

MODELADO NUMERICO DEL PROCESO DE SOLDADURA FSW INCORPORANDO UNA TECNICA DE ESTIMACION DE PARAMETROS

S. Pereyra^a, G. Lombera^a, S. Urquiza^a y L. de Vedia^b

^aFacultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata,

J. B. Justo 4302, 7600 Mar del Plata, Argentina, spereyra@fi.mdp.edu.ar

^bComisión Nacional de Energía Atómica, Universidad Nacional de San Martín,
Av. Gral. Paz 1499, 1650 San Martín, Argentina

Palabras Clave: Estimación de parámetros, Problema inverso, Friction Stir Welding.

Resumen. Si bien los modelos numéricos de transferencia de calor y de flujo de fluido han contribuido a la comprensión del proceso de soldadura por fricción-agitación (FSW), existen ciertos parámetros de entrada a los modelos que no pueden determinarse fácilmente a partir de principios fundamentales o de las condiciones de soldadura. Como resultado, las predicciones del modelo no siempre están de acuerdo con los resultados experimentales. En este trabajo, se usa el método de Levenberg-Marquardt (LM) para estimar de manera no lineal los parámetros desconocidos presentes en los modelos de transferencia de calor y de flujo de fluido, ajustando las temperaturas obtenidas con los modelos a mediciones experimentales de temperatura. Estos modelos se implementaron en un programa de propósito general que emplea una formulación numérica desarrollada a partir del Método de los Elementos Finitos (MEF). Los parámetros que se desconocen son: el coeficiente de fricción y la cantidad de adherencia del material a la superficie de la herramienta, el coeficiente de transferencia de calor en la superficie inferior y la cantidad de disipación viscosa convertida en calor. Los resultados obtenidos revelan el interés en la incorporación de técnicas de estimación de parámetros para mejorar las predicciones de los modelos numéricos.

1 INTRODUCCION

El proceso de soldadura Friction Stir Welding (FSW) fue desarrollado en Inglaterra en el año 1991 por The Welding Institute (TWI). Se trata de un proceso de unión en estado sólido, es decir, el material no alcanza su temperatura de fusión durante el mismo. La herramienta de soldadura está construida generalmente en una sola pieza y, básicamente, se diferencian dos partes, un perno y un apoyo (ver [Figura 1](#)).

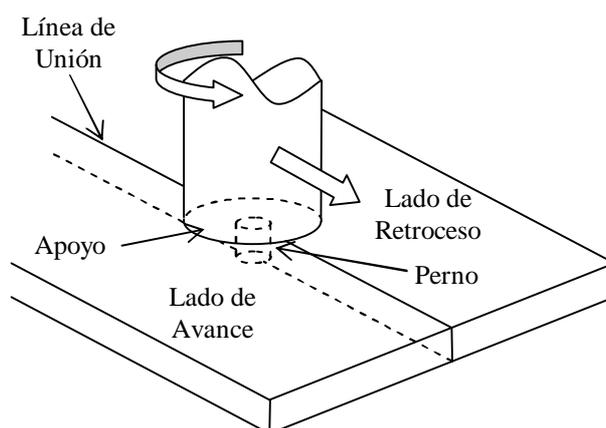


Figura 1: Esquema del proceso de soldadura FSW

El proceso comienza con la introducción del perno entre las piezas a unir, manteniendo la herramienta girando, hasta que el apoyo hace contacto con las superficies de las piezas. A continuación se le impone una velocidad de avance a la herramienta en dirección a la línea de soldadura. La intensa fricción entre la herramienta y el material de las piezas, y la gran deformación plástica del material alrededor de la herramienta, contribuyen a producir un aumento de la temperatura en una zona cercana a la herramienta. El ablandamiento del material alrededor del perno, debido a las altas temperaturas, y la acción combinada de la rotación y la traslación de la herramienta, conduce al material del frente del perno hacia atrás del mismo, generando la unión de las piezas. Debajo de las placas se coloca una base que sirve de soporte para restringir el movimiento y absorber los esfuerzos que surgen de la presión de la herramienta y, además, participa en la extracción del calor.

Existen diversos trabajos de simulación numérica del proceso de soldadura FSW en los que se emplean modelos de flujo viscoplástico con acoplamiento termomecánico ([Ulysse et al., 2002](#); [Santiago et al., 2004](#) y [2005](#); [Colegrove et al., 2005](#); [Nandan et al., 2007a](#)). Si bien estos trabajos han contribuido a la comprensión del proceso de soldadura por FSW, existen ciertos parámetros de entrada a los modelos cuyos valores no pueden determinarse fácilmente a partir de principios fundamentales o de las condiciones de soldadura. En este sentido, se han llevado a cabo trabajos que aplican distintas alternativas para mejorar la confiabilidad de los resultados en base a datos experimentales.

Entre ellos, se destaca el trabajo de [Zhu et al. \(2004\)](#) en modelado térmico de acero inoxidable 304L. En este trabajo el valor de la fuente de generación de calor y la resistencia al flujo de calor hacia la placa base se obtuvieron haciendo análisis inverso.

Por otra parte, [Nandan et al. \(2007b\)](#) aplicaron técnicas de estimación de parámetros a un modelo de flujo viscoplástico y de transferencia de calor de un acero AISI 1018 laminado en caliente donde imponen una resistencia al flujo de calor hacia la placa soporte y consideran una generación de calor compuesta de dos aportes, una de fricción y otra de deformación plástica,

asignando un deslizamiento relativo entre las superficies en contacto tomado del proceso de laminado.

El propósito del presente trabajo es obtener a través de una técnica de estimación de parámetros el valor de cuatro parámetros de entrada al modelo de elementos finitos del proceso de soldadura FSW, considerando el ajuste de los resultados numéricos de temperatura a datos experimentales.

Estos cuatro parámetros son: la fracción de deslizamiento del material en contacto con la herramienta, la fracción de calor generado por esfuerzos viscosos, la conductancia correspondiente a la transferencia de calor hacia la base y el coeficiente de fricción entre la herramienta y el material.

2 DESARROLLO

2.1 Modelado numérico del proceso

La geometría del modelo se compone de la herramienta, las piezas a soldar y la placa base (ver Figura 2). La forma y dimensiones de la herramienta, así como el espesor, ancho y longitud de las piezas a soldar y la placa base, se corresponden con las de los datos del trabajo de Zhu et al. (2004).

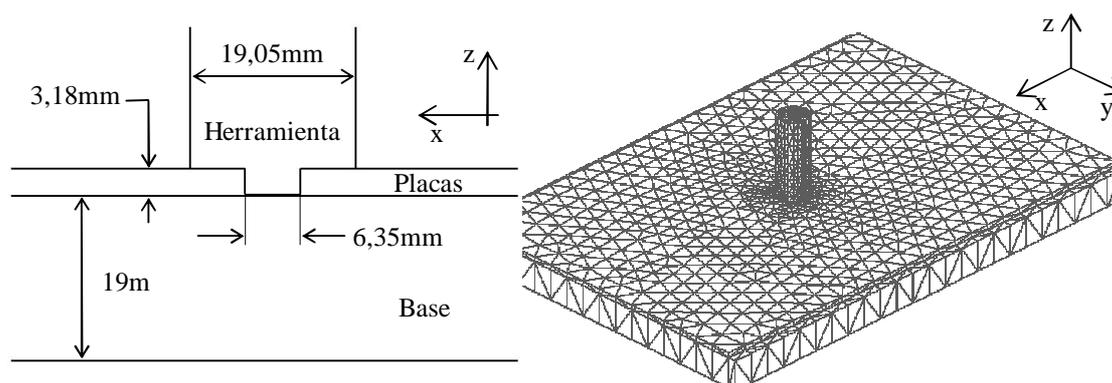


Figura 2: Geometría del modelo

La simulación numérica del proceso incluye la resolución acoplada de un modelo de flujo viscoplástico y de transferencia de calor. El primero de ellos está gobernado por las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento (segundo principio de Newton) para un medio continuo y por la ecuación de conservación de la masa para un fluido incompresible:

$$\frac{\partial \sigma_{km}}{\partial x_m} + \rho \cdot g_k = \rho \cdot \frac{Du_k}{Dt}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2)$$

donde u_k son las velocidades, x_m son las coordenadas espaciales, t es el tiempo, ρ es la densidad del material, g_k son las fuerzas de volumen y σ_{km} es el tensor de Cauchy.

El tensor de Cauchy de acuerdo con la formulación de flujo adoptada adquiere la forma general:

$$\sigma_{km} = -p \cdot \delta_{km} + \tau_{km}, \quad (3)$$

donde δ_{km} es el delta de Kronecker, p es la presión hidrostática y τ_{km} es el tensor desviador de tensiones. Este último se puede relacionar al tensor de velocidades de deformación d_{km} por medio de la viscosidad μ , según la siguiente relación:

$$\tau_{km} = 2 \cdot \mu \cdot d_{km}, \quad (4)$$

$$d_{km} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right), \quad (5)$$

$$\mu = \frac{\sigma_e}{3 \cdot \dot{\epsilon}_e}, \quad (6)$$

donde σ_e es la tensión efectiva o el segundo invariante de la tensión y $\dot{\epsilon}_e$ es la velocidad de deformación efectiva o el segundo invariante de la velocidad de deformación, que puede obtenerse por:

$$\dot{\epsilon}_e^2 = \frac{2}{3} \cdot d_{km} \cdot d_{km}. \quad (7)$$

Se asume que el material tiene un comportamiento viscoplástico y rígido para el que la tensión de flujo depende de la velocidad de deformación y de la temperatura representada por la siguiente relación constitutiva propuesta por [Sellars et al. \(1966\)](#):

$$\sigma_e = \frac{1}{\alpha} \cdot \arg Sh \left[\left(\frac{Z}{A} \right)^{1/n_c} \right], \quad (8)$$

$$Z = \dot{\epsilon}_e \cdot \exp \left(\frac{Q}{R \cdot T} \right), \quad (9)$$

donde A , α y n_c son constantes del material, Z es el parámetro de Zener-Hollomon, Q es la energía de activación, R es la constante universal de los gases y T la temperatura absoluta. Los valores de las constantes fueron obtenidos del trabajo de [Jorge Jr. et al. \(2005\)](#) y son $\alpha = 0,012 \text{ MPa}^{-1}$, $Q = 401 \text{ kJ.mol}^{-1}$, $A = 8,30 \cdot 10^{15}$ y $n_c = 4,32$.

Se considera como marco de referencia a la herramienta rotando a una velocidad ω sin avanzar, resultando que la placa base se mueve hacia ella con una velocidad v_w .

Por otro lado, se asume una condición deslizamiento relativo entre las superficies en contacto de la herramienta y el material de las placas a soldar. Es decir, la velocidad que se impone al material sobre dicha superficie no es directamente la velocidad de la herramienta, sino que se encuentra afectada por un coeficiente. Este coeficiente responde a la siguiente relación extraída del proceso de laminado ([Nandan et al., 2007b](#)):

$$\delta = 1 - \exp \left(-\frac{1}{\delta_0} \cdot \frac{\omega \cdot r}{u_0} \right), \quad (10)$$

donde δ es la fracción de deslizamiento, δ_0 es una constante, ω es la velocidad angular de la herramienta, r es la distancia radial y u_0 la velocidad de la herramienta en radio exterior del apoyo. Una condición de adherencia completa se indica por $\delta = 0$.

El segundo modelo responde a la ecuación de conservación de la energía, que incluye la generación de calor interna por disipación de potencia viscoplástica γ :

$$\rho \cdot Cp \cdot \frac{DT}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(K \cdot \frac{\partial T}{\partial x_m} \right) + \rho \cdot \gamma, \quad (11)$$

$$\gamma = \eta \cdot \tau_{km} \cdot d_{km}, \quad (12)$$

donde Cp la capacidad calorífica, K la conductividad térmica, T la temperatura y η la fracción de potencia que no es absorbida en defectos microestructurales.

Se asume que la presión en el apoyo de la herramienta y en el fondo del perno es la misma en todos los puntos. La presión en la mitad frontal del perno cilíndrico del perno es mucho menor que la anterior por lo que se la desprecia. De esta manera, el calor generado en la interfaz herramienta/material (se considera que se distribuye en partes iguales hacia la herramienta y hacia el material) está dado por las presiones y la velocidad del material según:

$$q = \mu_f \cdot P_N \cdot \delta \cdot \omega \cdot r, \quad (13)$$

donde P_N (la fuerza axial es $F_A = 31,138 \text{Kg.m.seg}^{-2}$) es la presión normal a la superficie y μ_f es el coeficiente de fricción entre la herramienta y el material. Este último varía con la distancia radial según (Nandan et al., 2007b):

$$\mu_f = \mu_0 \cdot \exp(-\lambda_f \cdot \delta \cdot \omega \cdot r), \quad (14)$$

donde μ_0 es una constante y λ_f es una constante que tiene en cuenta las unidades ($10^{-3} \text{cm.seg}^{-1}$).

Sobre la superficie de entrada del modelo se impone una temperatura de 25°C y se consideran dos fenómenos de transmisión de calor: por convección ($h = 10 \text{W.m}^{-2}.\text{C}^{-1}$) y radiación con el medio, y de resistencia al flujo de calor entre las superficies en contacto. Esta última se representa en el modelo por la siguiente ecuación:

$$q = \beta \cdot \Delta T. \quad (15)$$

donde q es el calor que se transmite, β es la conductancia térmica, y ΔT la diferencia de temperaturas entre las superficies.

Las constantes de los materiales que se forman parte del modelo se presentan en la [Tabla 1](#):

Propiedades	$\rho[\text{Kg.m}^{-3}]$	$Cp[\text{J.Kg}^{-1}.\text{C}^{-1}]$	$K[\text{W.m}^{-1}.\text{C}^{-1}]$	ε
Placas (SS 304L)	$8,0 \cdot 10^3$	$0,5 \cdot 10^3$	2,41	0,17
Herramienta (acero)	$7,8 \cdot 10^3$	$0,5 \cdot 10^3$	43,0	0,8
Base (acero)	$7,8 \cdot 10^3$	$0,5 \cdot 10^3$	43,0	--

Tabla 1: Constantes de los materiales

2.2 Estimación de parámetros

La función costo a minimizar es la siguiente:

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^m (T_i^M - T_i(\alpha))^2, \quad (16)$$

donde α son los parámetros a estimar, m la cantidad de mediciones, T_i^M son las temperaturas medidas y T_i las temperaturas calculadas numéricamente.

Minimizando F con respecto a los parámetros α_j se llega a:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{\partial T_i(\alpha)}{\partial \alpha_j} \cdot (T_i^M - T(\alpha)) = 0 \quad (\forall j). \quad (17)$$

Introduciendo el coeficiente de sensibilidad $X_{i,j}$ que corresponde a la primera derivada de las temperaturas obtenidas del modelo para la medición i con respecto al parámetro α_j se obtiene:

$$X_{i,j} = \frac{\partial T_i(\alpha)}{\partial \alpha_j}. \quad (18)$$

Se define la matriz de sensibilidad \mathbf{X} de componentes $X_{i,j}$. De esta manera puede escribirse la ecuación 17 en forma matricial y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{X}^T \cdot (\mathbf{T}^M - \mathbf{T}) = 0. \quad (19)$$

Como se trata de una estimación no lineal, la solución se obtiene a través de un proceso iterativo por un desarrollo de errores de primer orden. Para la medición i a la iteración $n+1$ se obtiene:

$$T_i(\alpha^{n+1}) \approx T(\alpha^n) + \sum_j^{N_p} (\alpha_j^{n+1} - \alpha_j^n) \cdot X_j(i, \alpha), \quad (20)$$

donde N_p es la cantidad de parámetros.

Esta última ecuación puede escribirse en forma matricial:

$$\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \mathbf{X}^n \cdot (\alpha^{n+1} - \alpha^n). \quad (21)$$

Alrededor de la solución puede escribirse que el sistema de ecuaciones 19 es correcto. Si se sustituye α^{n+1} por su anterior hallazgo, se obtiene una conexión entre los parámetros estimados en las iteraciones n y $n+1$. Por lo tanto, el vector de parámetros en la iteración $n+1$ se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + (\mathbf{X}^{nT} \cdot \mathbf{X}^n)^{-1} \cdot \mathbf{X}^{nT} \cdot (\mathbf{T}^M - \mathbf{T}^n). \quad (22)$$

Finalmente, modificando la anterior por el método de Levenberg-Marquard ([Aster et al., 2003](#)):

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + (\mathbf{X}^{nT} \cdot \mathbf{X}^n + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{X}^{nT} \cdot (\mathbf{T}^M - \mathbf{T}^n), \quad (23)$$

donde λ es un parámetro que se ajusta durante el curso de la estimación para asegurar la convergencia del algoritmo.

2.3 Matriz de sensibilidad

Existen distintas maneras de encontrar la matriz de sensibilidad. Para el presente trabajo se aproxima la misma utilizando un método numérico: Diferencias Finitas.

Perturbando el sistema con pequeños incrementos sobre cada uno de los parámetros en forma independiente se obtienen los coeficientes de la matriz de sensibilidad de las temperaturas a los parámetros:

$$X_{i,j} = \frac{\partial T_i(\alpha)}{\partial \alpha_j} \approx \frac{\Delta T_i}{\Delta \alpha_j} = \frac{T_i(\alpha^*) - T_i(\alpha)}{\Delta \alpha_j}, \quad (24)$$

donde $\Delta\alpha_j$ es la perturbación del parámetro j y α^* son los parámetros a estimar con el elemento j perturbado.

2.4 Datos de entrada

Los parámetros a estimar son cuatro ($N_p=4$): las dos constantes que se encuentran incluidas en las ecuaciones que corresponden al coeficiente de fricción (μ_0) y a la fracción de deslizamiento (δ_0) del material en contacto con la superficie de la herramienta, el coeficiente de transferencia de calor en la superficie inferior (β) y la cantidad de disipación viscosa convertida en calor (η).

Para los valores iniciales de los parámetros se tuvieron en cuenta algunos trabajos anteriores (Pereyra et al., 2007 y Nandan et al., 2007b) y sus valores son: $\delta_0 = 0,4$, $\eta = 0,5$, $\mu_0 = 0,5$ y $\beta = 400 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$.

Las mediciones de temperatura que se toman como referencia (T_i^M) se extrajeron del trabajo de Zhu et al. (2004). Se consideraron un total de 18 puntos ($m=18$) sobre la superficie superior de las placas (ver Figura 3).

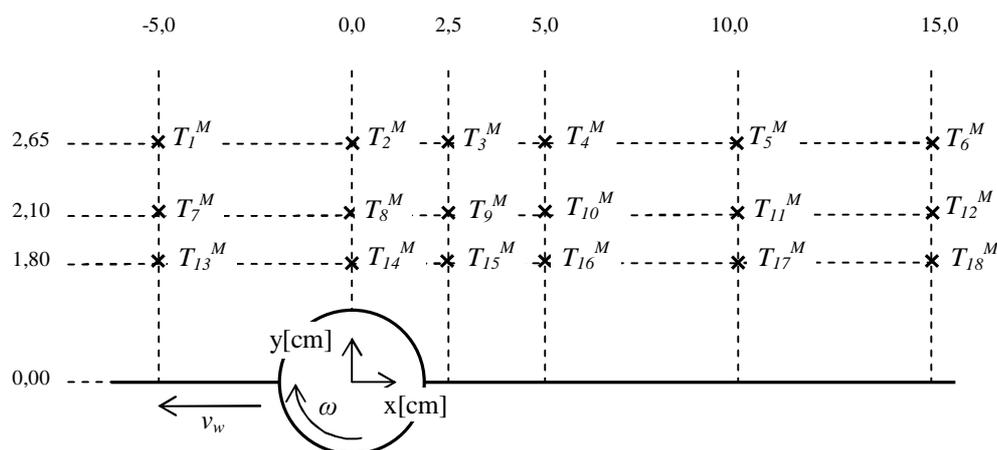


Figura 3: Posición de los puntos de las temperaturas medidas

2.5 Resolución

Para la simulación del proceso se construyó una malla de elementos finitos tetraédricos del tipo Taylor-Hood (Zienkiewicz y Taylor, 1989 y 1991), es decir, tetraedros P2-P1, con interpolaciones cuadráticas para las velocidades y lineales para las presiones, en orden a lograr estabilidad de las interpolaciones de presión por la condición de divergencia nula conjuntamente con una adecuada captura de los gradientes de tensión en las capas límites. Para las temperaturas se emplearon elementos tetraédricos con interpolación cuadrática en coincidencia con los nodos de velocidad. La malla resultó tener aproximadamente 52.800 elementos con 71.000 nodos de velocidad.

Se implementó una formulación de elementos finitos con estabilización SUPG –Streamline Upwind Petrov-Galerkin– (Hughes, 1987) con un esquema de avance en el tiempo totalmente implícito, usado fundamentalmente como preconditionador del sistema de ecuaciones para llegar a la solución estacionaria. Asimismo, se agregó pseudo-compresibilidad artificial del tipo de Chorin (1968).

El algoritmo de resolución consiste en dos sub-pasos: en el primero de ellos se obtiene el campo de velocidades asumiendo fijo el campo de temperaturas. Se itera por reemplazos sucesivos para adaptar no-linealmente los valores de viscosidad de acuerdo a las velocidades de deformación obtenidas en la iteración anterior. En el segundo sub-paso se resuelve el campo de temperaturas asumiendo el campo de velocidades resultante en el primer sub-paso. En este caso la no linealidad reside en el término de generación de calor.

El método de resolución numérica del sistema de ecuaciones lineales para cada iteración es el mismo en ambos sub-pasos. Se emplea el método de gradientes conjugados cuadrados con un preconditionador de factorización incompleta de tipo LU de acuerdo al esquema propuesto por Saad (1994) en SparseKit.

Con la solución obtenida de la simulación se interpolan las temperaturas en los puntos que corresponden a las posiciones de las temperaturas medidas (T_i^M) y se evalúa la Función Costo (F). Se perturban de manera independiente cada uno de los parámetros y se vuelve a requerir la solución estacionaria del problema para cada una de las perturbaciones. De esta manera, en cada iteración se construye la matriz de sensibilidad (\mathbf{X}) que permite obtener nuevos valores de los parámetros (α).

3 RESULTADOS Y DISCUSION

En la Figura 4 se grafica la raíz cuadrada de la Función Costo (F) en cada iteración (n), para el problema considerado.

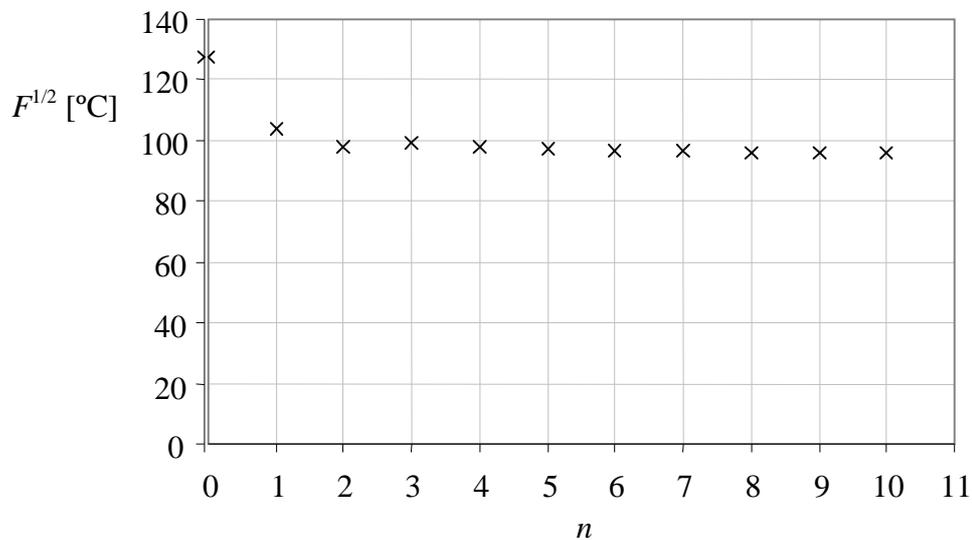
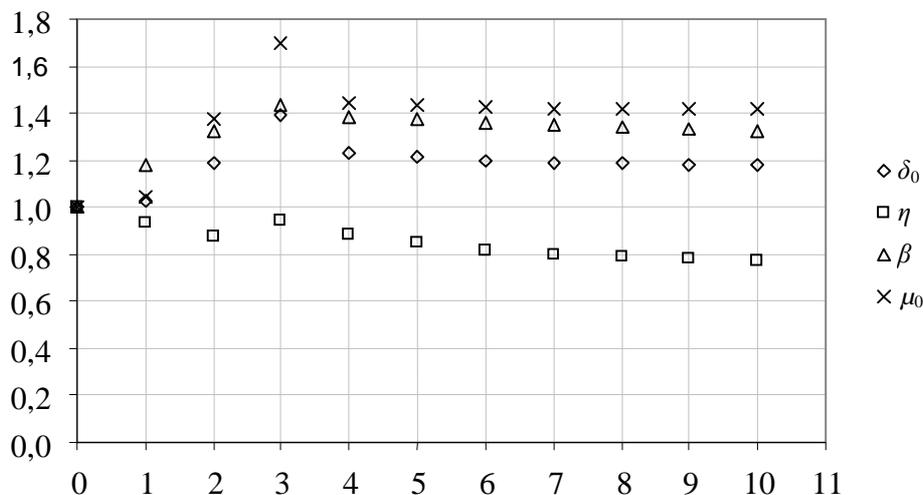


Figura 4: Valores que toma la raíz cuadrada de la Función Costo (F) en cada iteración

Se observa que en las dos primeras iteraciones la magnitud de $F^{1/2}$ disminuye significativamente respecto al valor inicial, pasa de un valor de $127,8^{\circ}\text{C}$ a $97,7^{\circ}\text{C}$. A partir de aquí el valor se mantiene aproximadamente constante.

En la Figura 5 se grafica el valor que toman los cuatro parámetros (δ_0 , η , μ_0 y β), cada uno dividido por su valor inicial, en cada iteración (n), para el problema considerado.

Figura 5: Valores que toman los parámetros (δ_0 , η , μ_0 y β) en cada iteración

Es importante establecer cuál es la influencia de los parámetros sobre los resultados térmicos para comprender el significado del resultado de la estimación. Un aumento en los parámetros resulta en un aumento de la temperatura, en el caso de η y μ_0 , mientras que significa una disminución, en el caso de β . Es decir, en el primer caso, es mayor el calor generado por disipación y por fricción superficial de la herramienta y, en el segundo, es mayor el calor que se transfiere a la placa base. En el caso de δ_0 la cuestión es más compleja ya que un aumento en el parámetro significa un menor calor generado por esfuerzos viscosos (menor flujo de material) pero un mayor calor generado por fricción superficial de la herramienta.

En consecuencia, la evolución de los parámetros (ver Figura 5) indica mayor calor generado por la fricción superficial de la herramienta (debido al aumento de μ_0 y de δ_0), menor calor generado por el trabajo plástico –potencia de las tensiones– (debido a la disminución de η y al aumento de δ_0) y una mayor pérdida de calor hacia la base (por aumento de β).

	δ_0	η	μ_0	β [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{°C}^{-1}$]	$F^{1/2}$ [°C]
Valor inicial	0,400	0,500	0,500	400	127,8
Valor final	0,589	0,386	0,707	531	97,7

Tabla 2: Valores del problema

En la Figura 6 se muestran las temperaturas experimentales y numéricas en los puntos de medición para el modelo con los valores finales de los parámetros estimados.

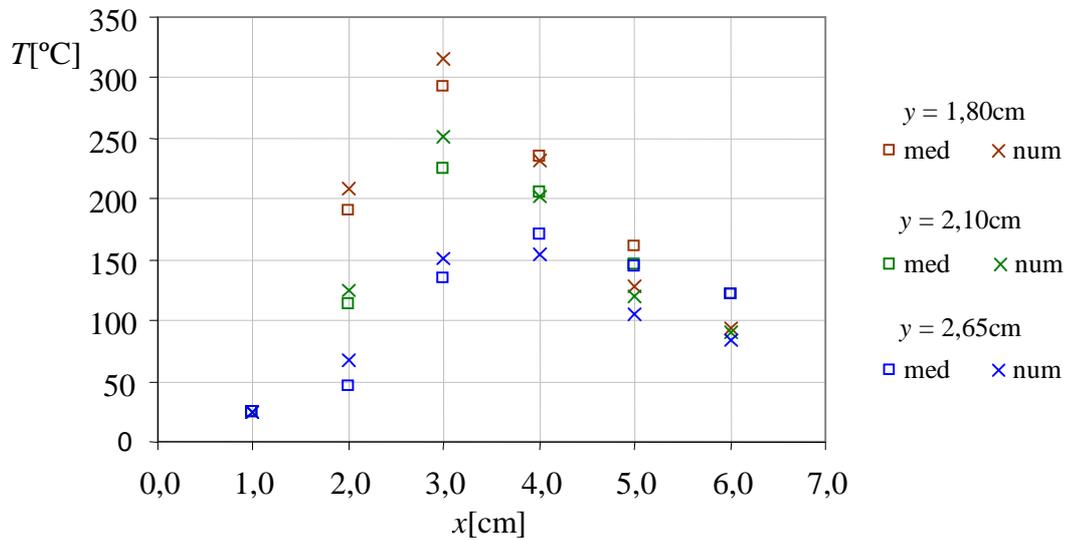


Figura 6: Temperaturas experimentales y numéricas en los puntos de medición

En la [Figura 7](#) se muestran las líneas de corriente del modelo en planos horizontales a distintas alturas (z) respecto de la superficie inferior de las placas a soldar.

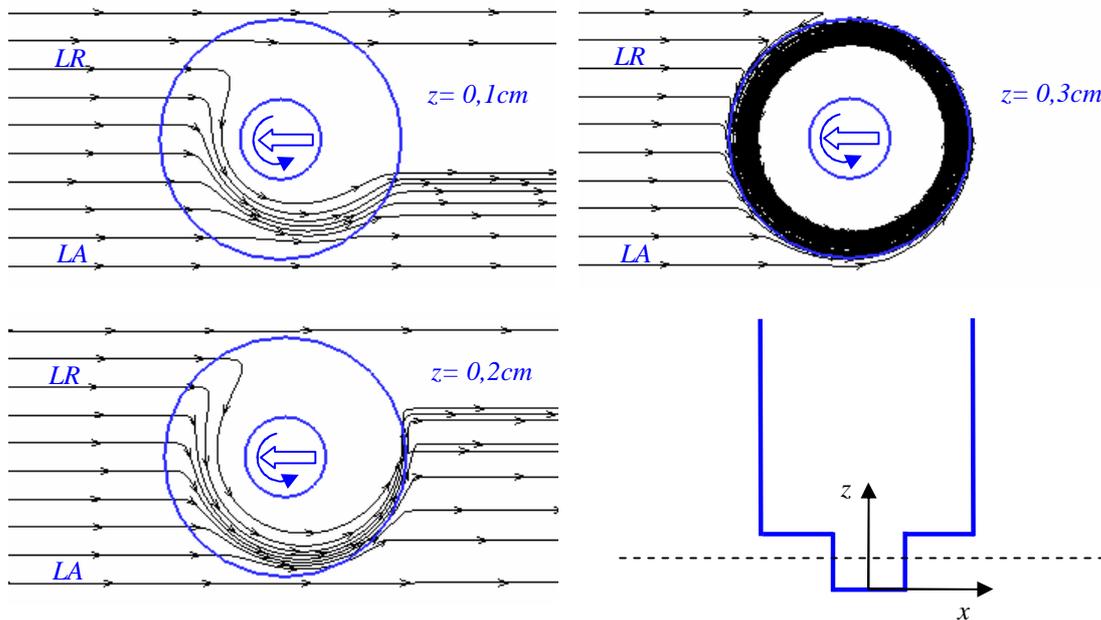


Figura 7: Líneas de corriente del modelo

Comparando estas tres imágenes puede verse que el flujo de material alrededor del perno aumenta cerca del apoyo de la herramienta. Asimismo, las líneas de corriente indican que el material es conducido principalmente por el lado de retroceso (LR). Lejos del apoyo, el material viaja alrededor del perno por el lado de retroceso y se ubica aproximadamente a un diámetro de perno detrás de su posición original. Esta característica del flujo se encuentra de acuerdo a las visualizaciones de flujo de [Reynolds \(2008\)](#).

CONCLUSIONES

Se pudieron estimar parámetros involucrados en un modelo de elementos finitos del proceso de soldadura FSW resolviendo un problema inverso a través de un procedimiento iterativo por un desarrollo de errores de primer orden modificado por el método de Levenberg-Marquardt.

Estos nuevos parámetros permitieron mejorar el ajuste de los resultados numéricos de temperatura a mediciones experimentales. Así mismo, los cambios de los parámetros respecto de sus valores iniciales evidencian la influencia de ciertos fenómenos físicos considerados sobre los resultados del modelo.

Los resultados obtenidos revelan el interés en la incorporación de técnicas de estimación de parámetros para mejorar las predicciones de los modelos numéricos.

REFERENCIAS

- Aster, R., Borchers, B., and Thurber, C., Parameter Estimation and Inverse Problems, *International Geophysics Series*, volumen 90. Elsevier Academic Press, 2003.
- Chen, C. M., and Kovacevic, R., Finite element modeling of friction stir welding – thermal and thermomechanical analysis. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 43:1319–1326, 2003.
- Chorin, A.J., *Mathematics of Computation*, 22:745–762, 1968.
- Colegrove, P.A., and Sherclif, H. R., 3-Dimensional CDF modelling of flow round a threaded friction stir welding tool profile. *Journal of Material Processin Technology*, Artículo en prensa, 2005.
- Gould, J.E., and Feng, Z., Heat flow model for friction stir welding of aluminium alloys. *Journal for Numerical Methods of Material Processing and Manufacturing Science*, volumen 7, 1998.
- Hughes, T. J. R., *The finite element Method*. Prentice-Hall, 1987.
- Jorge Jr., A.M., and Balancin, O., Prediction of Steel Flow Stresses under Hot Working Conditions. *Material Research*, 8:309–315, 2005.
- Nandan, R., Roy, G.G., Lienert, T.J., and Debroy, T., Three-dimensional heat and material flow during friction stir welding of mild steel. *Acta Materialia*, 55:883–895, 2007a.
- Nandan, R., Prabu, B., De, A., and Debroy, T., Improving Reliability of Heat Transfer and Materials Flow Calculations during Friction Stir Welding of Dissimilar Aluminum Alloys. *Welding Research*, 86:313-322, 2007b.
- Pereyra, S., Santiago, D., Lombera, G., Urquiza, S., y De Vedia, L., Modelado computacional del proceso “Friction stir Welding” en aceros inoxidable austeníticos. *Mecánica Computacional*, 25:1324-1334, 2007.
- Reynolds, A.P., Flow visualization and simulation in FSW. *Scripta Materialia*, 58:338-342, 2008.
- Rosenthal, D., and Shemerber, R., Thermal study of arc welding. *Welding Journal*, 17:208, 1938.
- Saad, Y., SPARSEKIT: a basic tool kit for sparse matrix computation (version2). University of Illinois. <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/software/SPARSKIT/sparskit.html>, 1994.
- Santiago, D., Lombera, G., Cassanelli, A., Urquiza, S., y de Vedia, L., Analisis térmico en soldadura por fricción. *Mecánica Computacional*, 24:2781–2793, 2005.
- Santiago, D., Lombera, G., Urquiza, S., Cassanelli, A., y de Vedia, L., Numerical modeling of joints welded by “friction stir welding” process. *Material Research*, 7:569–574, 2004.
- Sellars, C.M., and McG Tegart, W.J., La relation entre la résistance et la structure dans la deformation à chaud. *Memories Scientifiques Rev. Métalurg.*, 63:731–746, 1966.

- Song, M., and Kovacevic, R., Thermal modeling of friction stir welding in a moving coordinate system and its validation. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 43:605–615, 2003.
- Ulysse, P., Three-dimensional modeling of the friction stir-welding process. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 42:1549–1557, 2002.
- Zhu, X.K., and Chao, Y.J., Numerical simulation of transient temperature and residual stresses in friction stir welding of 304L stainless steel. *Journal of Material Processing Technology*, 146:263–272, 2004.
- Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., *The finite element method*, volumen I. Mc Graw Hill, 1989, y volumen II, McGraw Hill, 1991.