

IDENTIFICACIÓN DE LA IMPEDANCIA ULTRASÓNICA RESOLVIENDO UN PROBLEMA INVERSO

María G. Messineo^{a,b}, Gloria L. Frontini^{a,b}, Guillermo E. Elicabe^b, Luis Gaete^c

^a*Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata,
Juan B. Justo 4302, 7600 Mar del Plata, Argentina, gmessineo@fi.mdp.edu.ar
gfrontin@fi.mdp.edu.ar, <http://www.fi.mdp.edu.ar>*

^b*Instituto de Investigación en Ciencia y Tecnología de Materiales, Consejo Nacional de
Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y Universidad Nacional de Mar del Plata, Juan
B. Justo 4302, 7600 Mar del Plata, Argentina, elicabe@fi.mdp.edu.ar, <http://www.intema.gov.ar>*

^c*Laboratorio de Ultrasonido, Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile, Avenida
Ecuador 3493, Estación Central, Santiago, Chile.*

Palabras clave: Problema Inverso, Ultrasonido, Impedancia, Caracterización de Materiales, Estimación de Parámetros.

Resumen. En el presente trabajo se propone utilizar un modelo de impedancia para representar el comportamiento de un material por el que se propaga una onda ultrasónica. Las señales ultrasónicas son ondas mecánicas de alta frecuencia adecuadas para monitorear in situ materiales que tienen geometrías diversas, permitiendo su caracterización cuando otros ensayos no son realizables. Se simula la propagación de una onda plana de ultrasonido dentro de un material homogéneo y de uno heterogéneo en capas, a partir del modelo de la ecuación de onda unidimensional resuelto en diferencias finitas y se vincula a las señales obtenidas en dicha simulación con el concepto de impedancia acústica. El modelo de impedancia de transferencia relaciona la tensión en uno de los extremos del material con la velocidad en el otro extremo. El análisis se realiza en el dominio temporal, por lo que el problema directo puede plantearse también como la convolución entre la velocidad y una función temporal, $z_H(t)$, que proviene de hacer la transformada inversa de Fourier de la impedancia de transferencia. El problema de identificar propiedades que caracterizan al material se formula como un problema inverso de estimación paramétrica. La minimización de una función de mínimos cuadrados permite obtener las velocidades de propagación y densidades del material, las que se relacionan con las constantes elásticas, permitiendo la caracterización mecánica de la muestra.

1 INTRODUCCIÓN

La evaluación de algunas características de un material puede llevarse a cabo mediante la perturbación del mismo con una onda de ultrasonido (Krautkramer, 1983; Cheeke, 2002). Para pequeñas perturbaciones puede pensarse a la propagación de la onda como el movimiento simultáneo y coordinado de las partículas que lo conforman y que actúan como las masas de un oscilador simple. Esos elementos interactúan a través de fuerzas elásticas y viscosas de una manera determinada por el medio y su contorno. La onda que se propaga en el material lo hace a una velocidad c , mientras que las partículas se mueven con velocidad instantánea v .

La perturbación del medio por una onda de ultrasonido es provocada por un material piezoeléctrico en contacto con la muestra a evaluar, que genera ondas mecánicas en el material con un rango de frecuencias comprendidas entre 20 kHz y 100 MHz. La generación de estos movimientos oscilatorios en un medio determinado se presenta en conjunto con dos fenómenos importantes en la transmisión de ondas mecánicas en un medio no ideal: la dispersión y la atenuación. El primero está asociado a la dependencia de la velocidad de propagación en función de su frecuencia y el segundo a la disipación de la energía de la onda en el medio. Cuando la velocidad de una onda no depende de la frecuencia de propagación, se dice que el medio es no dispersivo. En cambio, si lo contrario ocurre, se dice que el material sí presenta esta característica, y las diferentes componentes armónicas de las ondas se propagan con diferentes velocidades. En este trabajo se considera el caso de materiales no dispersivos.

En los ensayos no destructivos mencionados se miden magnitudes como la velocidad de la onda que se propaga por el material y la atenuación que sufre la misma. Estas cantidades dependen de propiedades físicas y mecánicas del material como la densidad y las constantes elásticas y pueden variar a medida que la onda se propaga por un medio no homogéneo. Se propone realizar una medición con ondas planas transmitidas a través de la muestra y registradas para su análisis, similarmente a lo propuesto en la bibliografía (Fellah, 2007; Rus, 2007). El problema es planteado como un problema inverso, en el que la incógnita es un conjunto de parámetros que se relacionan con las constantes mecánicas de un material compuesto por una secuencia de capas. Para determinar la dependencia que el comportamiento de la onda tiene con respecto a estos parámetros, se utiliza un modelo de impedancia acústica de transferencia, que relaciona la tensión aplicada en un punto del material con la velocidad de las partículas en otro punto. Los parámetros involucrados en estas señales son la velocidad de propagación de la onda, la densidad del material y la longitud de la muestra que en este trabajo se supone conocida. La señal medida se obtiene también en forma simulada. Los parámetros que mejor describen al material se encuentran minimizando la discrepancia entre las señales teóricas y las medidas.

Presentamos en primer lugar una breve reseña del modelo de la ecuación de onda y el mencionado modelo de la impedancia acústica de transferencia.

2 TEORÍA

2.1 Modelo de la ecuación de onda

La ecuación que representa el movimiento de una onda en un medio con velocidad de propagación c es:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Puede probarse que la Ec.(1) tiene una solución armónica dada por

$$u(x,t) = U \cdot e^{j(\omega t - kx)}, \quad (2)$$

donde u : desplazamiento de la partícula

ω : frecuencia angular;

$k = \omega / c$: número de onda;

U : amplitud de la onda;

Si se considera una pieza finita de material, los bordes modifican las características de la onda transmitida, dando lugar a reflexiones. Así, la propagación de la misma estará compuesta por una onda incidente y una reflejada y en ese caso la solución de la Ec.(1) debe formularse como:

$$u(x,t) = U_+ e^{j(\omega t - kx)} + U_- e^{j(\omega t + kx)} \quad (3)$$

donde U_+ y U_- son las amplitudes de las ondas que se establecen en uno y otro sentido. Estas amplitudes dependen de las condiciones iniciales y de contorno. Se analiza el caso indicado en la Fig. 1, donde interesa resolver el problema de propagación de la onda en una muestra de largo L en la que una señal $f(t)$ es aplicada en uno de los extremos de la muestra, conformando una condición de contorno a los efectos de resolver el problema de la ecuación de onda.

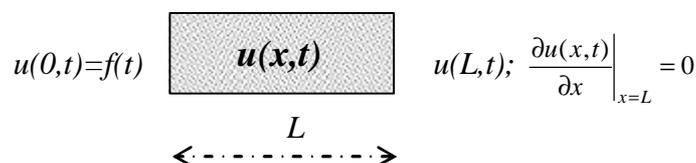


Figura 1: Condiciones de borde aplicadas al problema de la ecuaciones de onda para un material homogéneo.

Si el otro extremo del material puede suponerse libre, entonces el desplazamiento será máximo y su derivada espacial será nula. Así, la otra condición de contorno es

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (4)$$

Imponiendo ambas condiciones de contorno en la Ec. (3) resulta, con $f(t) = e^{j\omega t}$, la siguiente solución particular para la Ec. (1):

$$u(x,t) = e^{j(\omega t)} \frac{\cos k(x-L)}{\cos kL}. \quad (5)$$

El material considerado responde a un modelo de elasticidad lineal, el que está sometido a una onda plana generada por una tensión \mathbf{r} . Entonces, la tensión es opuesta y proporcional a la deformación:

$$\mathbf{s}(x,t) = -K\mathbf{e} = -K \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \quad (6)$$

K es la constante elástica del material, la que por suponerse un movimiento unidimensional en un material isótropo será igual a $\mathbf{I} + 2\mathbf{m}$, con \mathbf{I} y \mathbf{m} las constantes de Lamé. Recordemos también que la constante elástica se vincula con la velocidad de propagación a través de la densidad del material:

$$K = c^2 \cdot \mathbf{r} . \quad (7)$$

Se supone ahora que en lugar de un material homogéneo se tiene una muestra formada por dos capas de longitud L_1 y L_2 respectivamente, con un esquema como el que se muestra en la Fig. (2). Las condiciones de contorno en los extremos de la muestra son las mismas que en el caso del material homogéneo y en la interfaz se considera que existe continuidad de tensión y velocidad. En este caso la solución puede escribirse como una función por tramos definida para cada capa:

$$u(x, t) = \begin{cases} Ae^{j(\omega t - k_1 x)} + Be^{j(\omega t + k_1 x)} & 0 \leq x \leq L_1 \\ Ce^{j(\omega t - k_2 x)} + De^{j(\omega t + k_2 x)} & L_1 \leq x \leq L \end{cases} . \quad (8)$$

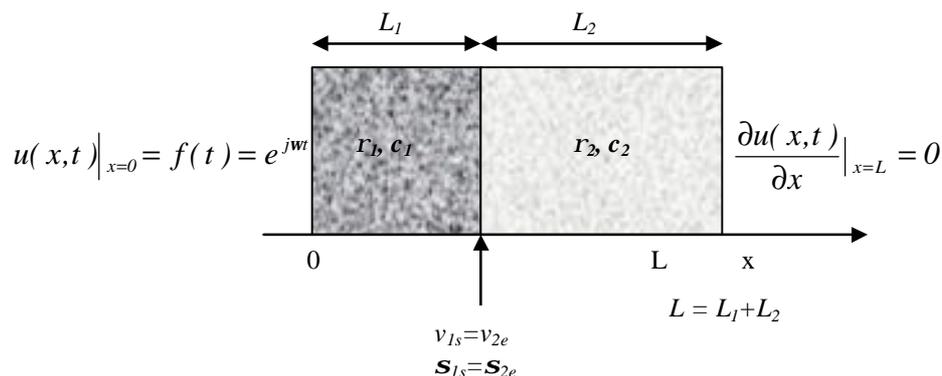


Figura 2: Condiciones de borde aplicadas al problema de la ecuación de onda para un material compuesto por dos capas.

En la Ec. (8) $k_1 = \omega/c_1$ y $k_2 = \omega/c_2$ son los números de onda que corresponden a cada capa. Además, a partir de las condiciones de continuidad de velocidad y tensión en la interfaz resulta:

$$\begin{aligned} Ae^{j(\omega t - k_1 L_1)} + Be^{j(\omega t + k_1 L_1)} &= Ce^{j(\omega t - k_2 L_1)} + De^{j(\omega t + k_2 L_1)} \\ r_1 c_1 (Ae^{j(\omega t - k_1 L_1)} - Be^{j(\omega t + k_1 L_1)}) &= r_2 c_2 (Ce^{j(\omega t - k_2 L_1)} - De^{j(\omega t + k_2 L_1)}) \end{aligned} , \quad (9)$$

relaciones que junto con las condiciones de contorno permiten el cálculo de las cuatro constantes, A, B, C y D.

2.2 Modelo de Impedancia Acústica

La impedancia acústica de un material se define en concordancia con la impedancia mecánica, que a su vez es una analogía de la impedancia eléctrica (Hueter, 1955). Para el caso de un sólido la impedancia acústica específica, Z , es la relación entre la tensión, \mathbf{s} , aplicada

en un punto y la velocidad de las partículas, v :

$$Z = \frac{\mathbf{s}}{v}. \quad (10)$$

Para una onda plana que se propaga por un material infinito, Z será un número real y se la define como la impedancia característica del medio, la que resulta ser:

$$Z_0 = \mathbf{r}c. \quad (11)$$

Por ejemplo, para el aire a temperatura ambiente y a presión correspondiente al nivel del mar es $Z_0=420 \text{ kg/s/m}^2$, para el agua es $1,48 \times 10^6 \text{ kg/s/m}^2$, para el acrílico es $3,235 \times 10^6 \text{ kg/s/m}^2$ y para el aluminio $17,334 \times 10^6 \text{ kg/s/m}^2$.

Para una onda plana que se propaga por una muestra finita de material, Z es un número complejo y resulta de las condiciones de borde impuestas a la muestra. Su cálculo en el dominio temporal puede realizarse vinculándolo con la solución encontrada para la ecuación de onda.

Si llamamos $v(x,t)$ a la función que representa la velocidad de la partícula correspondiente a la posición x de la muestra en un tiempo t , en general será

$$v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad (12)$$

y para una onda armónica como la de la Ec. (2) puede afirmarse que:

$$v(x,t) = j\omega u(x,t). \quad (13)$$

Además, como

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = j\omega v(x,t) \quad (14)$$

entonces

$$v(x,t) = \frac{1}{j\omega} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Además, por las Ec. (1) y (6) resulta que

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{K}{\mathbf{r}} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{s}(x,t)}{\partial x} \quad (16)$$

y sustituyendo en la Ec.(13) se obtiene que:

$$v(x,t) = -\frac{1}{j\omega \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{s}(x,t)}{\partial x}. \quad (17)$$

Bajo las hipótesis consideradas y teniendo en cuenta las Ec. (6), (10) y (17), la impedancia acústica específica en cada punto del material, puede expresarse como:

$$Z = \frac{\mathbf{s}(x,t)}{v(x,t)} = \frac{rc^2 ke^{j\omega t} \frac{\text{sen}k(x-L)}{\cos(kL)}}{j\omega e^{j\omega t} \frac{\text{cos}k(x-L)}{\cos(kL)}}, \quad (18)$$

y simplificando resulta que la impedancia es función de la frecuencia e independiente del tiempo:

$$Z(\omega) = -jrc \tan(k(x-L)) = -jrc \tan\left(\frac{\omega}{c}(x-L)\right). \quad (19)$$

En este trabajo se pretende caracterizar al material utilizando un ensayo de transmisión de una onda de ultrasonido. Por lo tanto se tiene en cuenta para el análisis la tensión que se aplica en un extremo y se mide la señal de velocidad en el extremo opuesto. A partir de esto se define la impedancia de transferencia, Z_H , como la relación entre la tensión aplicada en un punto del material y la velocidad experimentada en otro punto. Si la transferencia se calcula entre $x=0$ y $x=L$, entonces se obtiene:

$$Z_H = \frac{\mathbf{s}(x,t)|_{x=0}}{v(x,t)|_{x=L}} = -jrc \text{sen}(kL) \quad (20)$$

$$Z_H(\omega) = -jrc \text{sen}(\omega L/c) \quad (21)$$

Puede observarse que nuevamente la expresión obtenida es independiente del tiempo y que resulta una función de la frecuencia por ser $k = \omega/c$.

Supongamos un sistema de medición como el de la Fig. 2, donde un transductor *ideal* ubicado en uno de los extremos de la muestra convierte una señal eléctrica en una mecánica. Ésta se propaga como onda ultrasónica y en el otro extremo otro transductor realiza la operación inversa pudiéndose así registrar la señal transmitida para su posterior análisis.



Figura 3: Esquema de medición

Si los transductores no fueran ideales sería necesario tener en cuenta su impedancia mecánica, ya que de la adaptación entre transductores y muestra dependerá la proporción entre señal reflejada y transmitida. Por otro lado, los transductores tienen respuestas en frecuencia que alterarán la forma de las señales que se reciban (Kino, 2000).

Para el caso del material en capas referido en la sección anterior, puede deducirse una impedancia de transferencia en forma análoga a como se hizo para un material homogéneo. En este caso es de esperar que esté presente en su expresión el efecto de cada uno de los materiales que conforman la muestra y el de la interfaz. Ciertamente esto es lo que ocurre, como se verifica en la deducción que se presenta en la sección siguiente.

3 METODOLOGÍA

3.1 Impedancia acústica de transferencia

La metodología propuesta para identificar la impedancia acústica específica que caracteriza la muestra de material en cuestión hace uso de la teoría de sistemas lineales. Así, si modelamos el comportamiento dinámico del material como un sistema lineal e invariante excitado por la señal de ultrasonido aplicada, es decir, la tensión en $x=0$, puede considerarse a la velocidad medida en $x=L$ como la respuesta del mismo. Entonces la relación entrada/salida del sistema en el dominio transformado se expresa por

$$\mathbf{S}(\mathbf{w}).H(\mathbf{w}) = V(\mathbf{w}). \quad (22)$$

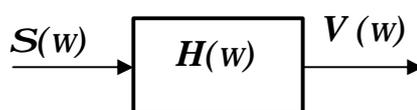


Figura 4: Representación del material homogéneo como sistema lineal

Además, recordando que $Z_H(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{w})}{V(\mathbf{w})}$, es fácil ver que la función de transferencia del sistema es

$$H(\mathbf{w}) = \frac{1}{Z_H(\mathbf{w})}. \quad (23)$$

Luego, como $\mathbf{S}(\mathbf{w}) = Z_H(\mathbf{w}).V(\mathbf{w})$, y el producto en el dominio de la frecuencia proviene de una integral de convolución en el tiempo, será:

$$\mathbf{S}(t) = \int_{-\infty}^t v(t) z_H(t-t) dt, \quad (24)$$

donde $z_H(t)$ puede obtenerse haciendo la transformada inversa de Fourier de la Ec. (21):

$$z_H(t) = \frac{rc}{2} (\mathbf{d}(t+L/c) - \mathbf{d}(t-L/c)). \quad (25)$$

Si se reemplaza la Ec. (25) en la Ec. (24) y se resuelve la integral se obtiene

$$\mathbf{S}(t) = \frac{rc}{2} \left(v\left(t + \frac{L}{c}\right) - v\left(t - \frac{L}{c}\right) \right). \quad (26)$$

En el caso del material en capas el diagrama se muestra en la Fig. 5 y está compuesto por tres bloques.

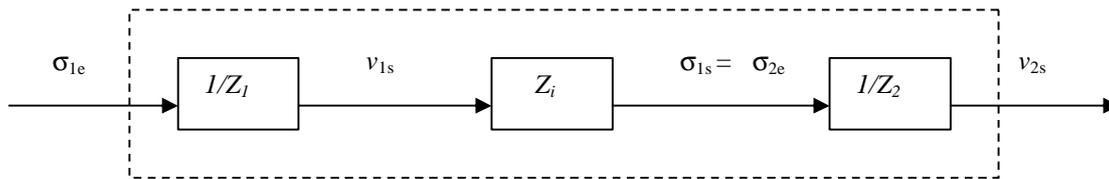


Figura 5: Representación en diagrama en bloques del material compuesto por dos capas.

\mathbf{s}_{1e} representa la tensión aplicada al material en $x=0$, v_{1s} y \mathbf{s}_{1s} son respectivamente la velocidad y la tensión en la interfaz del lado del material 1, que por la condición de continuidad son iguales a v_{2e} y \mathbf{s}_{2e} del lado del material 2, y v_{2s} es la velocidad en $x=L$.

El primer y el tercer bloque representan la inversa de la impedancia de transferencia correspondiente a cada material, mientras que el segundo bloque es la impedancia en la interfaz, $Z_i = \mathbf{s}_{1s} / v_{1s} = \mathbf{s}_{2e} / v_{2e}$.

Para este sistema la expresión equivalente a la Ec. (22) es:

$$v_{2s}(\mathbf{w}) = \left(\frac{1}{Z_1(\mathbf{w})} Z_i(\mathbf{w}) \frac{1}{Z_2(\mathbf{w})} \right) \mathbf{s}_{1e}(\mathbf{w}) . \quad (27)$$

Luego, a partir de la Ec. (27) y del diagrama de la Fig. 5 se puede escribir la impedancia de transferencia para la muestra de material en capas:

$$Z_H(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{s}_{1e}(\mathbf{w}, t) v_{1s}(\mathbf{w}, t) \mathbf{s}_{1s}(\mathbf{w}, t) \mathbf{s}_{2e}(\mathbf{w}, t)}{v_{1s}(\mathbf{w}, t) \mathbf{s}_{1s}(\mathbf{w}, t) \mathbf{s}_{2e}(\mathbf{w}, t) v_{2s}(\mathbf{w}, t)} = \frac{\mathbf{s}_{1e}(\mathbf{w}, t)}{v_{2s}(\mathbf{w}, t)} , \quad (28)$$

que, como ya se mostró para el caso anterior es independiente del tiempo.

La expresión final de la impedancia de transferencia es:

$$Z_H(\mathbf{w}) = j \left[\mathbf{r}_1 c_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\mathbf{w}}{c_1} L_1 \right) \cos \left(\frac{\mathbf{w}}{c_2} L_2 \right) + \mathbf{r}_2 c_2 \operatorname{sen} \left(\frac{\mathbf{w}}{c_2} L_2 \right) \cos \left(\frac{\mathbf{w}}{c_1} L_1 \right) \right] \quad (29)$$

Finalmente se halla también la función temporal $z_H(t)$ como la transformada inversa de Fourier de $Z_H(\mathbf{w})$.

$$z_H(t) = \frac{\mathbf{r}_1 c_1 + \mathbf{r}_2 c_2}{4} [\mathbf{d}(t+t_1+t_2) - \mathbf{d}(t-t_1-t_2)] + \frac{\mathbf{r}_1 c_1 - \mathbf{r}_2 c_2}{4} [\mathbf{d}(t+t_1-t_2) - \mathbf{d}(t-t_1+t_2)] \quad (30)$$

Resolviendo la integral de convolución de la Ec. (24) obtenemos:

$$\mathbf{s}(t) = \frac{\mathbf{r}_1 c_1 + \mathbf{r}_2 c_2}{4} [v(t+t_1+t_2) - v(t-t_1-t_2)] + \frac{\mathbf{r}_1 c_1 - \mathbf{r}_2 c_2}{4} [v(t+t_1-t_2) - v(t-t_1+t_2)] \quad (31)$$

donde $t_1=L_1/c_1$ y $t_2=L_2/c_2$.

3.2 Problema inverso

El problema de identificación se formula como un problema inverso de estimación de parámetros, en el que las incógnitas son la velocidad de propagación, c , y la densidad del

material, \mathbf{r} . El valor de los parámetros que mejor describen el material es obtenido minimizando la siguiente función objetivo:

$$J(p) = \|\mathbf{s}(t) - \mathbf{s}_m(t)\|^2, \quad (32)$$

donde $\mathbf{s}(t)$ representa la señal de entrada, la que se supone conocida y que para el caso simulado se calcula a partir del modelo exacto con la Ec. (6); $\mathbf{s}_m(t)$ representa la señal predicha según el modelo de la Ec. (26) o la Ec. (31), según sea el material de una o dos capas, y que tiene parámetros contenidos en el vector p . Además $\mathbf{s}_m(t)$ se calcula a partir de $v(t)$, que son las mediciones generadas sintéticamente de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$v(t) = v_v(x, t)|_{x=L} + \mathbf{e}(t), \quad (33)$$

donde \mathbf{e} representa el error de medición modelado como un proceso estocástico gaussiano no correlacionado de media nula y dispersión s_e y $v_v(t)$ es la velocidad simulada numéricamente para el valor verdadero de los parámetros.

La estimación de los parámetros se lleva a cabo en dos etapas. Esto es posible ya que la densidad determina únicamente la amplitud de la señal de tensión y no interviene en su desplazamiento temporal. Por lo tanto, normalizando en amplitud tanto las mediciones simuladas como la señal de comparación se obtiene en una primera etapa la velocidad de propagación. Luego, calculada c , es posible estimar el valor de \mathbf{r} a partir de las señales sin normalizar.

La solución de este problema inverso de estimación de parámetros no lineal se encuentra aplicando el algoritmo de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963). Este algoritmo es una técnica iterativa que localiza el mínimo de una función multivariada expresada como suma de funciones no lineales. Se ha convertido en la técnica estándar para la solución de mínimos cuadrados no-lineales y puede pensarse como una combinación de los métodos Steepest-Descent y Gauss-Newton (Kelley, 1999).

Para el material compuesto por dos capas la misma metodología puede aplicarse considerando que ahora $z_H(t)$ estará representada por la expresión de la Ec. (30), y por consiguiente el número de parámetros a identificar será dos veces el número de capas que formen la muestra. Este método puede extenderse a una muestra de un material con más de dos capas. Sin duda un mayor número de parámetros dificultará la solución numérica del problema. En este trabajo solamente se resolvió el problema inverso correspondiente a un material homogéneo.

4 SIMULACIÓN Y RESULTADOS

4.1 Verificación numérica del método utilizado

Si bien el modelo de impedancia de transferencia definido en la sección 2.2. se fundamentó teóricamente, resulta interesante validarlo numéricamente. Por ello se propone comparar la tensión obtenida de acuerdo a la Ec. (26) utilizando la $v(t)$ calculada numéricamente con el mismo modelo, con la tensión $\mathbf{s}(x, t)$ expresada en la Ec. (6) para $x=0$ y el valor verdadero de los parámetros, $\mathbf{s}(t)$.

Para simular la tensión aplicada y la velocidad que se tiene en el otro extremo de la muestra se resuelve numéricamente la ecuación de onda aplicando un algoritmo de diferencias finitas

implementado en *Matlab*. La condición de contorno que se aplica en $x=0$ es un desplazamiento con forma de pulso gaussiano representado por la siguiente ecuación:

$$u(0,t) = e^{-10^{12}(t-3.10^{-6})^2} \quad (34)$$

Se considera como ejemplo una pieza de aluminio de longitud $L=2$ cm; $c=6419,88$ m/seg; $\rho=2700$ kg/m³. La solución de la ecuación diferencial proporciona el desplazamiento $u(x,t)$ y se calcula numéricamente la tensión en $x=0$ aplicando la relación (6) y la velocidad en $x=L$, la que denominamos $v_v(t)$, según la Ec.(12). Ambas señales se grafican en la Fig. 6.

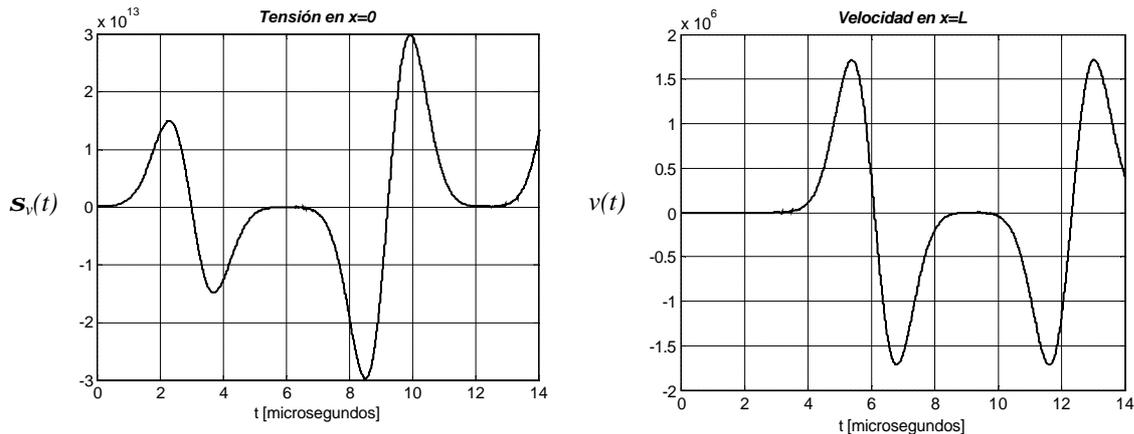


Figura 6: Simulación numérica de la tensión aplicada en $x=0$ y la velocidad medida en $x=L$.

Para la validación propuesta comparamos la curva de $S_v(t)$ mostrada en la Fig. 6 con la tensión calculada mediante la Ec. (23) a partir de la velocidad $v_v(t)$ resultante de la simulación, también mostrada en la misma Fig.6. Las dos tensiones se muestran superpuestas en la Fig. 7.

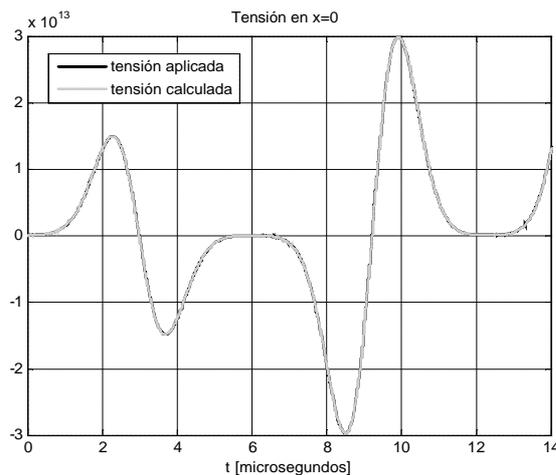


Figura 7: Comparación entre la tensión calculada por diferencias finitas y la tensión calculada por la convolución.

4.2 Resolución del problema inverso

Se resolvió el problema inverso para la misma muestra de aluminio mencionada en la sección anterior. Los resultados de las estimaciones varían levemente según sea el nivel de ruido

presente y el valor inicial propuesto. Los valores estimados son más exactos si la condición inicial de la velocidad de propagación es mayor a la real. En esos casos el error de estimación es comparable a la magnitud del error en la medición. Algunos de los valores obtenidos para ruido de medición con $s_e = 1\% \text{Max}(v_v(t))$ y valores iniciales que se apartan un 10% y un 20% de los valores reales se vuelcan en la Tabla 1.

Valor inicial	Valor estimado (ruido 1%)	Error (%)
c=7061,9 m/s	6431,7	0,18
r =2970 kg/m³	2695,3	-0,17
c=7061,9 m/s	6437,7	0,28
r =2930 kg/m³	2693,4	-0,24
c=5777,9 m/s	6233,4	-2,9
r =2970 kg/m³	2810,3	4,09
c=5777,9m/s	6272,4	-2,3
r =2430 kg/m³	2782,7	3,06
c=7703,9 m/s	6430,1	0,16
r =3240 kg/m³	2694,5	-0,2
c=7703,9 m/s	6428,5	0,13
r =2160 kg/m³	2695,4	-0,17
c=5135,9 m/s	6279,1	-2,19
r =3240 kg/m³	2779,1	2,93
c=5135,9 m/s	6258,9	-2,51
r =2160 kg/m³	2791,9	3,4

Tabla 1: Valores estimados de los parámetros y porcentaje del error de estimación.

5 CONCLUSIONES

El análisis realizado en este trabajo constituye un aporte al problema de identificar propiedades físicas de un material homogéneo, que pueden relacionarse con las constantes elásticas del mismo, utilizando señales de ultrasonido. Específicamente se han estimado velocidad de propagación y densidad. La formulación propuesta resultó en un problema no lineal de estimación de parámetros. En los casos considerados no se observaron problemas de estabilidad por lo cual la formulación de mínimos cuadrados adoptada para la función costo es adecuada y no es necesario agregar un término de regularización.

Como puede verse en la Tabla 1, el error en la estimación de la velocidad de propagación cuando el valor inicial está por debajo del valor real es ligeramente mayor que el nivel de ruido de la medición, aunque del mismo orden. En cuanto a la estimación de la densidad, por llevarse a cabo en una etapa posterior y de manera indirecta, es dependiente de la exactitud de la estimación del primer parámetro.

También se ha planteado el problema directo basado en la impedancia acústica para un material en dos capas, el que puede extenderse fácilmente a un mayor número de capas. En un trabajo futuro se resolverá el problema inverso correspondiente a este tipo de materiales y se considerarán materiales con pérdidas viscosas.

REFERENCIAS

- Cheeke, J. D. N. , *Fundamentals and Applications of Ultrasonic Waves (Pure and Applied Physics)*, Academic Press, N.Y. (2002).
- Fellah, F.G. Mitri, M. Fellah, E. Ogam, C. Depol-lie Z.E.A., Ultrasonic characterization of porous absorbing materials: Inverse Problem, *J. of Sound and Vibration* 302, 746-759 (2007).
- Hueter, T. F., Bolt, R. H. *Sonics. Techniques for the use of sound and ultrasound in engineering and science*. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1955.
- Kelley C.T. *Iterative Methods for Optimization*. SIAM Press, Philadelphia, 1999.
- Kino, Gordon S. , *Acoustic Waves: Devices, Imaging and Analog Signal Processing*, Prentice Hall (1987) Edición corregida 2000.
- Krautkramer, J., H., *Ultrasonic Testing of Materials*, Berlin, Heidelberg, N.Y. (1983).
- Levenberg K. A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(2):164–168, Jul 1944.
- Marquardt D.W. An Algorithm for the Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 11(2):431–441, Jun 1963.
- Rus, G. and J. García-Martínez, Ultrasonic tissue characterization for monitoring nanostructured TiO₂- induced bone growth, *Phys. Med. Biol.* 52 3531-3547 (2007).