

METRÓPOLIS MONTE CARLO CON INFORMACIÓN A PRIORI APLICADO A LA RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA

Rosana Barbuza^a y Alejandro Clause^{a,b}

^a *Universidad Nacional del Centro, 7000 Tandil, Argentina, rbarbu@exa.unicen.edu.ar*

^b *CNEA-CONICET, clause@exa.unicen.edu.ar*

Palabras clave: Tomografía, Reconstrucción de imágenes, Metrópolis Monte Carlo, Heurística.

Resumen. En este trabajo se propone utilizar el algoritmo Metrópolis Monte Carlo para generar reconstrucciones tomográficas a partir de pocas proyecciones, incorporando además información a priori acerca de la textura del objeto a reconstruir. La información a priori se introduce por medio de una función de energía local la cual se suma a la función de error respecto de las proyecciones. A diferencia de la función de información a priori utilizada tradicionalmente para filtrado de bordes, se introduce un control adaptativo del filtro durante el proceso de reconstrucción. El método fue probado con imágenes sintéticas como también en la reconstrucción de un objeto real a partir de un número muy limitado de proyecciones ruidosas obtenidas con una fuente Plasma Focus. En la reconstrucción de imágenes con regiones homogéneas, la técnica muestra buenos resultados, lo cual resulta altamente aplicable para ensayo no destructivo de materiales industriales, como también en la detección de formas o zonas específicas en imágenes médicas.

1 INTRODUCCIÓN

El algoritmo de Monte Carlo (MC) consiste en generar una trayectoria de muestras aleatorias (random walk) dentro del dominio que contiene la solución de un problema matemático dado, guiado por un criterio de selección que asegura la tendencia hacia la solución. Este algoritmo es aplicado tradicionalmente en el área de ingeniería, biología computacional, entre otras. [Metrópolis et al. \(1953\)](#) introdujo una modificación al algoritmo MC (Metrópolis Monte Carlo, MMC), el cual es capaz de generar (asintóticamente) muestras de acuerdo a la distribución de Gibbs-Boltzmann, evitando que el proceso quede atrapado en mínimos locales. Aplicaciones del método MMC para reconstrucción de imágenes pueden encontrarse en ([Gordon and Herman 1971](#); [Frieden 1975](#); [Kirkpatrick et al. 1983](#); [Kearfott and Scott 1990](#); [Winkler 2003](#)).

La inclusión de información a priori en la reconstrucción tomográfica de imágenes es un método complementario útil para el manejo de proyecciones borrosas, distorsionadas o ruidosas. Particularmente, en la reconstrucción de tomografías industriales cierta información sobre el diseño o acerca del proceso de fabricación está usualmente disponible (*e.g.* estructura interna, fallas habituales, homogeneidad del material). Esta información puede ser introducida en MMC para encontrar soluciones que coincidan con las esperadas. [Matej et al. \(1999\)](#) aplicó MMC para reconstruir imágenes 2D binarias desde proyecciones, que introduce una energía local para conservar regiones negras o blancas, incluyendo además reglas conservación de bordes para preservar la continuidad de las regiones. [Chan et al. \(1999\)](#) aplicó un método similar para reconstruir imágenes en escala de grises usando Gibbs priors. Otros métodos introducen una función cuadrática truncada con un parámetro umbral de valor predeterminado para detectar bordes cuando la diferencia entre píxeles vecinos supera este valor, mientras que para variaciones locales poco significativas se suaviza ([Huber 1981](#), [Winkler and Liebscher 2002](#), [Winkler 2003](#)).

En este trabajo se propone aplicar MMC para reconstrucción tomográfica incorporando restricciones durante el proceso de reconstrucción que aportan información acerca de la homogeneidad de las diferentes regiones de la imagen. Esta información a priori se introduce por una función explícita que se suma a la función de error respecto de las proyecciones. El valor del umbral se ajusta dinámicamente durante el proceso de MC para diferenciar bordes de ruido.

2 RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA

Considere un corte plano f , de un cuerpo como se muestra en la [Figura 1](#). Un haz de rayos paralelos que atraviesa dicho cuerpo en un determinado ángulo produce una proyección g sobre un detector ubicado detrás del mismo. Comúnmente, g es definida como el logaritmo del cociente entre la intensidad medida en el detector I y la intensidad de la radiación emitida I_0 , y es referida como la transformada Radon de la función f :

$$g = Rf \quad (1)$$

donde f es un vector n -dimensional que corresponde a los n píxeles del corte, g es un vector m -dimensional de m rayos que atraviesan el cuerpo en diferentes ángulos, y R es una matriz que representa la transformada ([Herman, 1980](#)). Cada uno de los elementos r_{ij} de R representan la longitud del i -rayo que atraviesa el píxel j ([Figura 1](#)).

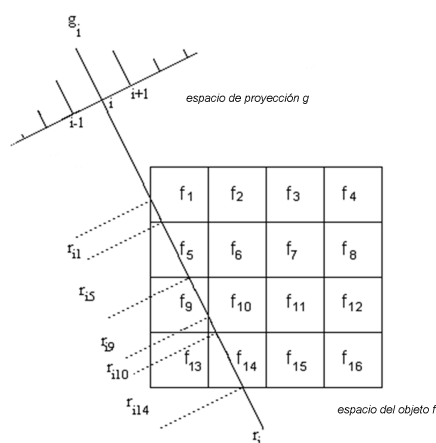


Figura 1: Rayo i -ésimo que cruza la imagen f y proyección generada g detrás del objeto.

El problema de reconstrucción tomográfica consiste en estimar f a partir de un conjunto de proyecciones g . Un método directo para resolver este problema es realizar una búsqueda aleatoria de la función f que satisface la Ec. 1, para las proyecciones dadas. El principal criterio para guiar la búsqueda es la consistencia de f con g . Luego, una función simple es error cuadrático entre las proyecciones producidas por la imagen reconstruida f y las proyecciones dato g :

$$D(f, g) = \|Rf - g\|^2 \tag{2}$$

Además, supongamos que se conoce a priori que el objeto está formado por regiones de intensidad uniforme. La homogeneidad puede ser medida con una función de energía local $L(C_j)$ en diferentes clusters C_j de 3×3 píxeles centrados en el píxel f_j , de manera de penalizar cambios abruptos en píxeles vecinos y sea nula en regiones totalmente homogéneas. Proponemos como energía local L :

$$L(C_j) = \sum_{v \in C_j} (f_v - \langle C_j \rangle)^2 \tag{3}$$

donde $\langle \cdot \rangle$ denota el promedio sobre el cluster

Para evitar que los bordes reales se difuminen, proponemos aplicar un filtro binario e_j a la función de energía, que anule su valor cuando el cluster tiene un fuerte contraste de tonalidades. La función guía resultante $P(f)$ es:

$$P(f) = \sum_j e_j L(C_j) \tag{4}$$

donde el filtro e_j on/off se define como:

$$e_j = \begin{cases} 0 & \text{if } L(C_j) > U & \text{filtro on} \\ 1 & \text{elsewhere} & \text{filtro off} \end{cases} \tag{5}$$

El parámetro U sirve para controlar el filtro. Si el filtro e_j se pone en estado on se cancela el término en Ec. 3 que corresponde al cluster C_j , ya que su energía local es más alta que el valor del umbral U .

Las dos funciones definidas en Ec. 2 y Ec 3 se combinan linealmente en una función objetivo general como:

$$E(f, g) = D(f, g) + \beta P(f) \quad (6)$$

El parámetro β controla los pesos relativos de la función de información a priori.

3 EL ALGORITMO METRÓPOLIS

MMC es una técnica de optimización inicialmente creada para generar configuraciones de cristales, caracterizadas por una función de energía E . Cada cambio aleatorio de la configuración del sistema físico corresponde a un cambio de energía ΔE . Si ΔE es negativa o nula el cambio es aceptado incondicionalmente. Si ΔE es positivo es aceptado con probabilidad $e^{-\Delta E/kT}$, T es la temperatura del sistema y k la constante de Boltzmann (Metropolis *et al.* 1953). MMC es un caso particular de cadena de Markov Monte Carlo (MCMC), la cual involucra un proceso de Markov que genera una secuencia de estados cuya probabilidad depende del estado previo. El esquema del algoritmo se describe con el diagrama de flujo de la Fig. 2.

En particular, MMC puede ser aplicado al problema de reconstrucción tomográfica, para encontrar un vector n -dimensional f (definida como variable Z en la Fig. 2) que minimiza la función $E(f, g)$ definida en la Ec. (6), donde g es un vector m -dimensional de las proyecciones dato. Para generar una nueva instancia a partir de la configuración anterior, se cambia la tonalidad de un píxel seleccionado al azar, guiando preferencialmente hacia imágenes que tienen una probabilidad más alta de ser consistente con los datos de las proyecciones (Barbuzza *et al.* 2007).

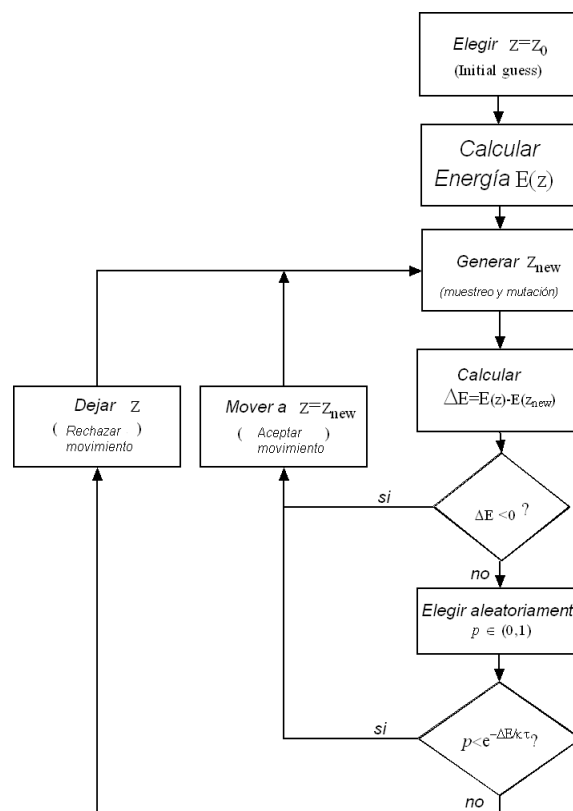


Figura 2: Diagrama de flujo del algoritmo MMC.

El criterio para aceptar los cambios propuestos es minimizar la energía $E(f, g)$. De esta forma se minimiza el error cuadrático de las proyecciones producidas por la imagen actual $f(t)$ comparadas con las proyecciones reales g , preservando además la homogeneidad de los píxeles vecinos tanto como sea posible. La secuencia de imágenes aceptadas crea una cadena de Markov. Generalmente el proceso se estabiliza hacia una energía, y se detiene con alguna condición de parada como un límite mínimo de valor de energía o un número máximo de iteraciones, cualquiera que se alcance primero. Siguiendo el procedimiento mencionado, el algoritmo MMC fue implementado en C++ y aplicado para reconstruir figuras planas a partir de un conjunto finito de proyecciones.

4 RESULTADOS

En esta sección se presenta una aplicación del método propuesto consistente en la reconstrucción de una imagen de 64×64 píxeles, mostrada en la Fig. 3, a partir de 8 proyecciones a 0, 30, 60, 75, 90, 105, 120 y 150 ángulos, con 128 rayos cada una. Primeramente, se analiza el efecto del parámetro β en la reconstrucción, comenzando con $\beta = 0$, minimizando solamente $D(f, g)$. Luego se va incrementando β y se analiza el efecto de suavizado de la función de información a priori. Finalmente, se estudian diferentes opciones para manejar dinámicamente el filtro de bordes e_j (Ec. 5).

4.1 Sin filtro

En esta sección se detallan varias reconstrucciones variando el parámetro β . El filtro e_j se define siempre en posición *off* ($U = \infty$). La Fig. 4 muestra los valores finales de $D(f, g)$ y $P(f)$ obtenidos con diferentes valores de β (las reconstrucciones correspondientes se muestran en la Fig. 3). Se puede ver que para grandes valores de β se producen imágenes más suaves, lo cual se corresponde con valores bajos de la función P . Sin embargo, este efecto compite con el incremento de D , lo cual indica que si β se incrementa las reconstrucciones f pierden consistencia con las proyecciones dato g . La Figura 5 muestra que la desviación píxel a píxel σ entre la imagen original y las imágenes reconstruidas. El error mínimo es $\sigma = 1218$ que se obtuvo para β igual a 0.5. Para valores más grandes o más pequeños de β la imagen reconstruida se esfuma o resulta más ruidosa respectivamente. Se puede observar que la información a priori con MC siempre mejoró respecto de MC plano ($\beta = 0$).

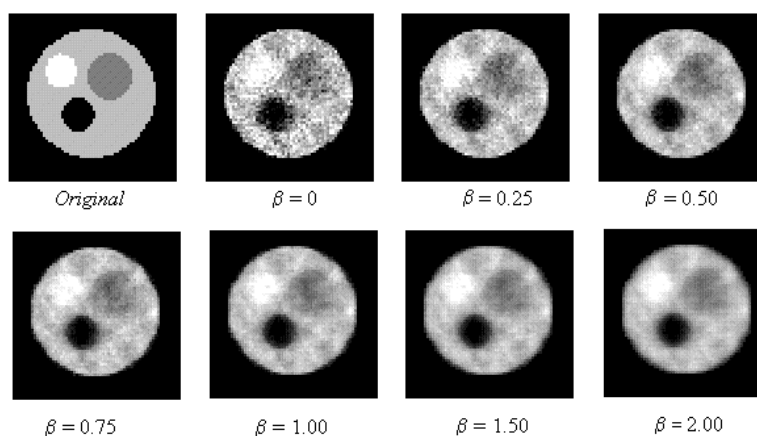


Figura 3: Reconstrucción MMC con diferentes parámetros β y el filtro e_j en posición *off*.

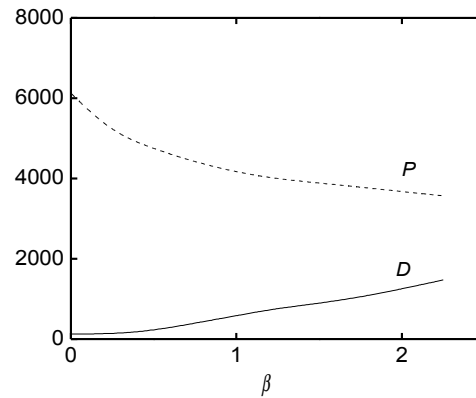


Figura 4: Error $D(f, g)$ y $P(f)$ de imágenes reconstruidas de Fig 3.

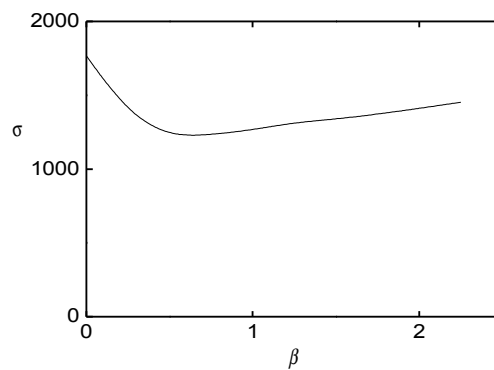


Figura 5: Error σ entre la imagen original y la imagen reconstruida de Fig. 3.

4.2 Filtro con umbral U fijo

El efecto de esfumado de las imágenes reconstruidas puede ser reducido aplicando el filtro e_j . Cuando el filtro es puesto en *on* para algún cluster seleccionado C_j con contraste, se elimina el j^{th} término de la función $P(f)$. En esta forma, el suavizado se centra solamente en clusters homogéneos. El problema es definir un control apropiado para el filtro. Una estrategia heurística es estimar el parámetro probando con diferentes valores (Geman and Geman 1984, Winkler 2003). Alternativamente el umbral se puede estimar basándose en algún conocimiento previo acerca de los niveles de grises entre regiones adyacentes (Chan et al, 1999). Las Figuras 6 y 7 muestran los resultados de las reconstrucciones usando diferentes valores de umbral U en la Ec. 5. Se puede ver que para esta imagen particular existe un óptimo de umbral en el rango cercano a $U \sim 10^4$. Aunque un valor apropiado de U depende cada imagen particular, el resultado interesante es que generalmente hay un rango óptimo fuera del cual la imagen es o muy ruidosa o demasiado difuminada.

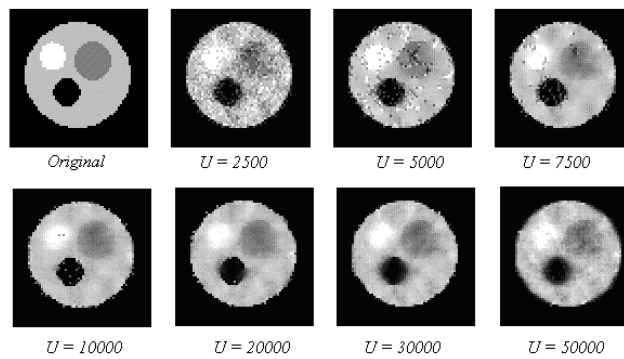


Figura 6: Imágenes reconstruidas usando el filtro e_j con diferentes valores de umbral U

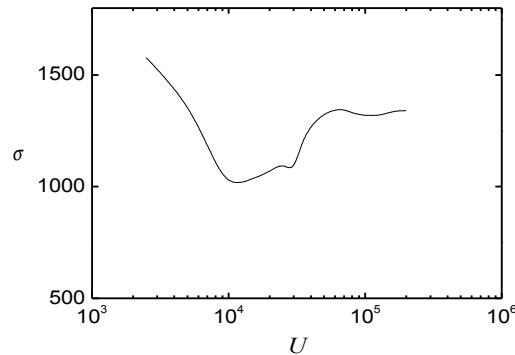


Figura 7: Error entre la imagen original y la imagen reconstruida obtenidas en la Fig. 6

4.3 Filtro dinámico

En esta sección, se presentan dos métodos dinámicos para controlar el filtro que preserva los bordes de la imagen. El primer filtro se propone para balancear las variaciones de las funciones D y P durante el proceso de reconstrucción. Así, en cada paso n de MMC se compara la relación D_n/D_0 y P_n/P_0 , y el umbral U se actualiza como sigue:

$$\begin{aligned}
 & \text{if } \frac{D_n}{D_0} > \frac{P_n}{P_0} \\
 & \text{then} \\
 & \quad U = U_{\max} \frac{D_n}{D_0} \\
 & \text{else} \\
 & \quad \text{continue}
 \end{aligned} \tag{7}$$

donde $D_n = D(f_n, g)$ y $P_n = P(f_n)$ y U_{\max} se inicializa sólo en el primer paso de MMC:

$$U_{\max} = \max L(C_j) \tag{8}$$

Las Figuras 8 y 9 muestran el resultado de la imagen reconstruida usando este método, y la

variación del umbral U durante el proceso de reconstrucción. Para $\beta=0.5$, el error píxel-a-píxel entre la imagen original y la imagen reconstruida es $\sigma=312$. Se puede ver que el filtro preserva los bordes y las regiones homogéneas. La Fig. 10 muestra la evolución de $D(f, g)$ y $P(f)$, donde se puede ver que ambos indicadores decrecen (comparar con la Fig. 4).

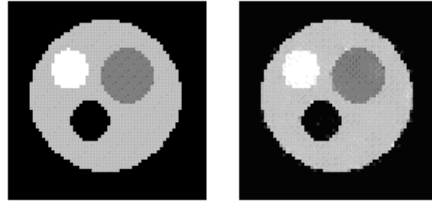


Figura 8: Imagen original (izq.) e imagen reconstruida usando el umbral dinámico de la Ec. 8

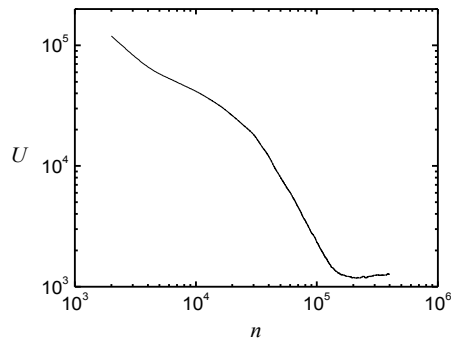


Figura 9: Evolución del valor de umbral U durante la reconstrucción de Fig. 8

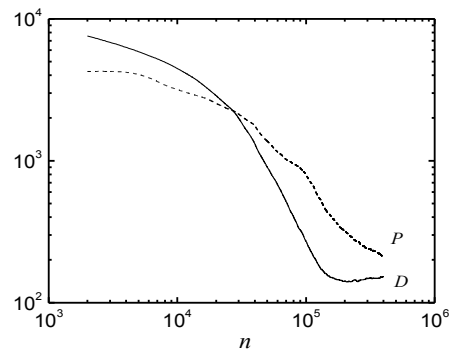


Figura 10: Error $D(f,g)$ y $P(f)$ durante la reconstrucción de la Fig. 8

El segundo filtro dinámico controla el umbral usando directamente la energía local:

$$U = \max (e_j L(C_j)) \quad (9)$$

donde el máximo se toma evaluando los clusters no filtrados. Las Figuras 11 y 12 muestran las imágenes reconstruidas usando este método, y las variaciones de U y el máximo $L(C_j)$ durante el proceso de reconstrucción. La Figura 13 muestra la reconstrucción de otras

imágenes usando el filtro dinámico de bordes propuesto. Ambas imágenes se proyectaron en los ángulos 0, 30, 60, 75, 90, 105, 120, 150 con 20 rayos para la primera y 512 rayos para la segunda. El desvío entre la imagen original y la imagen reconstruida es $\sigma=6$ y $\sigma=1300$, respectivamente.

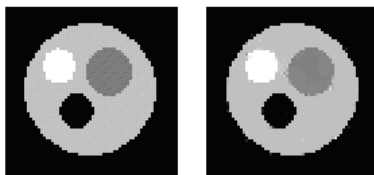


Figura 11: Imagen original (izq) e imagen reconstruida por ajuste del umbral con la Ec. 9.

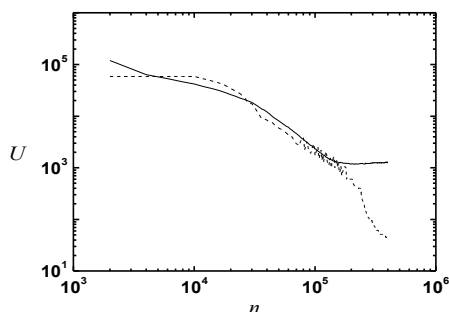


Figura 12: Evolución del umbral U por tasa de error (sólido) y por máxima energía local (punteada).

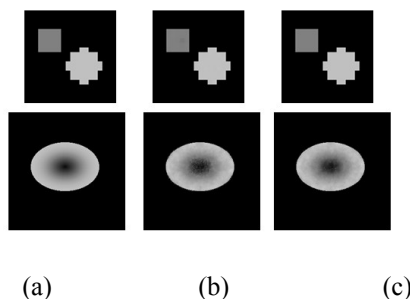


Figura 13: Reconstrucciones con valores de umbral dinámico de dos imágenes originales. (a) Original (b) por ajuste de tasa de error (c) por máxima energía local.

Finalmente, el algoritmo dinámico se aplica para un caso real usando las radiografías obtenidas con una fuente Plasma Focus (Vénere *et al.* 2001). Las radiografías corresponden a una pieza metálica montada sobre una plataforma de rotación, la cual se irradió en 8 ángulos diferentes 0, 30, 60, 75, 90, 105, 120 y 150 grados, de 512 rayos cada una. La Fig. 14 muestra el conjunto de radiografías de la pieza a diferentes ángulos. La longitud del lado del píxel es 0.08 mm. Las reconstrucciones fueron realizadas usando el algoritmo MMC con información a priori. La Fig. 15 muestra diferentes vistas y cortes de la imagen reconstruida usando el umbral dinámico de la Ec. 7 con $\beta=0.75$. La resolución es de aproximadamente 0.3 mm. La Figura 17 compara la evolución de la función $P(f)$ durante la reconstrucción, promediada sobre todos los cortes del BNC, el cual usa un filtro adaptativo y $\beta=0$. Se puede ver que en el caso siguiente $P(f)$ se incrementa a través de la reconstrucción mientras que el filtro adaptativo

decrece progresivamente una vez que el error entre proyecciones $D(f, g)$ se redujo suficientemente. Es interesante notar que el valor final de $D(f, g)$ es similar en ambos casos, aunque la calidad visual de la tomografía tiene una alta reducción del ruido como se puede ver en la Fig 16.

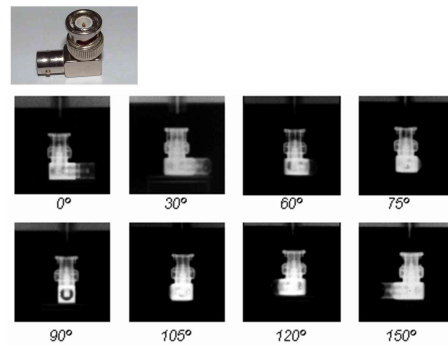


Figura 14: Fotografía del objeto BNC y ocho proyecciones obtenidas con una fuente Plasma Focus.

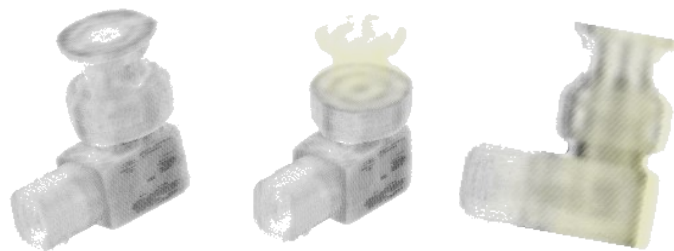


Figura 15: Reconstrucciones del objeto BNC y dos cortes usando MMC con información y umbral dinámico

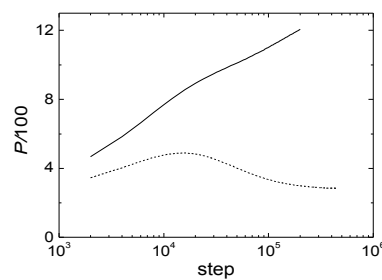


Figura 16: Evolución de $P(f)$ usando MMC con filtro dinámico según la Ec. 7 (sólida) y con $\beta=0$ (punteada).

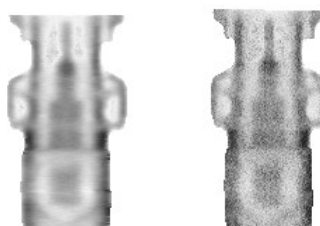


Figura 17: Cortes internos de la tomografía obtenida con MMC con filtro dinámico (izq) y con $\beta=0$ (der).

5 CONCLUSIONES

Se presentó una aplicación del algoritmo MMC, guiado por información a priori acerca de la textura de la imagen. El método muestra buenos resultados para guiar el proceso de reconstrucción hacia soluciones de buena calidad, especialmente en casos donde las proyecciones dadas son escasas o ruidosas. La información a priori se representa mediante una función de energía local controlada adaptativamente que obtiene valores de las propiedades estadísticas promedio de la imagen. Para casos de imágenes sintéticas, las reconstrucciones resultaron muy cercanas a las imágenes originales. El método fue aplicado también a un caso real de reconstrucción de la estructura interna de un objeto metálico con componentes internos mostrando resultados excelentes.

REFERENCIAS

- Barbuzza R., Vénere M. and Clause A., Tomographic Reconstruction Using Heuristic Monte Carlo Methods, *Journal of Heuristic*, Springer US, 13, 3, 227-242 (2007).
- Chan T., G. Herman and E. Levitan, Probabilistic Modeling of Discrete Images. In G. T. Herman and A. Kuba (eds), *Images Discrete Tomography: Foundation, Algorithms and Application.*, pp 214-233. Birkhauser Boston, Cambridge, MA (1999).
- Frieden B., Image Enhancement and Restoration, *Topics in Applied Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 6, 177-249 (1975).
- Geman and Geman D., Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6, 721-741 (1984).
- Gordon R. and Herman G., Reconstruction of pictures from their projections, *Graphics and image processing, Communication of the ACM*, W. Newman ed., 14 (12), 759-764 (1971).
- Herman, G. T., *Image Reconstruction from Projections. The Fundamental of Computerized Tomography*, Academic Press, London (1980).
- Huber P. J., *Robust statistics*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, New York (1981).
- Kearfott K. and Scott E., Simulated annealing image reconstruction method for pinhole aperture single photon emission computed tomography, *IEEE transaction on medical imaging*, 9 (2), 128-143 (1990).
- Kirkpatrick S., Gelatt C. and Vecchi M., Optimization by Simulated Annealing, *In Science*, 220 (4598), 671-679 (1983).
- Matej S., Vardi A., Herman G. and Vardi E., Binary Tomography Using Gibbs Priors. In G. T. Herman and A. Kuba (eds), *Images Discrete Tomography: Foundation, Algorithms and Application.* pp 191-211. Birkhauser Boston, Cambridge, MA (1999).
- Metrópolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. and Teller E., Equation of state calculations by fast computing machines, *Journal of Che. Phys.*, 21, 1087-1092 (1953).
- Vénere M., Moreno C., Clause A., Barbuzza R. and del Fresno M., Tomographic system based on plasma focus x-rays, *Nukleonika*, 46 (1), 5-6 (2001).
- Winkler G. and Liebscher V. Smoothers for discontinuous signal. *Journal Nonpar. Statist.*, 14(1-2):203-222 (2002).
- Winkler G., *Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods, A Mathematical introduction*, Springer Verlag Berlin Heidelberg 2da Ed., Germany (2003).