transferencia discreta (17), es decir

$$N_p(z, m) \approx \hat{N}_p(z, m) = k_b (z-1)^p B_{n-p}(z, m) \quad (20)$$

donde $k_b = N_p(z=1)/(n-p)!$ y $N_p(z=1)$ es la ganancia del numerador de la planta sin retardo.

Con esto,

$$G_d(z, m) \approx \hat{G}_d(z, m) = \frac{k_b (z-1)^p B_{n-p}(z, m)}{z^l D_p(z)} \quad (21)$$

2.4.3 Ejemplo de resultados de aproximación discretos y continuos

En primer lugar se comparan aquí las respuestas en frecuencia de las aproximaciones discreta (21) y continua (16) de la ganancia de lazo (9), para una planta P_{T1} de transferencia $1/(s+2)$. Luego, se cierra el lazo con los modelos aproximados y se comparan los resultados de estabilidad para concluir sobre cuál es el enfoque que resulta más adecuado.

A (5) corresponde la siguiente transferencia específica, que es el modelo MZT exacto:

$$G_d(z, m) = \frac{z(1-e^{-2hm}) + e^{-2hm} - e^{-2h}}{2(z-e^{-2h})z^l}$$

La aproximación continua (15) resulta:

$$\bar{G}_d(s) = e^{-sh(\frac{1}{2}+l-m)} \frac{1}{s+2}$$

La aproximación discreta (21) se expresa como:

$$\hat{G}_d(z, m) = \frac{(1-e^{-2h})}{2} \frac{(z m + 1 - m)}{(z-e^{-2h})z^l}$$

Lazo abierto

Se observa que el numerador de $\hat{G}_d(z, m)$ vale $\hat{N}_p(z, m) = (z m + 1 - m)$, cuyas funciones de RF, parametrizadas con m , para todo $\theta \in [0, \pi/h]$ son

$$|\hat{N}_p(z, m)| = \sqrt{1 - 2 m^2 \cos \theta + 2m \cos \theta - 2m + 2m^2} \quad \text{y} \\ \arg(\hat{N}_p(z, m)) = \arctan(m \sin \theta, m \cos \theta + 1 - m)$$

donde \arctan es la función inversa de la tangente en los cuatro cuadrantes (analizando los signos de parte real e imaginaria).

La aproximación continua, por su parte, vale

$$|\bar{N}_p(z, m)| = 1 \quad \text{y} \quad \arg(\bar{N}_p(z, m)) = -\omega\tau = -\theta(1-m).$$

De estos resultados se desprende que, en cuanto a la magnitud, la aproximación continua es independiente de m , sólo coincidiendo con la aproximación discreta para $m=1$ y $m=0$. En cuanto a los argumentos, $\arg(\hat{N}_p(z, m))$ puede ser aproximado cuando $\theta \rightarrow 0$ (para baja frecuencia) como $\arctan(m \theta) \approx m \theta$, y agregando la parte entera del retardo $l=1$ resulta $\theta m - \theta$, y entonces coincide con la aproximación continua.

En Figura 3 se muestran las RF mencionadas para algunos valores de m . La magnitud de la aproximación continua vale h para todo m y todo θ . En cuanto a los argumentos para $m=1$, $m=0.5$ y $m=0$ coinciden la aproximación continua con los valores exactos (dado que en estos casos son rectas), mientras que para el resto de valores los argumentos obtenidos con $\bar{N}_p(z, m)$ son las tangentes, en $\theta=0$, de los argumentos de la $\hat{N}_p(z, m)$, las cuales varían significativamente a medida que la frecuencia crece.

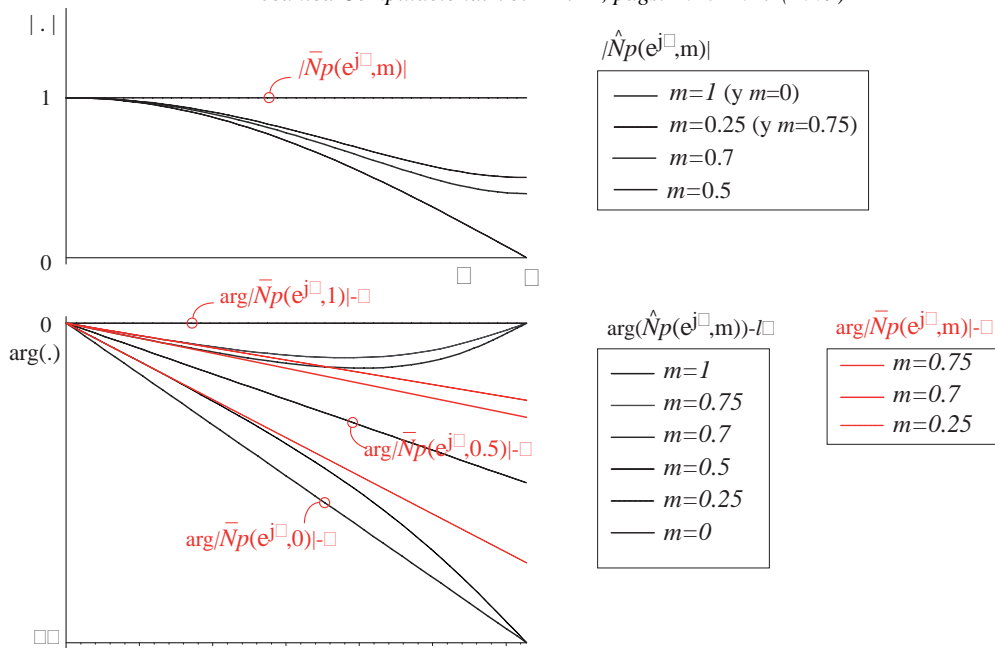


Figura 3: Respuesta en frecuencia del numerador discreto de $1/(s+2)$: aproximaciones discreta y continua.

Lazo cerrado

Se analiza ahora el lazo cerrado considerando como controlador DT una ganancia k_c positiva. La Figura 4 muestra las regiones de estabilidad en el plano $(k_c, \tau/h)$ predichas por el modelo MZT exacto, su aproximación discreta, y la aproximación continua. Como se observa, hay una marcada similitud entre la MZT exacta y su aprox. discreta, que confieren gran confiabilidad a esta última, mientras que ambas difieren mucho de la aproximación continua. Particularmente, en la región inferior de forma triangular apoyada sobre el eje k_c y definida por la intersección de las curvas de la continua y la discreta, se observa que con la aproximación continua podría ponerse a trabajar el sistema con valores tales que el lazo cerrado resulta inestable de acuerdo a las predicciones más confiables de las MZT exacta y aproximada. Se ve también una región (triánguloide con base en curva aproximación continua con vértice a la derecha) donde la aproximación continua es muy conservadora.

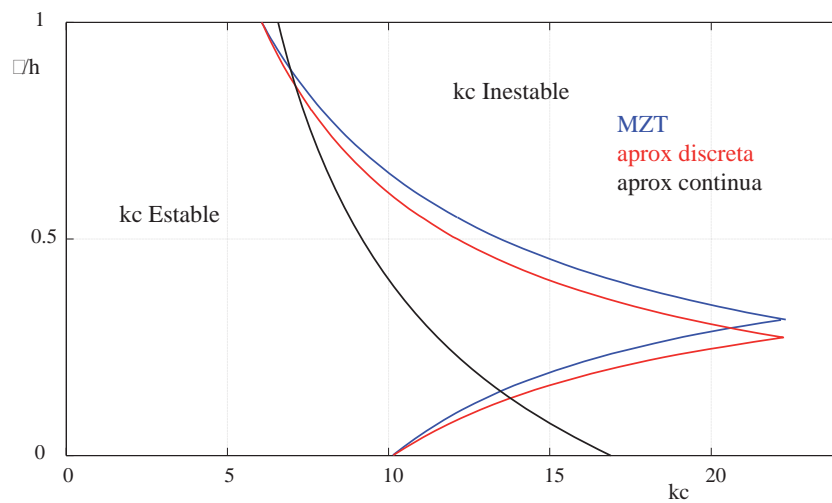


Figura 4: Región de estabilidad, k_c en función de τ y h .

Estos resultados avalan la elección del enfoque discreto para el estudio que sigue.

3 ESTABILIDAD DE SISTEMAS CON RETARDO, RESULTADO PRINCIPAL

El problema formulado en Sección 2.1 equivale a verificar la estabilidad de la familia de polinomios $D_{LC}(z, m)$ dada en (10), i.e., $D_{LC}(z, m) = z^l D_c(z) D_p(z) + k_c N_c(z) N_p(z, m)$, parametrizada por m y l dentro de los intervalos

$$(h-\tau) \leq m \leq 1 \text{ y } l=1 \text{ si } \tau^* \leq h \text{ y} \\ 0 \leq m \leq 1, l < l^* \text{ si } \tau^* > h.$$

A continuación, se presenta el principal resultado de este artículo que es el análisis de este problema mediante la evaluación de la respuesta en frecuencia de ciertas funciones transferencias. Gracias a una interpretación gráfica, se pueden visualizar la influencia de retardos de tiempo desconocidos aunque acotados, y también estudiar las regiones de parámetros donde la estabilidad queda garantizada.

También, se presentan ciertas proposiciones que utilizan el análisis frecuencial (y las reglas mencionadas) permitiendo establecer criterios de análisis y diseño.

3.1 Diseño frecuencial para el caso de retardos acotados

En primer lugar, se define una descomposición de la ganancia de lazo $L(z, m)$ de (9) del modelo MZT exacto, sobre la que luego se estudiará la estabilidad del problema establecido en Sección 2 para un m dado, aplicando el criterio simplificado de Nyquist (ver Apéndice). Este resultado se usa luego para el problema de determinar el rango de retardos dentro del cual se conserva la estabilidad (estableciendo un método de diseño). Para finalizar se muestra como puede ser simplificado este método de diseño si se utiliza la aproximación discreta.

3.1.1 Descomposición de la ganancia de lazo

Siguiendo las ideas de sistemas continuos (Mirkin y Palmor, 2005), (Hinrichsen y Pritchard, 2005) se puede realizar la siguiente descomposición de (9)

$$L(z, m) = k_c \frac{N_c(z) N_p(z, m)}{D_c(z) z^l D_p(z)} = \frac{Q(z, m)}{P_0(z)} \quad (22)$$

Con

$$Q(z, m) = k_c N_p(z, m) z^{-l} \quad (23)$$

$$P_0(z) = k_c N_p(z, m) z^{-l} \quad (23)$$

y

$$P_0(z) = \frac{D_p(z) D_c(z)}{N_c(z)} \quad (24)$$

En (23) se agrupan los términos asociados al retardo y entonces (24) permanece invariante frente al retardo.

Los cruces de la curva de lugar de la RF con el eje real negativo ocurren en las frecuencias donde se satisface

$$\phi_{P_0(z_0)} = \phi_{Q(z_0)} + (2k + 1)\pi, \text{ con } k=0, \pm 1, 2, \dots \quad (25)$$

para $z_0 = e^{j\theta_0}$ con $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$.

Particularizado para este caso, con (23) y (24), se tiene que (25) se convierte en (26)

$$\arg\left(\frac{D_p(e^{j\theta}) D_c(e^{j\theta})}{N_c(e^{j\theta})}\right) = \arg(N_p(e^{j\theta}, m)) - \theta l + (2k + 1)\pi \quad (26)$$

Sean las frecuencias donde se producen los cruces, denominadas por simplicidad $\theta^* = \theta_{(2k+1)\pi}$, entonces si $\frac{|Q(e^{j\theta^*})|}{|P_0(e^{j\theta^*})|} < 1 \Leftrightarrow$ el cruce se produce a la derecha del punto

crítico $(-1, j0)$, y esta situación se denomina C_R . Mientras que en caso contrario, se produce a la izquierda, denominada C_L .

Entonces, las condiciones sobre la ganancia de lazo establecidas por el Criterio Simplificado de Nyquist (ver Apéndice) se pueden verificar, de igual manera, a través de las siguientes relaciones de magnitudes, que agrupan a la derecha los términos del retardo, y a la izquierda la parte invariante:

$$\text{Si } \left| \frac{D_p(e^{j\theta^*})D_c(e^{j\theta^*})}{k_c N_c(e^{j\theta^*})} \right| > |N_p(e^{j\theta^*}, m)| \Leftrightarrow C_R \quad (27)$$

$$\text{Si } \left| \frac{D_p(e^{j\theta^*})D_c(e^{j\theta^*})}{k_c N_c(e^{j\theta^*})} \right| < |N_p(e^{j\theta^*}, m)| \Leftrightarrow C_L \quad (28)$$

La igualdad $\left| \frac{D_p(e^{j\theta^*})D_c(e^{j\theta^*})}{k_c N_c(e^{j\theta^*})} \right| = |N_p(e^{j\theta^*}, m)|$ indica que los polos están sobre el círculo unitario, la cual es una situación de inestabilidad.

El signo de la derivada de la magnitud (A.1) en frecuencias de cruce, se calcula:

$$\sigma(\theta) = \frac{d(|Q(e^{j\theta^*}, m)|/|P_0(e^{j\theta^*})|)}{d\theta} = \frac{1}{|P_0(e^{j\theta^*})|} \frac{d(|Q(e^{j\theta^*}, m)|)}{d\theta} - \frac{|Q(e^{j\theta^*}, m)|}{|P_0(e^{j\theta^*})|^2} \frac{d(|P_0(e^{j\theta^*})|)}{d\theta} \quad (29)$$

Dado que en (27) y (28) se deben verificar ciertas relaciones entre magnitudes y argumentos en función de la frecuencia, es posible y conveniente analizar la estabilidad a través de la realización de un gráfico de RF como se hace a continuación.

3.1.2 Estabilidad robusta frente a retardos acotados

Cada valor de m define un polinomio numerador con una función de RF asociada. Por tanto, la frecuencia de cruce varía, y entonces el criterio de Nyquist debe ser aplicado a cada valor de m . Si pueden determinarse valores de m tal que existan cotas máximas y mínimas en magnitudes y argumentos en función de la frecuencia, aunque sea en una región de frecuencias de interés, las condiciones C_L y C_R , verificadas en sus máximos y mínimos, valen para sus intermedios. La obtención de estas permite simplificar el análisis de estabilidad (o establecer reglas para diseño) para un retardo entre 0 y τ^* aplicando las condiciones de Nyquist solamente en los extremos.

Proposición a. Criterio de análisis / diseño con modelo MZT exacto.

Sea la dependencia de m de los coeficientes del polinomio $N_p(e^{j\theta}, m)$ tal que:

- 1- existe un par m_1 y m_2 tal que para cualquier valor $m_x \in [m^*, 1]$ se verifica $\arg N_p(e^{j\theta}, m_1) \leq \arg N_p(e^{j\theta}, m_x) \leq \arg N_p(e^{j\theta}, m_2)$ para toda frecuencia.
- 2- existe un (posiblemente otro) par m_1 y m_2 tal que para cualquier valor $m_x \in [m^*, 1]$ se verifica $|N_p(e^{j\theta}, m_1)| \leq |N_p(e^{j\theta}, m_x)| \leq |N_p(e^{j\theta}, m_2)|$. Esto puede ser válido en al menos un rango de frecuencias.

y, además, para el polinomio $D(z) = P_0(z)$, valga que

- 3- su $\arg D(e^{j\theta})$ no tiene mínimos ni máximos¹ en el rango de frecuencias entre $[\theta_1^*, \theta_2^*]$ delimitado por las intersecciones de $\arg D(e^{j\theta})$ con $(2k+1)\pi + \arg N_p(e^{j\theta}, m) - \theta l$ en (m_1, l_1) y $(m_2, 1)$.

Entonces,

¹ Eventualmente esto se puede conseguir con un adecuado diseño del controlador. El mayor problema de que no existan intersecciones con todos los argumentos existe si el sistema es inestable y se deben conseguir cruces a la izquierda del punto crítico.

Para garantizar C_R , debe ser $|D(e^{j\theta^*})| > |N_p(e^{j\theta}, m_2)| \quad \forall \theta_1^* \leq \theta \leq \theta_2^*$ (30)

Para garantizar C_L , debe ser $|D(e^{j\theta^*})| < |N_p(e^{j\theta}, m_1)| \quad \forall \theta_1^* \leq \theta \leq \theta_2^*$ (31)

En **Figura 5** se muestra como determinar las frecuencias de intersección θ_1^* y θ_2^* entre $\phi(m, l) = \arg N_p(e^{j\theta}, m) - \theta l$ y $\arg D(e^{j\theta})$ para dos posibles situaciones: si $\arg D(e^{j\theta})$ es creciente en ese rango de frecuencias (izq.) o decreciente (der.).

En **Figura 6**, se muestra la relación entre las magnitudes especificadas en las inecuaciones (30) **Figura 6**) derecha, y (31) **Figura 6**) izquierda.

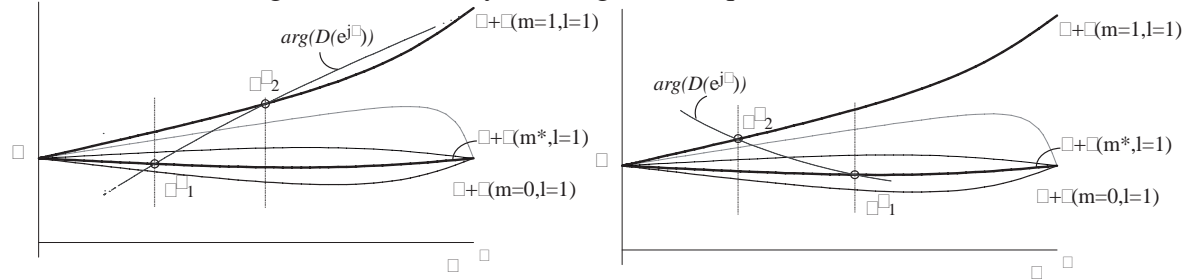


Figura 5: Ejemplos de cota superior e inferior del argumento en función de la frecuencia. Arg. de $D(z)$ creciente (izquierda) y decreciente (derecha).

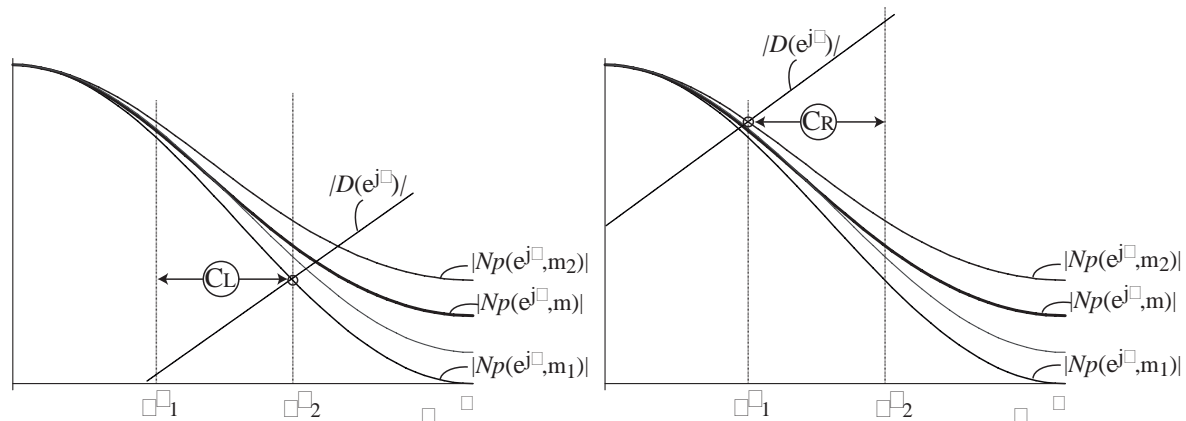


Figura 6: Condiciones C_R y C_L . Evoluciones de magnitud entre cotas superiores e inferiores para el rango de frecuencia de interés.

En algunos casos encontrar los valores de m_1 y m_2 que satisfacen (26) y (27), resulta simple (por ejemplo si la planta es un P_{T1} , Sección 2). Sin embargo, en otras plantas esto implica: 1) obtener la función transferencia de manera simbólica aplicando la transformada z modificada (que quede en función de m); 2) obtener cotas máximas y mínimas de argumentos y magnitudes en función de la frecuencia (en caso de no tener la expresión simbólica, la evaluación numérica implica calcular los polinomios para cada m en el continuo). Por esto se reformula la **Proposición a** usando el modelo MZT aproximado.

Proposición b. Criterio de análisis / diseño con modelo MZT aproximado.

El uso de la aproximación (20) indica que a medida que m decrece, el argumento en función de la frecuencia se hace más negativo, por tanto en la **Proposición a** se reemplaza en m_1 por m^* y en m_2 por 1, y para todo m intermedio vale:

1- $\arg \hat{N}_p(e^{j\theta}, m^*) \leq \arg \hat{N}_p(e^{j\theta}, m) \leq \arg \hat{N}_p(e^{j\theta}, 1) \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq \pi$ (32)

El valor de l sólo agrega más argumento negativo a medida que su valor crece. Esto es equivalente a lo que ocurre en CT.

En cuanto a la magnitud, se distinguen dos casos según el grado relativo r de la planta continua:

2- si r es impar, $m_1=0.5$ y $m_2=1$ (coinciden las magnitudes de $m=1$ y $m=0$). Es decir,

$$|\hat{N}_p(e^{j\theta}, 0.5)| \leq |\hat{N}_p(e^{j\theta}, m)| \leq |\hat{N}_p(e^{j\theta}, 1)| \text{ con } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (33)$$

3- si r es par, $m_1=1$ y $m_2=0.5$ (coinciden las magnitudes de $m=1$ y $m=0$). Es decir,

$$|\hat{N}_p(e^{j\theta}, 1)| \leq |\hat{N}_p(e^{j\theta}, m)| \leq |\hat{N}_p(e^{j\theta}, 0.5)| \text{ con } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (34)$$

Entonces:

Para garantizar C_R , debe ser $|D(e^{j\theta^*})| > |N_p(e^{j\theta}, m_2)| \forall \theta_1^* \leq \theta \leq \theta_2^*$, siendo $m_2=1$ si r impar o $m_2=0.5$ si r par. (35)

Para garantizar C_L , debe ser $|D(e^{j\theta^*})| < |N_p(e^{j\theta}, m_1)| \forall \theta_1^* \leq \theta \leq \theta_2^*$, siendo $m_1=0.5$ si r impar o $m_1=1$ si r par (36)

Lo conservativo de este criterio depende fundamentalmente de la diferencia entre las funciones máxima y mínima de la magnitud (33) y (34) para todo θ .

Como corolario de las Proposiciones a y b precedentes se propone el siguiente procedimiento de análisis/diseño.

Procedimiento

- 1- Dibujar la magnitud vs. frecuencia de $\hat{N}_p(e^{j\theta}, m)$ para $m=1$ y $m=0.5$, y $\arg(\hat{N}_p(e^{j\theta}, m)) - \theta l^* + (2k+1)\pi$ para (l^*, m^*) y $l=1, m=1$.
- 2- En torno a cada frecuencia donde ocurre una intersección de argumentos (26), calcular θ_1 y θ_2 según lo explicado en la **Proposición a**.
- 3- Verificar/imponer la satisfacción de las condiciones (35) y (36). También se debe analizar si se mantiene el signo de la derivada en torno a cada frecuencia de intersección.

3.2 Ubicación de las raíces del lazo cerrado – Performance

En (Felicioni y Junco, 2005) se considera una medida de la performance que depende de términos asociados con la respuesta temporal. En ese artículo, se observó en un caso de estudio que las raíces del denominador de lazo cerrado que dominan la evolución temporal son aquellas originales del lazo cerrado sin retardo que se desplazan con motivo de la aparición y aumento del retardo, dado que son las únicas en el semiplano derecho del círculo unitario. En esta Sección se presenta un tipo de sistema genérico, donde se verifica esto mismo, es decir, se presenta una extensión a un clase de sistema y controlador del resultado del caso de estudio.

Proposición c). *Performance de lazo cerrado.* Se consideran plantas continuas P_{Tn} estables (no tienen ceros), pudiendo admitirse polos en cero (o sea, integradores en cascada con una P_{Tn}), con controlador diseñado (sin polos inestables) tal que se verifica que $\frac{d|P_0(e^{j\theta})|}{d\theta} > 0$ y $\frac{d \arg P_0(e^{j\theta})}{d\theta} > 0$, para toda frecuencia, siendo $P_0(z)$ definido en (24).

- a) Si $|P_0(e^{j\theta})| > k_b$,
 - entonces el sistema es estable independientemente del retardo (para todo retardo positivo).
- b) Si $|P_0(e^{j\theta})| < k_b$ para alguna frecuencia,

- entonces la estabilidad depende del retardo.

Demostración:

Si la planta continua no tiene ceros,

$$\hat{N}_p(z, m) = k_b B_n(z, m) \quad (37)$$

y en (29),

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{|P_0(e^{j\theta})|} \frac{d(|k_b B_n(e^{j\theta}, m)|)}{d\theta} - \frac{|k_b B_n(e^{j\theta}, m)|}{|P_0(e^{j\theta})|^2} \frac{d(|P_0(e^{j\theta})|)}{d\theta} \quad (38)$$

Para cada valor de m la derivada parcial de la magnitud de $B_n(z, m)$ con respecto a θ es menor o igual a cero para toda frecuencia. Es decir, $\frac{d(|k_b B_n(e^{j\theta}, m)|)}{d\theta} \leq 0$ (39)

Usando la hipótesis de $\frac{d(|P_0(e^{j\theta})|)}{d\theta} > 0$ y expresión (39) en (38), entonces se puede garantizar que $\sigma(\theta) < 0$. Es decir, según lo definido en criterio simplificado de Nyquist (Apéndice 1), el signo es siempre positivo. Además, de acuerdo a la hipótesis de planta y controlador estables, la suma neta debe ser nula, es decir se debe tener la misma cantidad de cruces C_L con signos negativos y positivos.

Como no hay cruces con signo negativo negativos, dado que $\sigma(\theta) < 0$, entonces no puede haber cruces a la izquierda del punto crítico (no deben existir C_L). Por tanto, sólo son admisibles C_R en las frecuencias de intersección.

Para satisfacer C_R se debe verificar (30).

Si vale hipótesis a), y como $|k_b B_n(e^{j\theta}, m)| < |k_b|$ para todos θ , m y n , entonces se verifica (30) para toda frecuencia, y el sistema es siempre estable (lo que equivale a estable independientemente del retardo).

Si vale hipótesis b), existe algún valor de frecuencia donde $|P_0(e^{j\theta})| = |N_p(e^{j\theta}, m)|$. Si para algún par (m, l) esta frecuencia es también una de cruce, es decir satisface la ecuación (26), entonces el sistema es inestable y la estabilidad depende del valor del retardo.

Si además vale $|N_p(e^{j\theta^*}, m_1)| > |P_0(e^{j\theta^*})|$, entonces para cualquier frecuencia de cruce (26) no vale C_R , por lo que el sistema resulta inestable. \square

Comentario sobre performance

A partir de lo anterior, en el caso b) se tiene que a medida que aumenta el retardo, el argumento de N_p se hace más negativo y entonces las frecuencias de cruce (26) se reducen. Por esto, la mínima frecuencia de intersección se vuelve determinante para el estudio de la estabilidad, ver Figuras 5 derecha y Figura 4 izquierda (y ejemplo). Es decir, la posibilidad de que el sistema se inestabilice está asociada al primer cruce, que en general se produce en la región de más baja frecuencia (a mayor retardo menor frecuencia del primer cruce) y, por ende, si las raíces salen del círculo, lo hacen por la sección del círculo en el semiplano derecho del plano complejo z .

4 CASO DE ESTUDIO

En esta sección se considera como caso de estudio, un sistema previamente presentado en (Felicioni y Junco, 2005). Se compara la RF de la aproximación discreta con la de MZT exacta. Su proximidad permite analizar el problema de estabilidad para $\leq h$, utilizando 1 o establecido en la Proposición b. Se considera también, en tal grafica, el problema de que

$\tau \leq 2h$ y se trata el re-ajuste que debe hacerse de la ganancia del controlador de manera de sea estable.

La posibilidad de acotar los coeficientes de la función transferencia obtenida con la MZT, permite abordar el problema para $\tau \leq h$ con métodos alternativos a los presentados en este artículo, como la Teoría de estabilidad robusta (Bhattacharyya et al., 1995) o la simplificación de cada condición de Jury tomando máximos y mínimos para cada coeficiente, lo cual se muestra en la siguiente Sección. Por ello, en Sección 4.2 se presentan los resultados y se comparan con lo obtenido vía el análisis frecuencial, demostrando las ventajas de este segundo método. Para finalizar se considera la performance de lazo cerrado considerando lo establecido en la *Proposición c*.

4.1 Presentación del sistema

Sea el sistema I_{T1} considerado en (Felicioni y Junco, 2005)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad (40)$$

Las especificaciones del diseño son que el sobrevalor (Mp) no supere el 20% y el tiempo de crecimiento (definido al 5%) sea ≤ 1.5 seg, ver (Ogata, 1996).

Con esto, la frecuencia natural de lazo cerrado es $\omega_0 \cong 4.2$. Entonces, a partir del criterio empírico de (Astrom y Wittenmark, 1990), ampliamente utilizado en el dominio de los NCS, el período de muestreo que se puede elegir para garantizar cierta performance en relación con la respuesta temporal del sistema es $0.2/\omega_0 \leq h \leq 0.8/\omega_0$.

Considerando este límite superior, h se elige 0.2 seg, entonces el modelo discreto es

$$G_d(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-hs}}{s} \frac{1}{s(s+2)} \right\} = \frac{0.0178(z+0.876)}{(z-1)(z-0.6703)} \quad (41)$$

La función transferencia del controlador (42) satisface tales criterios de diseño (se cancela un polo estable de la planta con un cero del controlador) y $k_c = 13.57$

$$C(z) = k_c \frac{z - 0.6703}{z - 0.2644} \quad (42)$$

La planta con retardo no múltiplo del período de muestreo discretizada con la MZT es

$$G_d(z, m) = k \frac{\alpha_m z^2 + \beta_m z + \gamma_m}{z^l(z-1)(z-0.6703)} \quad (43)$$

donde

$$\begin{cases} \alpha_m = 2mh - 1 + e^{-2mh} \\ \beta_m = 1 - 2mh + 2h + e^{-2h} - 2mh e^{-2h} - 2e^{-2mh} \\ \gamma_m = e^{-2mh} - e^{-2h} + 2mh e^{-2h} - 2h e^{-2h} \\ k = \frac{kc}{2^2} \end{cases} \quad (44)$$

α , β y γ son funciones continuas de m , es decir los coeficientes tienen una dependencia no lineal de la parte fraccional del retardo $= \frac{(lh-\tau)}{h}$.

Aquí, entonces

$$z^{-l} N_p(z, m) = z^{-l} k (\alpha_m z^2 + \beta_m z + \gamma_m) \quad (45)$$

La aproximación de (9) es

$$z^{-l} \hat{N}_p(z, m) = z^{-l} k_b (m^2 z^2 + (1 + 2m - 2m^2)z + (1 - 2m + m^2)) \quad (46)$$

Donde $k_b = \frac{1}{2} a h (1 - e^{-ah}) = 0.065936$.

Los coeficientes de (45) y (46) son comparados, uno a uno, en Figura 7.

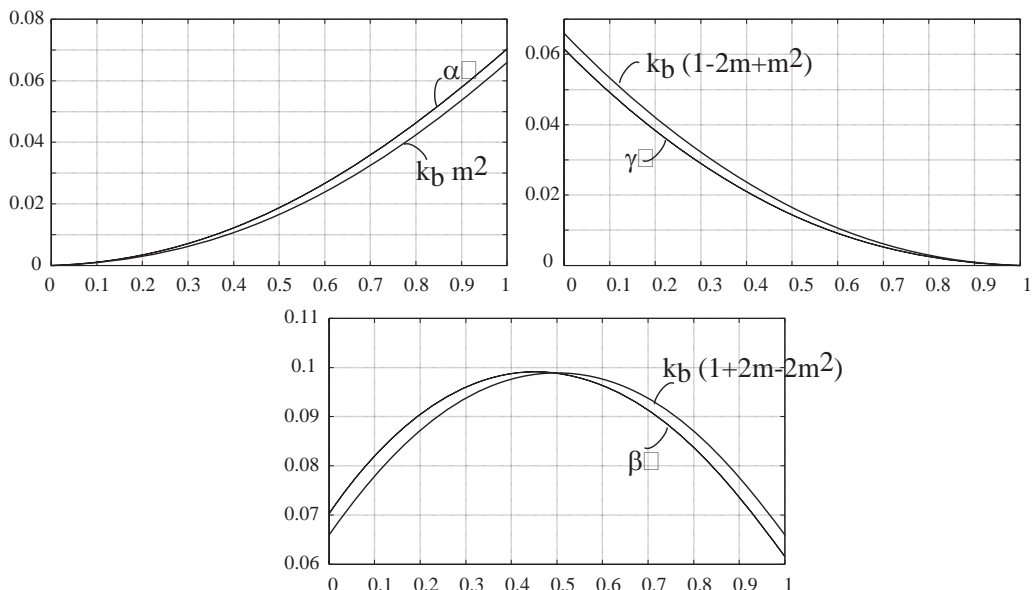


Figura 7: Comparación de los parámetros de $N_p(z,m)$ y de su aproximación.

En la Figura 6 de (Felicioni y Junco, 2005) se graficaron las ecuaciones de Jury para retardos inferiores al período de muestreo. Las condiciones a evaluarse para un polinomio de tercer orden considerando (42), son satisfechas, es decir el sistema controlado es estable para cualquier retardo acotado por h . Esto puede ser corroborado vía el mapeo de polos del sistema controlado, en la Figura 8 se ve para algunos valores de retardo específicos. Pero ambos análisis requieren una evaluación de cada valor de m en el continuo entre 0 y 1.

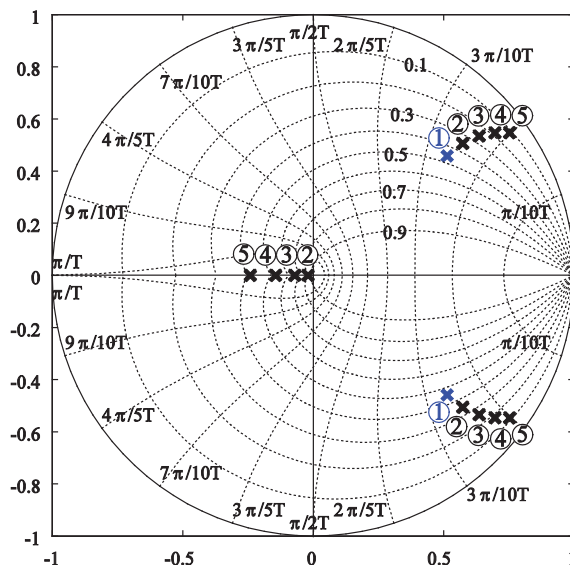


Figura 8: Ubicación de los polos. ① Sistema sin retardo. ② $\tau=0.05$ s. ③ $\tau=0.1$ s. ④ $\tau=0.15$ s. ⑤ $\tau=0.2$ s.

4.2 Evaluación de Estabilidad. Análisis vía respuesta en frecuencia.

En Figura 9 se muestra la respuesta en frecuencia de $N_p(z, m)$ y $\hat{N}_p(z, m)$, para algunos m . Ambas tienen muy poca diferencia en la zona de baja frecuencia, en este ejemplo la

zona de mayor interés para análisis de estabilidad. Por ello, el uso de la aproximación discreta es muy adecuado en un análisis frecuencial.

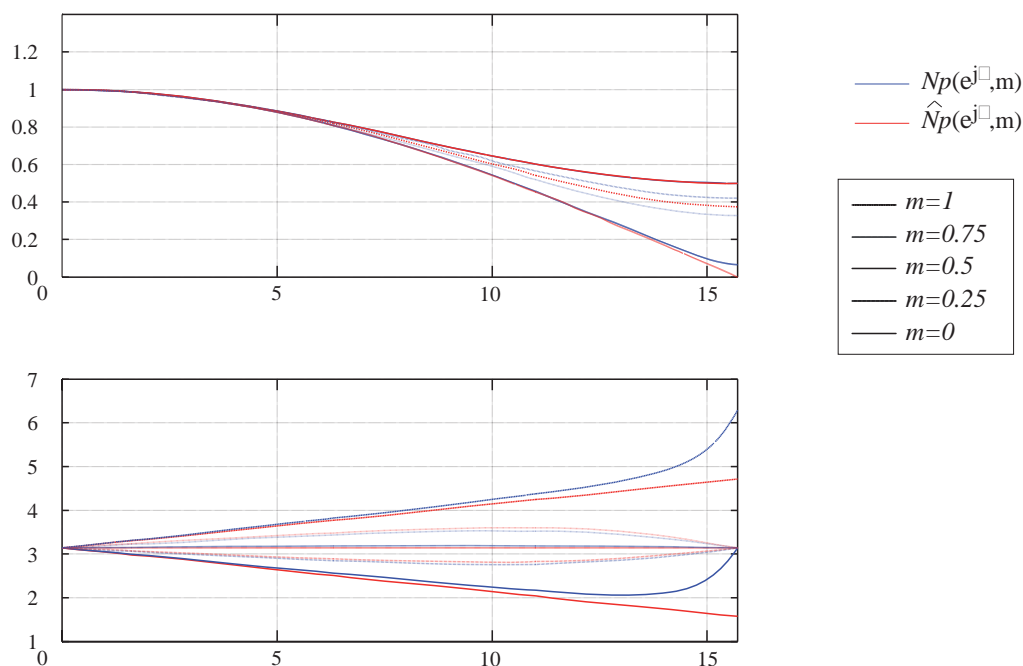


Figura 9: Respuesta en frecuencia, método de lazo abierto $N_p(z, m) - \theta + \pi$ y su aproximación.

Los ceros y polos de $C(z)$ se incorporan al lazo abierto (se cancela el polo estable de la planta con un cero del C). Entonces, $D(z) = (z - 1)(z - 0.2644)$ es el denominador de la ganancia de lazo. En la Figura 10 se muestra la RF de $D(z)/k_c$ y se guarda además la RF de la aproximación discreta.

La ganancia k_c sólo puede modificar la magnitud (para k_c inferior la curva de magnitud se desplaza hacia arriba).

Dado que valen las hipótesis de **Proposición c**, es decir $\frac{d|P_0(e^{j\theta})|}{d\theta} > 0$ y $\frac{d \arg P_0(e^{j\theta})}{d\theta} > 0$, y planta y controlador son estables, entonces en todas las intersecciones debe valer C_R (la suma neta debe ser nula). Además, como $P_0(1) = 0$ entonces existe un cruce de magnitudes ($|D(z)|$ no siempre supera a $|N_p(z, m)|$) y la estabilidad depende del retardo (**hipótesis b de Proposición c**).

En la gráfica de argumento se observa que los cruces para polinomios intermedios de $m=0$ y $m=1$ con el argumento de $D(z)$ están delimitados a la izquierda por θ_1^* y a la derecha por θ_2^* . Para este rango de frecuencias, como se ve en Figura 10 (de magnitud) se cumple C_R , por tanto el sistema resulta estable para $\tau \leq h$. Se satisface **Proposición b**.

La máxima ganancia que puede tener el sistema con retardo entre 0 y h que garantice la estabilidad de todo el intervalo, se puede calcular como $k_c < \frac{|D(e^{j\theta_1^*})|}{|N_p(e^{j\theta_1^*, m=0.5})|} = 17.45165$.

Este valor resulta un poco más conservativo que el exacto que se calcula con un proceso iterativo de prueba y error evaluando las raíces para $0 \leq \tau \leq h$ y que resulta $k_{cM} = 17.829$.

Además, la utilización del criterio de Sección 3 permite analizar la estabilidad para sistemas con retardos superiores a h y visualizar los cambios que pueden hacerse en la ganancia del controlador de manera de garantizar la **proposición b**, con la gráfica hecha previamente.

Por ejemplo, es posible verificar en **Figura 10** que para $\tau=2h$ ($m=1, l=2$), el rango de frecuencias entre θ_3^* y θ_1^* , la magnitud no siempre verifica C_R , (por ejemplo, en θ_3^* no vale C_R), por tanto en este rango de frecuencia existe un retardo a partir del cual se pierde la estabilidad del sistema.

Para evitar la inestabilidad para $\tau \leq 2h$, se puede reducir $k_c < \frac{|D(e^{j\theta_3^*})|}{|N_p(e^{j\theta_3^*, m=0.5})|} = 11.2762$.

La ganancia máxima para retardos inferiores a h se puede calcular de la siguiente manera: calculando las frecuencias de intersección θ_q^* entre ambos argumentos para $0 < m < 1$, y evaluando la expresión de magnitud, i.e. $k_{cMA} = \frac{|D(e^{j\theta_q^*})|}{|N_p(e^{j\theta_q^*, m=0.5})|}$. La relación ganancia-retardo se grafica en la **Figura 11** (se utiliza la magnitud para $m=0.5$ por tanto es apenas conservativo).

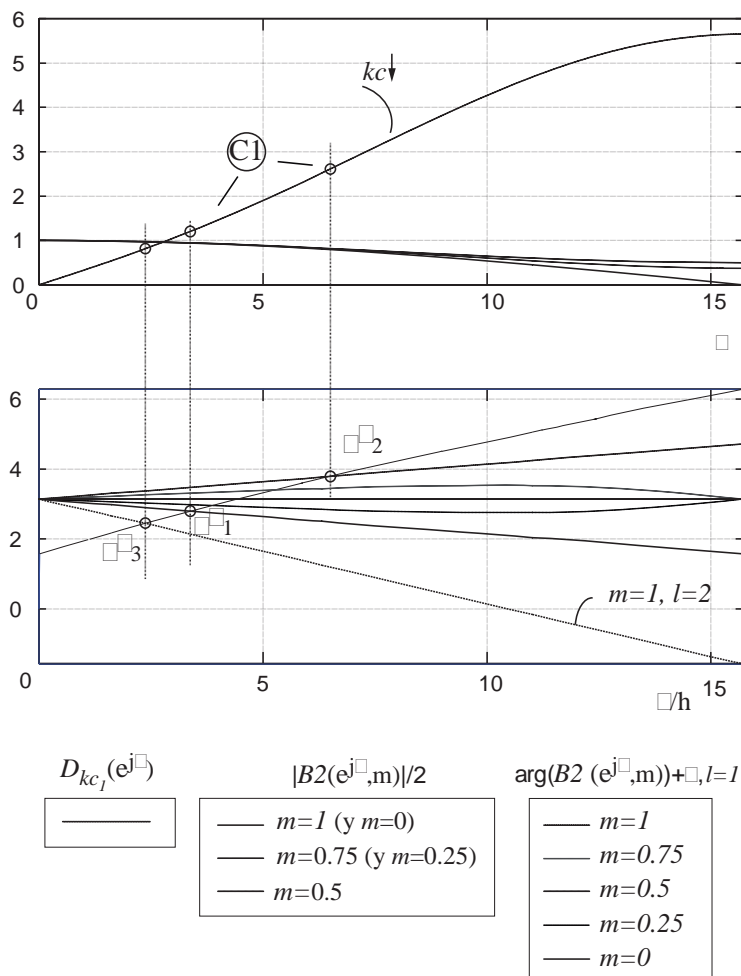


Figura 10: Respuesta en frecuencia método de lazo abierto con el denominador.

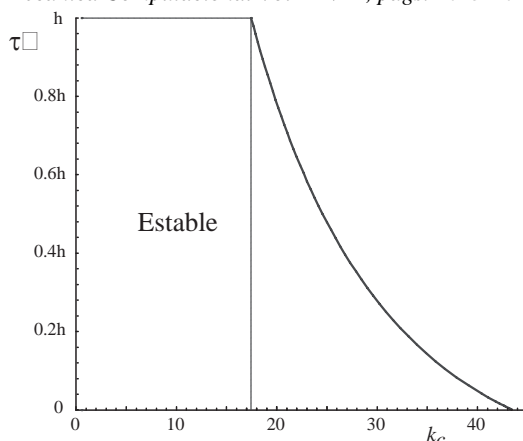


Figura 11: Región de estabilidad, τ vs. k_c .

4.3 Comparación con otros criterios

Estabilidad robusta de polinomios

Los parámetros α , β y γ pueden asumir un valor continuo entre dos extremos, ver Figura 7. Por ello, puede realizarse un análisis de estabilidad robusta de politopos.

Dado que el término asociado con z^3 permanece constante se puede usar el Lema 5.5 de (Bhattacharyya et al., 1995), es decir evaluar los 2^3 polinomios en los vértices.

El polinomio invariante en lazo abierto es $P_0(z) = z(z-1)(z-0.2644)$ y los parámetros hasta el grado dos inclusive ($q_2z^2 + q_1z + q_0$) se calculan del análisis de valores mínimos y máximos de α , β y γ . (la familia de polinomios es $P(z) = P_0(z) + q_2z^2 + q_1z + q_0$).

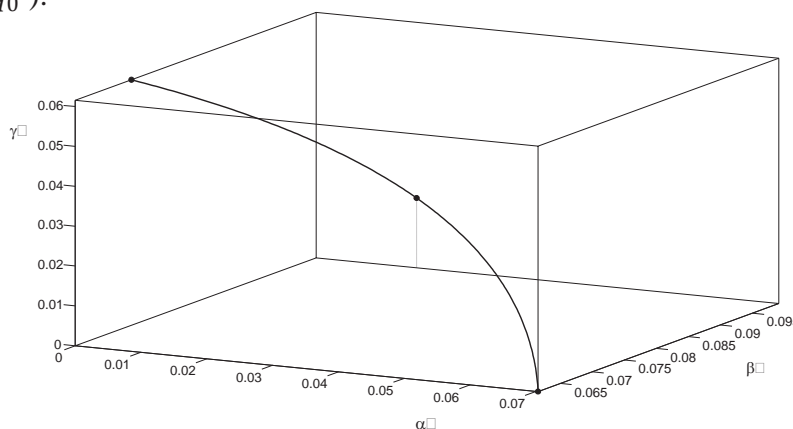


Figura 12: Parámetros dentro de la caja delimitada por sus vértices.

Sus valores máximos y mínimos son

$$V = \{q_2^+ = 0.0703 kc, q_2^- = 0; q_1^+ = 0.09912 kc, q_1^- = 0.061552 kc; q_0^+ = 0.061552 kc, q_0^- = 0\}$$

Estos extremos permiten definir los vértices de la caja (Figura 12).

Usando la aproximación (16) de B_2 , el máximo de m^2 es 1 y el mínimo 0, el máximo de $(1 - 2m^2 + 2m)$ vale 1.5 (para $m=0.5$) y el mínimo vale 1, y para $1 + m^2 - 2m$ el máximo (en $m=0$) vale 1 y el mínimo (en $m=1$) vale 0.

A estos máximos y mínimos se los debe multiplicar por $k_b = 0.065936$. Entonces,

$$\tilde{V} = \{\tilde{q}_2^+ = 0.065936 kc, \tilde{q}_2^- = 0; \tilde{q}_1^+ = 0.0989 kc, \tilde{q}_1^- = 0.065936 kc; \tilde{q}_0^+ = 0.065936 kc, \tilde{q}_0^- = 0\}$$

Las diferencias de los valores aproximados respecto a los exactos son: +6.2% en q_1 , del 0.2% en q_2 y -7.1% en q_3 .

Aquí existe una primera diferencia con respecto al otro método, si bien los valores máximos y mínimos pueden tener una variación inferior al 10 %, la respuesta en frecuencia tiene muy poca diferencia en la zona de baja frecuencia, donde en este ejemplo es la zona de mayor interés para análisis de estabilidad, por ello el uso de la aproximación resulta más apto en un análisis frecuencial que en uno de máximos y mínimos.

En este caso, se calculan la estabilidad vía el Lema 2 usando los valores exactos V . Es posible verificar que los 8 polinomios de los vértices son estables para $k_c=13.57$, y por tanto el sistema es estable para cualquier $\tau \leq h$.

Más aún, si se considera el mínimo de $q_1^- = \varepsilon k c$ con $\varepsilon > 0$, es posible verificar que para $0 < k_c \leq 15.35$ el sistema es (robustamente) estable. El máximo radio espectral ocurre para $V_6 = P_0(z) + (q_2^- z^2 + q_1^+ z + q_0^+)$ y vale 0.9997.

Aproximación de condiciones de Jury:

Para simplificar el análisis se utiliza la aproximación de $N_p(z, m)$

$|a_0| < 1$, esto es $|k_b k(1 + 2m - 2m^2)| < 1$, como el máximo de $(1 + 2m - 2m^2)$ es 1 entonces una cota máxima del término de la izquierda es $|k_b k|$ entonces $k_c < 60.665$.

$P(z = 1) > 0$, esto es $1 + (\bar{a}_2 + q_2) + (\bar{a}_1 + q_1) + q_0 = 1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_1 + k k_b (m^2 + (1 + 2m - 2m^2) + (1 - 2m + m^2)) = 1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_1 + 2k k_b$, como $\bar{a}_1 = 0.2644$ y $\bar{a}_2 = -1.024$, entonces $1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_1 = 0$, y si k es positiva $2k k_b$ también lo es verificando la segunda condición.

$P(z = -1) < 0$, esto es $-1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_1 + k k_b (m^2 - (1 + 2m - 2m^2) + (1 - 2m + m^2)) = -1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_1 + k k_b (4m^2 - 4m)$, cuyo máximo, si es $k > 0$, es $-1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_1 = -2.5288$, verificando la tercera condición.

$\frac{|a_0 a_2 - a_1 a_3|}{|a_0^2 - a_3^2|} < 1$, si tomo el término a la izquierda $\frac{|q_0(\bar{a}_2 + q_2) - (\bar{a}_1 + q_1)|}{|q_0^2 - 1|}$, y sus valores máximos en el numerador y mínimos en el denominador tengo una cota superior de este término.

Si uso los valores aproximados entonces $\frac{|k_b k(1 - 2m + m^2)(\bar{a}_2 + k_b k m^2) - (\bar{a}_1 + k_b k(1 + 2m - 2m^2))|}{|(k_b k)^2(1 - 2m + m^2)^2 - 1|}$, distribuyendo $\frac{|(k_b k)^2 m^2(1 - 2m + m^2) + k_b k \bar{a}_2(1 - 2m + m^2) - \bar{a}_1 - k_b k(1 + 2m - 2m^2)|}{|(k_b k)^2(1 - 2m + m^2)^2 - 1|}$. Como $\bar{a}_1 > 0$ y $\bar{a}_2 < 0$ (y suponiendo $(k_b k) < 1$), entonces su máximo está acotado por $\frac{|k_b k \bar{a}_2 - \bar{a}_1 - 1.5 k_b k|}{|(k_b k)^2 - 1|}$. A cálculo hecho, este máximo resulta inferior a 1 si $k_c \leq 14.61$.

El problema de esta técnica es que para cada condición de Jury se deben obtener mínimos y máximos y los mismos también dependen de los signos de los coeficientes.

4.4 Performance ante retardos crecientes

A continuación, en [Tabla 1](#) se muestran los polos de lazo cerrado para algunos valores de m , calculados de manera exacta (con $N_p(z, m)$ aproximada (con $\hat{N}_p(z, m)$).

m	Polos exactos	Polos aproximados
1	{0, 0.513±j.4584}	{0, 0.52±j 0.4662}
0.75	{0.573 ± j 0.5062, -0.0201}	{0.580 ± j 0.5114, -0.0233}
0.5	{0.636 ± j 0.534, -0.0706}	{0.644 ± j 0.536, -0.0796}
0.25	{0.69635 ± j 0.54646, -0.1447}	{0.7043 ± j 0.54665, -0.1583}
0	{0.7527 ± j 0.5471, -0.24113}	{0.7599 ± j 0.5465, -0.2553}

Tabla 1: Polos de lazo cerrado, exactos y aproximados.

Los polos son muy cercanos, dando un buen grado de validez a la utilización de la aproximación.

En cuanto a la respuesta temporal, dada la variación continua de los coeficientes con respecto a m , se tiene una continuidad de las raíces.

En la [Figura 10](#) se puede observar que el primer cruce para distintos valores de m se hace cada vez a menor frecuencia (tal como se había postulado en la **Proposición c**), por tanto si el sistema se inestabiliza esto ocurre para $0 < \theta < \pi/2$. Esto significa que existen raíces que salen del círculo en el semiplano derecho.

En este ejemplo, para el caso de $\tau \leq h$ se tiene que $k_c \gamma_m > 0$ para $m < 1$, y del análisis de polinomios de tercer orden es $-r^2 * p_3$ (donde p_3 es la tercera raíz del polinomio y r es el modulo de las raíces complejas), entonces $p_3 < 0$, y por tanto, no afecta demasiado en la respuesta en frecuencia. Luego, como se observó en ([Felicioni y Junco, 2005](#)) la performance puede ser aproximada sólo considerando aquellas raíces que dentro del círculo unitario están en el semiplano derecho.

5 CONCLUSIONES

Los resultados presentados en la Sección 2.4 que comparan los resultados de la aproximación discreta considerada en este artículo y los obtenibles con una aproximación continua muy difundida en la literatura, avalan la elección del enfoque discreto para tratar el problema de estudiar la estabilidad de sistemas con retardos acotados pero desconocidos.

A partir del caso de estudio se puede concluir que el uso de la aproximación discreta, tiene buenos resultados en la zona de baja frecuencia, la cual es de mayor interés para análisis de estabilidad. Además, el uso de esta aproximación resulta más apto en un análisis frecuencial que la evaluación de politopos o Jury.

El análisis de retardos superiores a h , puede ser simplemente hecho agregando los argumentos $N(z,0) - \theta l + \pi$ a la gráfica original, para distintos valores de l . Esto permite concluir en una misma figura sobre la estabilidad para retardos con distintas partes enteras l . Esto representa una ventaja en contraposición con los métodos de estabilidad robusta que requieren evaluar la estabilidad de los polinomios en los nuevos vértices y/o aproximar más (mayor orden \rightarrow mayor cantidad de condiciones) condiciones de Jury.

Además, la evaluación usando el análisis frecuencial permitió obtener un valor menos conservativo de la ganancia máxima que el sistema puede tener para retardos entre 0 y h que la obtenible con el método robusto y con la aproximación de las condiciones de Jury.

Utilizando la proposición sobre *performance* presentada en la Sección 3, se puede inferir el comportamiento de las raíces de lazo cerrado para retardos crecientes, que fuera previamente observado, vía simulación, en el artículo ([Felicioni y Junco, 2005](#)).

6 REFERENCIAS

- Aström K. J., Hagander P., J. Sternby, Zeros of sampled systems. *Automatica*, vol 20, pp. 31-38, 1984.
- Bhattacharyya S.P., H. Chapellat, L.H. Keel. Robust Control - The Parametric Approach. *Prentice Hall Information and System Sciences Series; Prentice Hall; NJ, USA*, pp. 648. 1995.
- Branicky M.S., S.M. Phillips y W. Zhang. Stability of networked control systems: Explicit analysis of delay. *Proc. Amer. Control Conf.*, Chicago, IL, pp. 2352-2357. Junio 2000.
- Chen, T. W. y B. Francis. Optimal Sampled-Data Control Systems. *Springer*. Londres. 1995.

- Felicioni F., Junco S. "Analysis of Stability and Performance of Simple Networked Control Systems", *In proc. of 17th IMACS World Congress "IMACS: International Association for Mathematics and Computers in Simulation"*, Paris, Francia. Julio 2005.
- Franklin G. y J. Powell. Digital Control of Dynamic Systems, *Addison-Wesley*, 1980.
- Halevi Y. y A. Ray. Integrated communication and control systems: Part I Analysis. *J. Dynamic Syst., Measure. Contr.*, Vol. 110, pp. 367-373. December 1988.
- Hara S., Kondo R., Katori H. "Properties of zeros in digital control systems with computational time delay" *International Journal of Control*. Vol. 49, no2, pp. 493-511. 1989.
- Hinrichsen D. y A. J. Pritchard, "Mathematical Systems Theory I. "Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness.", *Springer-Verlag*, Berlin. 2005.
- Juanole G. Quality of Service of Communication Networks and Distributed Automation: Models and Performances, *IFAC 15th Triennial World Congress*, Barcelona. Julio 2002.
- Jury E. I. Theory and Application of the z-Transform Method. *Wiley*, New York. 1964.
- Kharitonov, V.L. Zhabko, A.P. "Robust stability of time-delay systems" *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume: 39, Issue: 12 pp: 2388-2397. Dec 1994.
- Lian, F.-L., Moyne, J., Tilbury, D. "Time Delay Modeling and Sample Time Selection for Networked Control Systems". *Proceedings of ASME-DSC*, 2001.
- Nilsson J. Real-time Control Systems with Delays, *PhD Thesis, IT Lünd*. Sweden, January 1998.
- Ogata K.. Sistemas de control en tiempo discreto, *Prentice Hall, Mejico, segunda edición*. 1996.
- Rantzer A. "Stability conditions for polytopes of polynomials". *IEEE Trans. Autom. Contr.* AC -37:79-89, 1992.
- Tipsuwan, Y. y M. Y. Chow. Control methodologies in networked control systems. *Control Engineering Practice* 11, 1099-1111. 2003.
- Vidyasagar M., R.K. Bertschmann y C. S Sallaberger Some simplifications of the graphical nyquist criterion. *IEEE Trans Automatic Control*. 1988.
- Yaniv, O., Quantitative Feedback Design of Linear and Nonlinear Control Systems. *Kluwer Academic Publishers*. Norwell, MA, USA. 1999.
- Yook J., D.Tilbury y N.Soparkar. A Design Methodology for Distributed Control Systems to Optimize Performance in the Presence of Time Delays. *Proc. Amer. Control Conf.* Chicago. Junio 2000.
- Zhang W., M. Branicky y S. Phillips. Stability of networked control Systems. *IEEE Control System Magazine* pp.: 84-99. Febrero 2001.
- Zhong Q.. Robust stability analysis of simple systems controlled over communication networks. *Technical Communique. Automatica Vol: 39*, pp. 1309-1312, 2003.

Apéndice 1

Criterio de Nyquist en tiempo discreto

En el criterio de Nyquist interesa saber particularmente el valor de la magnitud de la curva de Nyquist $L(e^{j\omega h})$ (ganancia de lazo evaluada en $z = e^{j\omega h}$) para los valores de frecuencia donde $\arg(L(e^{j\omega h})) = -\pi(2k + 1)$ (las frecuencias de cruce $\theta_{(2k+1)\pi} = \omega_{(2k+1)\pi}h$), es decir cuando el lugar de la ganancia de lazo cruza el eje real negativo. Las frecuencias donde se producen los cruces se denominan por simplicidad $\theta^* = \theta_{(2k+1)\pi}$.

Si $|L(e^{j\theta^*})| < 1$, entonces el cruce se produce a la derecha del punto crítico $(-1, j0)$, mientras que sino el cruce ocurre entre $(-\infty, j0)$ y $(-1, j0)$. La primera condición se denomina aquí C_R (right) y la segunda C_L (left).

En este trabajo, se propone usar la siguiente simplificación del criterio de Nyquist de Vidyasagar et al. (1988), en su versión para sistemas discretos, ver (Yaniv, 1999).

Teorema simplificado de Nyquist

Sea R_0 la línea que une $(-\infty, j0)$ con $(-1, j0)$, cada C_L ocurre cuando el lugar de Nyquist de $L(z)$ interseca R_0 . El cruce se define positivo si en la intersección la magnitud crece hacia arriba y negativa en caso contrario (Figura A.1).

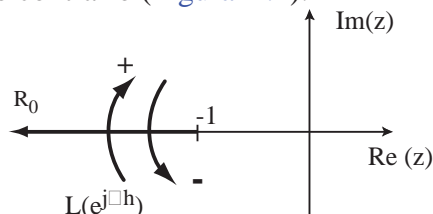


Figura A.1: Definición del signo del cruce.

Entonces, el sistema de control realimentado es estable *si sólo si* el lugar de Nyquist no interseca el punto $(-1, j0)$ y la suma neta de sus cruces C_L es igual a η , donde η es el número de raíces inestables del denominador de L (o la rama positiva de frecuencias sólo debe cruzar $\eta/2$ veces).

Para realizar la suma neta, se necesita determinar en primer lugar si el cruce se produce a la izquierda o a la derecha del punto crítico. Si existen cruces a la izquierda (C_L), se debe analizar el signo de la magnitud en cada uno de tales cruces; es decir

$$\sigma(\theta) = \frac{d|L(e^{j\theta})|}{d\theta} \text{ evaluada en } \theta^* \quad (\text{A.1})$$

Si $\sigma(\theta^*) < 0$ entonces el signo definido en Figura A.1 es positivo y viceversa.