

APLICACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA LA DETERMINACION DE LA VELOCIDAD CRITICA DE UNA PIEZA ROTANTE CON DISTINTAS CONDICIONES DE VINCULACION EN SUS EXTREMOS.

Ariel Frigiotti, Héctor Sanzi y Gustavo Elvira

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Haedo
París 532 Haedo (1706) Buenos Aires Argentina
E-mail tecsaing@fibertel.com.ar

Palabras Clave: Árbol Rotante, Velocidad Crítica, Elementos Finitos.

Resumen. *La velocidad crítica en componentes rotantes, tales como árboles de transmisión entre otros, es aquella velocidad de rotación que produce una frecuencia de excitación igual a la frecuencia natural de vibración del componente o de su sistema asociado. La velocidad crítica produce una resonancia y para propósitos prácticos los términos de frecuencia natural, resonancia y velocidad crítica son sinónimos. El correcto funcionamiento del componenete rotante está relacionado con el conocimiento de sus variables geométricas, materiales y condiciones de vínculo.*

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos, aplicando procedimientos habituales de diseño, que se comparan con los que resultan de mediciones obtenidas con acelerómetros en un ensayo en laboratorio y los obtenidos a partir del planteo de un modelo tridimensional de elementos finitos, considerando diferentes condiciones de vinculo (variación en la rigidez de los apoyos), para modos de vibración más altos.

1 INTRODUCCION

La velocidad crítica de un elemento rotante, es aquella velocidad de rotación que produce una frecuencia de excitación igual a la frecuencia natural de vibración del componente o de su sistema asociado. La velocidad crítica produce una resonancia y para propósitos prácticos de diseño, los términos frecuencia natural, resonancia y velocidad crítica son sinónimos.

La operación sostenida en su movimiento, de un árbol de transmisión a una velocidad de rotación coincidente o próxima a su velocidad crítica, da lugar a vibraciones de gran amplitud que pueden resultar en la fractura de la pieza o de alguno de sus elementos asociados. Es por este motivo que el conocimiento preciso de la velocidad crítica de los árboles de transmisión es de suma importancia durante la etapa de diseño, lo cual permitirá aplicar los correspondientes coeficientes de seguridad que garanticen que la integridad de la misma y un funcionamiento en condiciones seguras.

El método normalizado para el cálculo de la velocidad crítica en árboles de transmisión esta previsto en varias normativas, entre las cuales se encuentra la norma SAE, en su publicación "AE7 – Universal Joint and Driveshaft - Design Manual ^[1].

Las expresiones empleadas por SAE se utilizan para encontrar la velocidad crítica más baja, pero esta presentan ciertas simplificaciones que le restan exactitud a los resultados obtenidos, por ejemplo, asume que la pieza en estudio es un árbol de sección cilíndrica uniforme y que sus soportes son infinitamente rígidos. Determinados factores de seguridad son utilizados para compensar esta simplificación.

Lo cierto y de gran necesidad ingenieril es la determinación de velocidades críticas en correspondencia con estados de deformación de mayor energía, hecho no permitido por la norma mencionada.

En un trabajo de laboratorio realizado y publicado por SAE según "Informe 982764 – Critical Speed Failure Mode of a Steel Driveshaft^[2]", se presentan valores de velocidades críticas resueltos mediante dos tipos de ensayos.

El primer método de ensayo corresponde a "Frequency Response Test", que consiste en el análisis de las frecuencias de vibración provenientes de un acelerómetro montado verticalmente en el centro del árbol de transmisión y se lo golpea con un martillo, que también posee un acelerómetro. Ambos acelerómetros

están conectados a un analizador de frecuencia para determinar la frecuencia natural del sistema basado en los datos de entrada.

El segundo método se basa en la determinación de la velocidad crítica haciendo girar al árbol en un banco de prueba hasta alcanzar la falla.

Según el Universal Joint and Driveshaft - Design Manual de SAE ^[1], el uso de las ecuaciones para el cálculo de la velocidad crítica son válidas cuando se emplean estructuras con soportes rígidos. Dichas ecuaciones introducen errores cuando se emplean soportes extremadamente flexibles.

La introducción de soportes más flexibles hace necesaria la evaluación e incorporación de otros modos de vibración para resolver el problema, ya que la frecuencia de vibración transversal fundamental se modifica.

Cuando un árbol de transmisión se encuentra montado sobre una estructura muy flexible, la respuesta dinámica en cuanto a la velocidad crítica, se puede describir como:

1 – El primer modo de vibración se asemeja a una frecuencia de rebote. Existe alguna flexión del árbol dependiendo de la rigidez relativa, pero los extremos y el centro del mismo, se mueven en la misma dirección y al mismo tiempo.

2 – El segundo modo de vibración se asemeja a una frecuencia de inclinación. En esta condición, los extremos opuestos del árbol se encuentran vibrando en direcciones opuestas al mismo tiempo y el árbol se flexiona levemente. Su movimiento básico es un cabeceo alrededor del centro del árbol.

3 – El tercer modo de vibración se asemeja a una viga en condición libre-libre. Ambos extremos del árbol están vibrando en una dirección opuesta a la del centro, resultando en una flexión significativa del mismo.

Algunos árboles pueden, por consiguiente, asumir distintas características de velocidad crítica dependiendo de las restricciones impuestas por sus vínculos. Por lo tanto el comportamiento del árbol depende de las características o rigidez que ofrecen los soportes, en donde pueden variar en un rango muy grande entre los dos extremos (viga libre-libre hasta fija-fija).

En resumen:

1 – Árboles montados sobre soportes relativamente rígidos responden razonablemente bien a la aproximación clásica de la viga con sus dos extremos fijos. En estos casos es únicamente necesario mantener la velocidad máxima de

operación bien por debajo de la frecuencia de vibración transversal fundamental, para evitar alcanzar la velocidad crítica.

2 – Con soportes extremadamente flexibles, el primer y segundo modo de vibración son básicamente frecuencias de rebote y cabeceo. Estos modos se caracterizan por ser de baja frecuencia, corta duración e inestabilidad las cuales pueden operar virtualmente en un modo libre de vibraciones. Las pequeñas fuerzas provenientes del desbalanceo, con estas bajas velocidades, colaboran con esta situación.

3 – Con soportes extremadamente flexibles, el tercer modo de vibración está bien por debajo de aquel calculado a través de los métodos clásicos. En condiciones extremas el tercer modo puede encontrarse por encima del doble de la frecuencia fundamental. Debe tenerse en cuenta que flexiones extremadamente altas ocurren en este modo las cuales lo convierten en la condición de falla potencial más seria.

4 – Con soportes elásticos, los árboles pueden ser fabricados más largos y esbeltos sin dificultades de ingresar en el campo de la velocidad crítica.

Teniendo en cuenta estas consideraciones dinámicas, se hace necesaria la completa evaluación estructural a partir de la utilización de métodos alternativos más detallados o exactos.

Bajo estas consideraciones se plantea un modelo de elementos finitos, de tal manera de analizar la variación de la frecuencia natural y la de los modos de vibración de un árbol de transmisión a medida que se modifica la rigidez de sus apoyos a los que se encuentra vinculado, con el fin de colaborar en el adecuado diseño del mismo.

2 DESCRIPCIÓN DEL COMPONENTE

El árbol de transmisión está constituido básicamente por un tubo y dos horquillas fijas, soldadas en sus extremos, Figura 1. Las principales dimensiones son:

Longitud entre centros de juntas universales: 60”
Diámetro exterior del tubo: 3.5”
Espesor del tubo: 0.083”

Tubo: Acero SAE 1017
Módulo de elasticidad (E): 29.000.000 psi = 2.040.000 kg/cm²
Densidad: 0.281 lb/in³ = 7.78 kg/dm³

Horquilla Fija: Acero SAE 1141 microaleado
Módulo de elasticidad (E): 29.000.000 psi = 2.040.000 kg/cm²
Densidad: 0.281 lb/in³ = 7.78 kg/dm³

3 MODELO DE CALCULO POR ELEMENTOS FINITOS

El árbol de transmisión fue modelado como un cuerpo sólido tridimensional por medio del programa de CAD SolidWorks 99^[3] y luego exportado al programa Cosmos/M^[4] para realizar el mallado correspondiente..

A partir del conocimiento de las dimensiones de la pieza, propiedades mecánicas y físicas de sus materiales, condiciones de vínculo y grados de libertad asociados, se preparó un modelo computacional con el objetivo de determinar las frecuencias naturales para los distintos modos de vibración. Para ello se analiza la respuesta dinámica, o velocidades críticas, para dos planos ortogonales XY y XZ, según se muestran las Figuras 2 y 3.

La condición cinemática impuesta en los extremos por las crucetas, articula al árbol de transmisión alrededor de dos ejes pasantes y perpendiculares al plano de estudio (XY o XZ según sea el caso), los cuales le permiten flexionarse. Dicha condición se representa en la figura 4.

Los ensayos de laboratorio desarrollados por SAE, "Informe 982764 – Critical Speed Failure Mode of a Steel Driveshaft"^[2], para encontrar la respuesta en el primer modo, fueron realizados vinculando al árbol a la bancada de una máquina que puede, a fines prácticos, considerarse rígida. En un primer estudio y con la intención de encontrar la sensibilidad del modelo planteado, se determina la frecuencia natural de vibración para el primer modo.

Para este caso se restringen los desplazamientos de aquellos nodos coincidentes con los ejes de articulación del árbol de transmisión, representando así su condición de vínculo teórica, figura 6.

Un estudio posterior, una vez ajustado el modelo, consistirá en analizar la variación de la velocidad crítica para diferentes valores de rigidez de sus apoyos. En esta situación a aquellos nodos que en el primer análisis se les restringió todos sus desplazamientos, en este caso se los ha vinculado a elementos de barra de tres dimensiones “**TRUSS3D**”, modificando el Módulo de Elasticidad longitudinal. Estas barras, luego de vincularse a los nodos del modelo, concurren a un punto restringido de desplazarse en las tres direcciones. De esta forma se restringe elásticamente los desplazamientos de los nodos que representan el apoyo.

El efecto de la variación del Módulo de Elasticidad de las barras es equivalente a la variación de la constante “K” de un resorte (**SPRING ELEMENT**). La figura 6 muestra el tipo de vínculo empleado para este nuevo modelo.

Para el modelo se emplearon elementos sólidos tetraédricos de 4 nodos “**TETRA4**” del Programa COSMOS/M. En la figura 5 puede observarse el modelo utilizado.

Se realizó una gran densificación de elementos con el objeto de obtener resultados con un alto grado de exactitud. El modelo quedó conformado por 42937 elementos y 13700 nodos.

4 RESULTADOS DEL MEF

4.1 Resultados del MEF con condiciones de vínculo rígido

Con el modelo propuesto, determinamos las diferentes frecuencias naturales y modos de vibración, variando el valor del Módulo de Elasticidad, es decir la rigidez. El método de obtención de autovalores y autovectores utilizado fue el SUBSPACE ITERATION METED. A medida que el Módulo tiende a valores mayores, condición de rigidez infinita, se encuentra el Primer Modo de vibración. En esta variación se encuentran los distintos Modos a partir del Segundo. En la figura 15 se muestra la relación que existe entre la velocidad crítica y la rigidez de sus apoyos.

Bajo este concepto, en la tabla siguiente se presentan los resultados obtenidos para las distintos Modos de vibración:

Modo	Frecuencia	Revoluciones	Plano de Deformación	Figura
-	Hz	rpm	-	-
1	105,75	6345	XY	7
2	113,54	6813	XZ	8
3	140,26	8416	XY	9
4	245,91	14755	XZ	10
5	402,95	24177	XY	11
6	436,21	26173	XZ	12
7	464,91	27895	XY	13
8	641,99	38520	XZ	14

Tabla 1: Frecuencias naturales de vibración de un árbol rotante

El primer modo de vibración presenta un valor de 105.755 Hz, o en términos de velocidades 6345 rpm. Este resultado es comparado con los obtenidos mediante la formulación teórica según el "Universal Joint and Driveshaft - Design Manual de SAE" ^[1], y las dadas por medio de las mediciones prácticas de laboratorio, tomadas del trabajo realizado por SAE, según "Informe 982764 – Critical Speed Failure Mode of a Steel Driveshaft"^[2].

5 RESULTADOS SEGÚN MANUAL SAE – AE7 ^[1]

A partir de las expresiones encontradas en la publicación de Manual SAE AE7 ^[1], se obtiene el valor de la velocidad crítica del componente rotante:

Fórmula para un árbol tubular:

Donde:

$$N_c = 4.705.000 \times \frac{\sqrt{(3,5")^2 + (3,33386")^2}}{(60")^2}$$

d_o = Diámetro exterior (pulgadas)

d_i = Diámetro interior (pulgadas)

L = Longitud entre apoyos (centros de las juntas universales) (pulgadas)

$$N_c = 6317 \text{ r.p.m.}$$

Velocidad de operación segura N_s :

$$N_s = K \cdot N_c$$

Donde

K = Factor de seguridad

N_c = Velocidad crítica (r.p.m.)

El árbol en estudio es de aplicación en pick ups (light duty), por lo que el factor de seguridad será de 0,85.

$$N_s = 0,85 \cdot 6317 \text{ r.p.m.} = 5369 \text{ r.p.m.}$$

6 RESULTADOS OBTENIDOS EN LOS ENSAYOS DE LABORATORIO

A partir de los resultados extraídos de SAE Technical Paper 982764, "Critical Speed Failure Mode of a Steel Driveshaft" - Jeff Perriat and John Hickey ^[2], obtenemos el valor de la velocidad crítica:

Tipo Ensayo	Nc
	rpm
Respuesta en frecuencia	5745
Falla por velocidad crítica en banco	5900

Tabla 2: Velocidad crítica de un árbol rotante tomado de un ensayo de Laboratorio ^[2]

Para comparación tomaremos el valor de 5900 rpm.

7 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

De acuerdo a los resultados obtenidos hacemos la siguiente tabla comparativa para el Primer Modo de Vibración:

Formulación Teórica [1]	Formulación Test [2]	Formulación MEF	Variación [1]-MEF	Variación [2]-MEF
rpm	rpm	rpm	%	%
5369 (*)	5900	6345	18	7,5
6317 (**)	5900	6345	0,01	7,5

(*) Con Coeficiente Seguridad

(**) Sin Coeficiente Seguridad

Tabla 3: Comparación de resultados

8 CONCLUSIONES

1.- Existe muy buena aproximación entre los resultados obtenidos por las formulaciones de aplicación práctica y las correspondientes por Elementos Finitos, las teóricas sin coeficiente de seguridad están en el orden del 0.01% y las obtenidas por Test, en el orden del 7.5%.

2.- Los resultados obtenidos por la fórmula teórica dada por el Manual SAE AE7 ^[1] difiere en un 7% con respecto a la obtenida por ensayo “Informe 982764 – Critical Speed Failure Mode of a Steel Driveshaft”^[2], en la condición de falla.

3.- Las diferencias encontradas en los diferentes procedimientos están fuertemente asociadas a la imposibilidad de predecir y cuantificar la influencia de los siguientes factores:

- Huelgos en las juntas universales
- Efectos de amortiguación en los apoyos
- Elasticidad de los apoyos (la experiencia realizada lo verifica)
- Excentricidad del árbol de rotación con respecto al centro de masas del árbol, lo cual da lugar a fuerzas centrífugas por desbalanceo.

4.- La ventaja que introduce la aplicación del MEF es la simplicidad para la determinación de las velocidades críticas correspondientes a modos de vibración de orden superior.

5.- Es de interés llevar a cabo un ensayo para modos superiores con el fin de comparar los resultados obtenidos.

6.- En función de los resultados obtenidos para el primer Modo, se desprende que el modelo propuesto de elementos finitos representa adecuadamente el comportamiento dinámico del componente rotante. Las velocidades críticas obtenidas para modos superiores de vibración serán utilizadas para ajustar diseños pre-establecidos y asegurar la integridad estructural de los mismos.

9 REFERENCIAS

- 1 Universal Joint and Driveshaft Design Manual – AE-7. Publicado por: Society of Automotive Engineers – Año 1991
- 2 Critical Speed Failure Mode of a Steel Driveshaft. SAE Technical Paper 982764. Autores: Jeff Perriat / John Hickey – Año: 1998
- 3 Programa de CAD - SolidWorks 99
- 4 Programa de análisis por MEF – COSMOS/M 2.5 – 256K Version

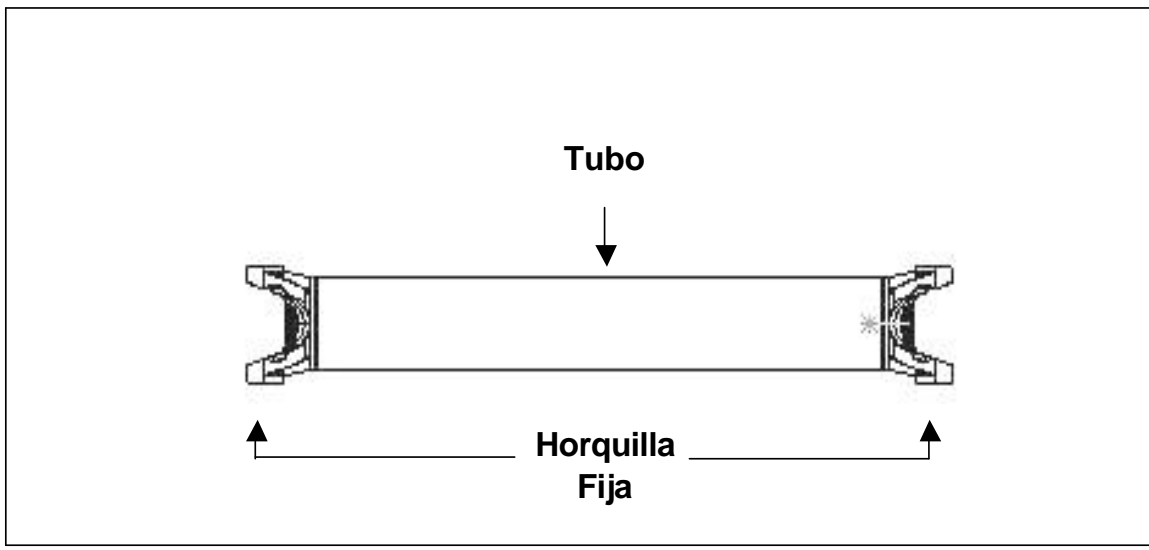


Figura 1: Descripción de las partes constitutivas del modelo en estudio

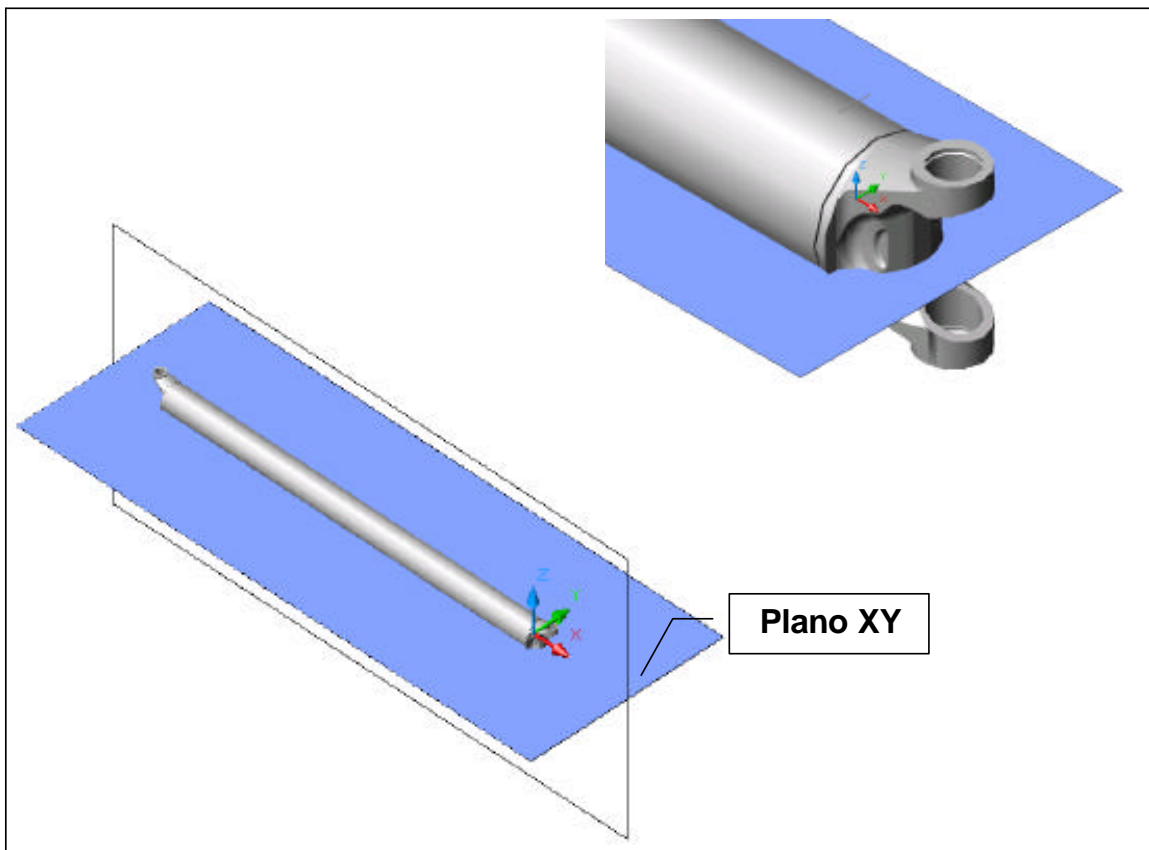


Figura 2: Plano de estudio XY

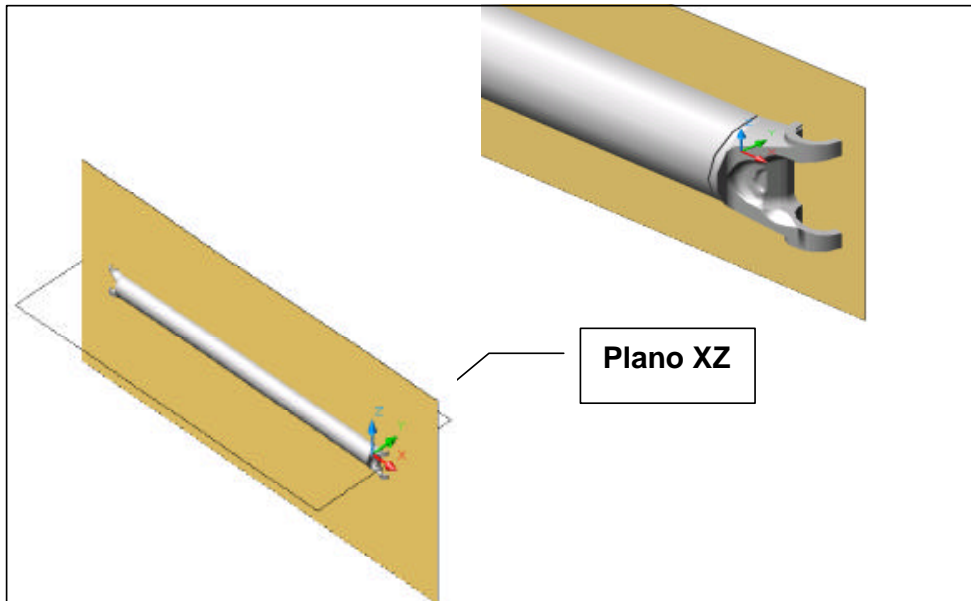


Figura 3: Plano de estudio XZ

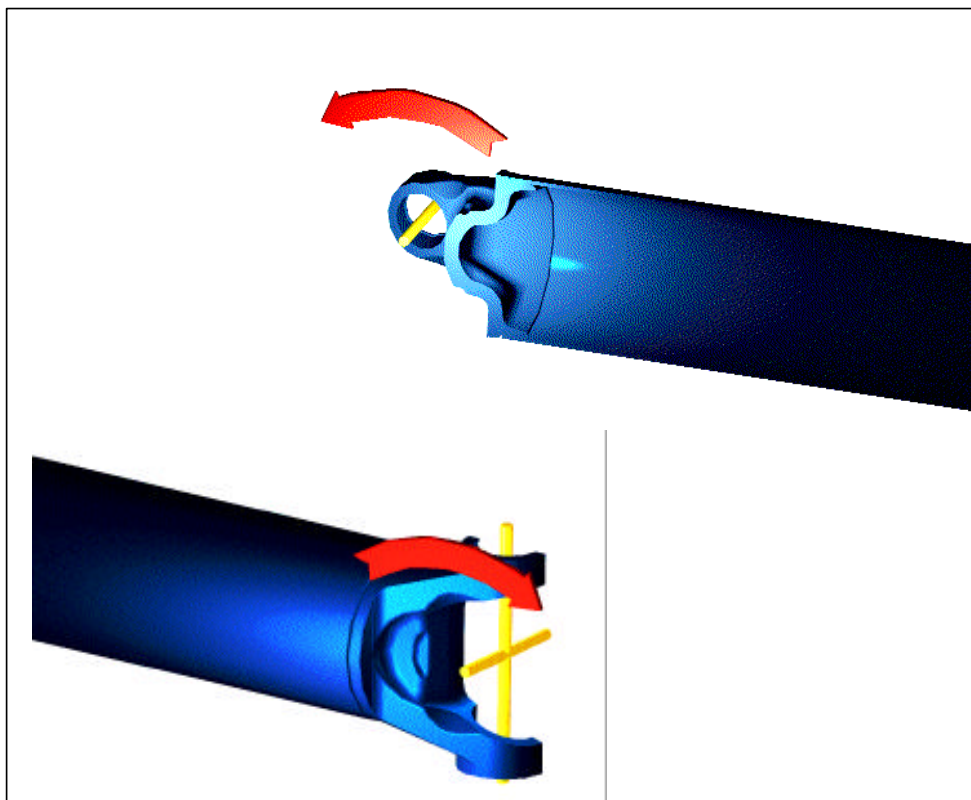


Figura 4: Grado de Libertad: Rotación en el eje Z

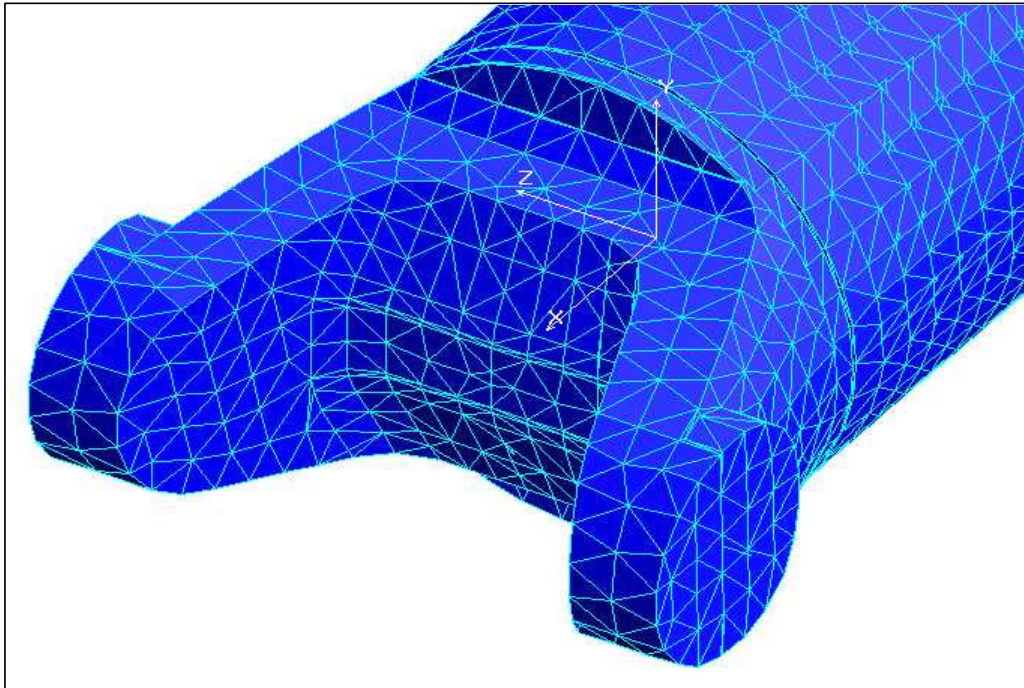


Figura 5: Modelo de Elementos Finitos

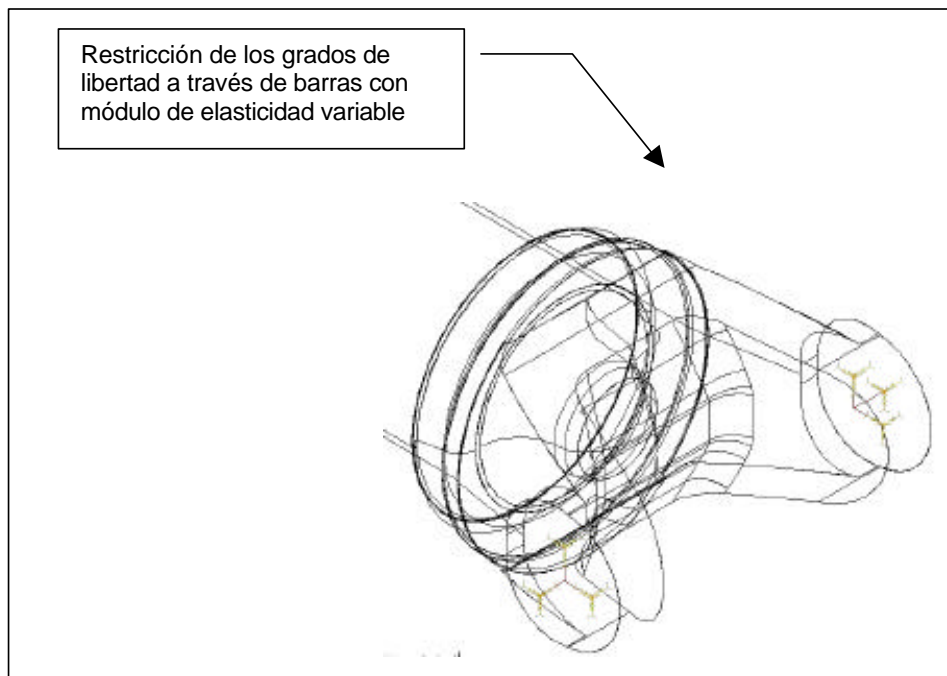


Figura 6: Condiciones de borde para el análisis de la respuesta al cambio en la rigidez de los apoyos

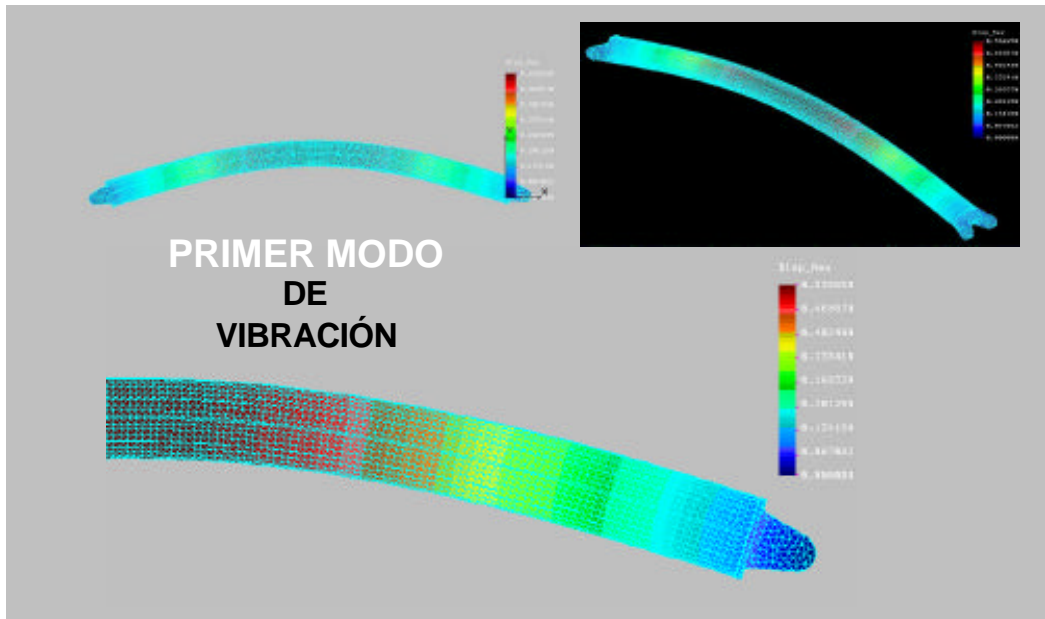


Figura 7: Primer Modo de Vibración - 105,75 Hz

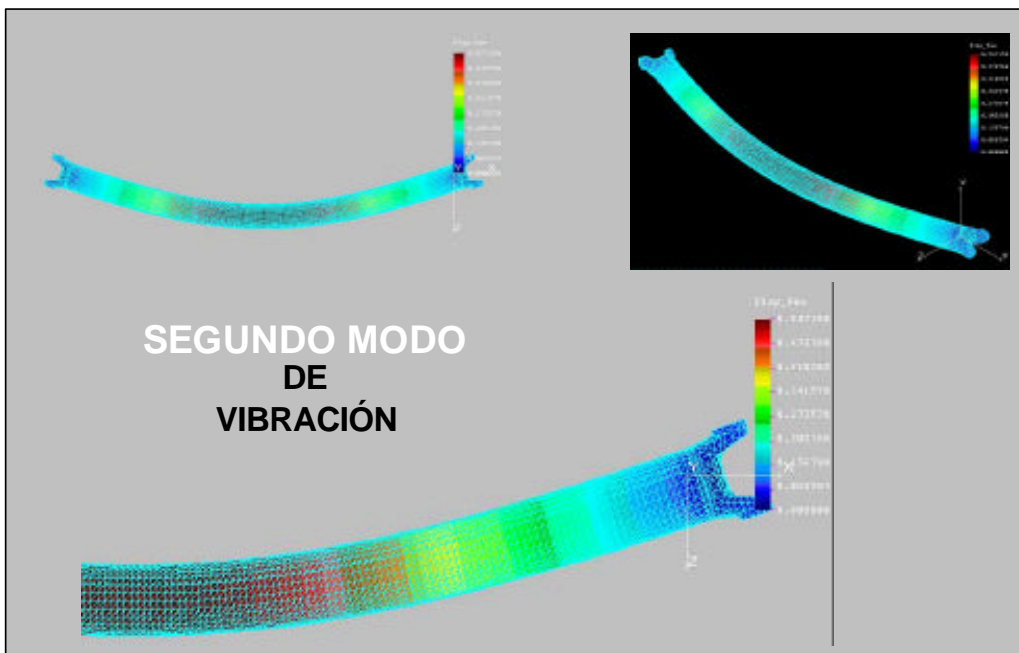


Figura 8: Segundo Modo de Vibración - 113,54 Hz

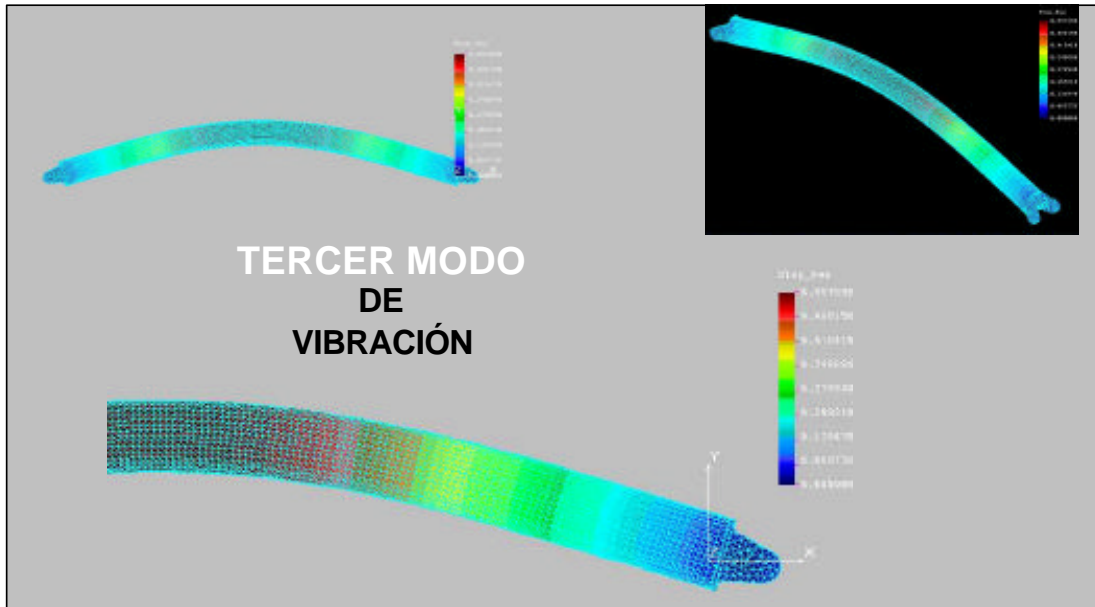


Figura 9: Tercer Modo de Vibración - 140,26 Hz

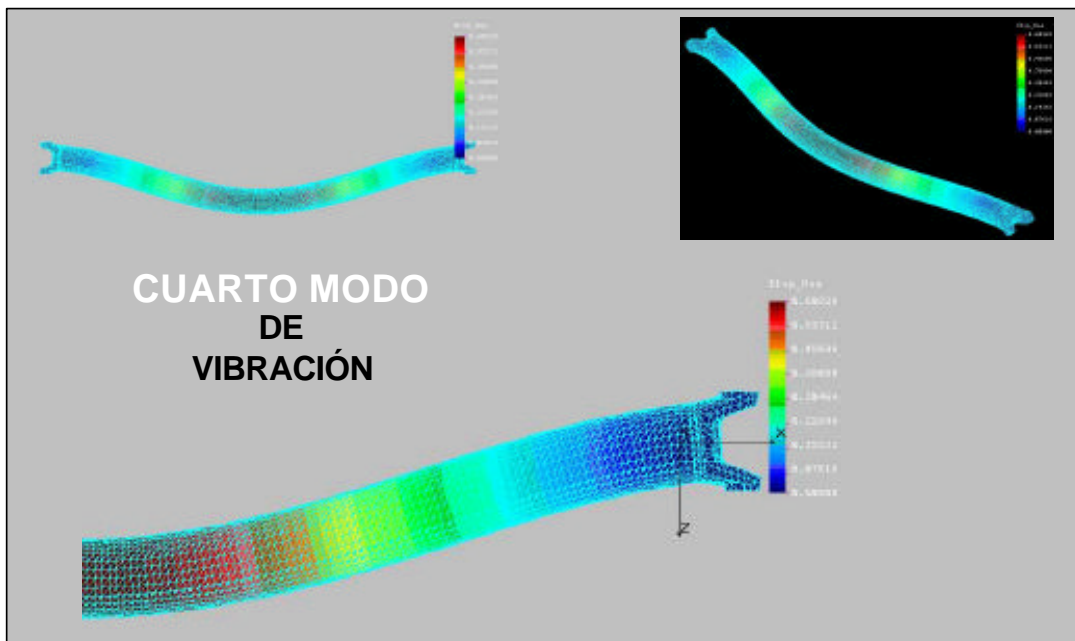


Figura 10: Cuarto Modo de Vibración – 245,91 Hz

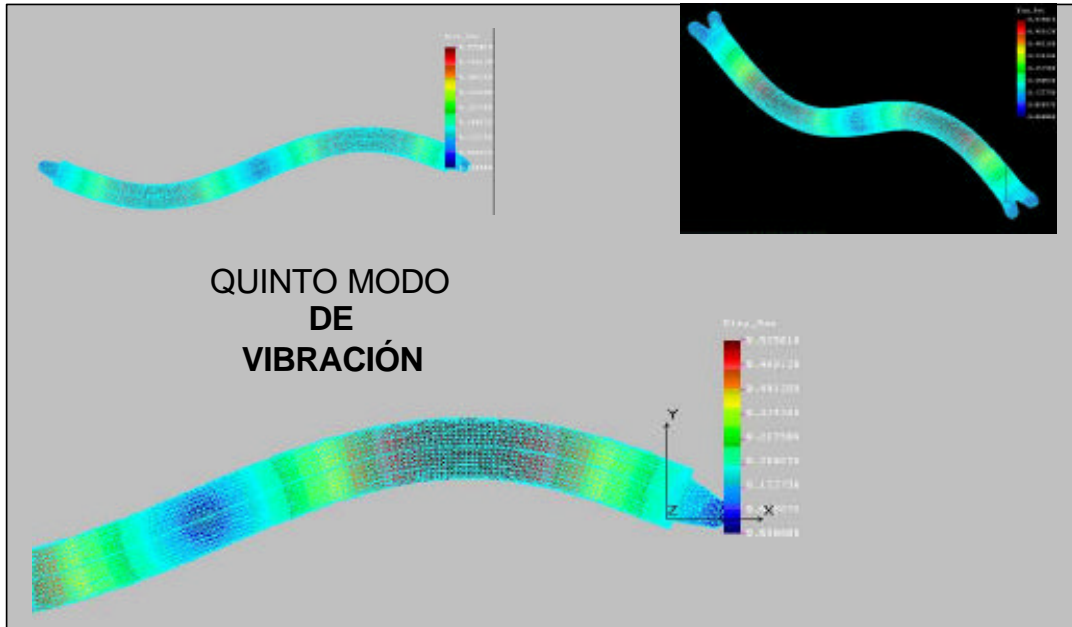


Figura 11: Quinto Modo de Vibración - 402,95 Hz

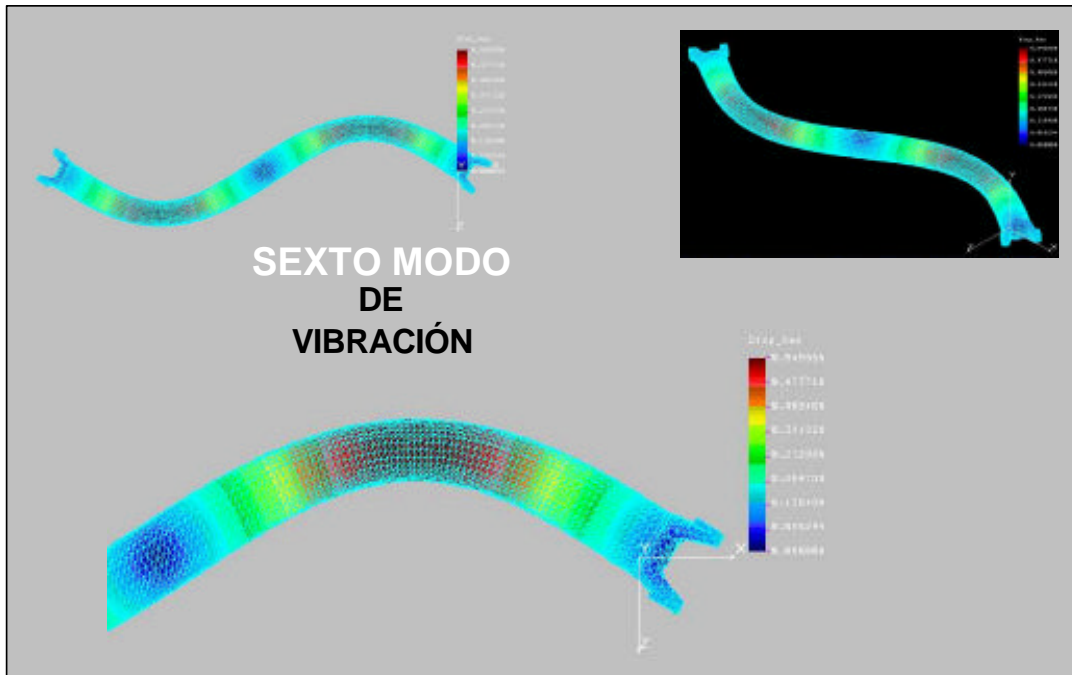


Figura 12: Sexto Modo de Vibración - 436,21 Hz

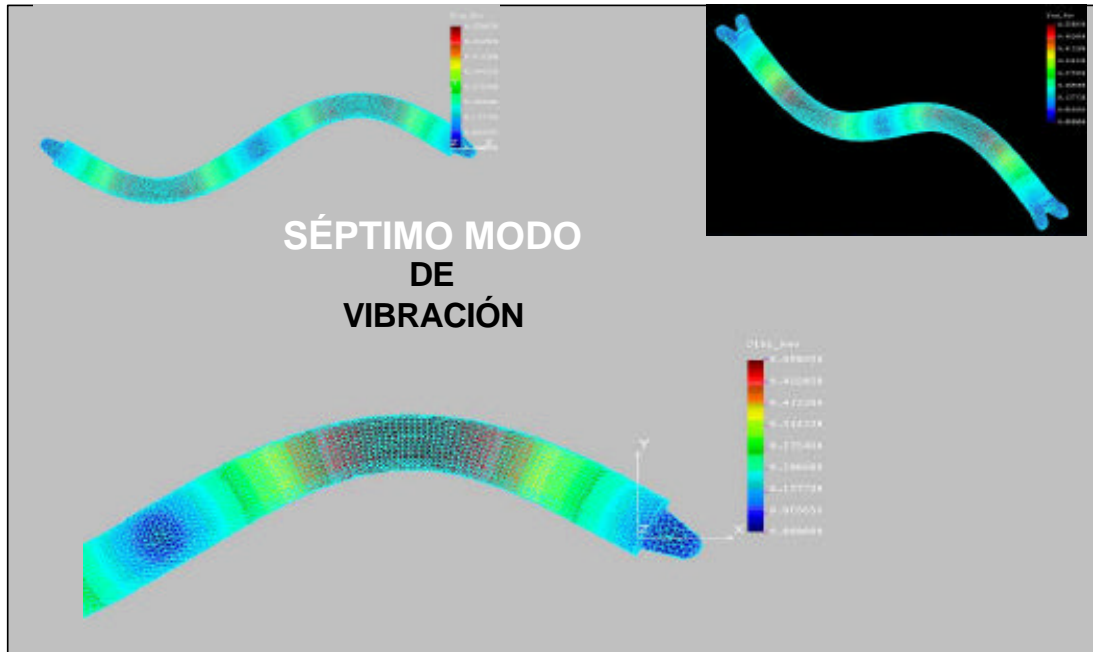


Figura 13: Séptimo Modo de Vibración - 464,91 Hz

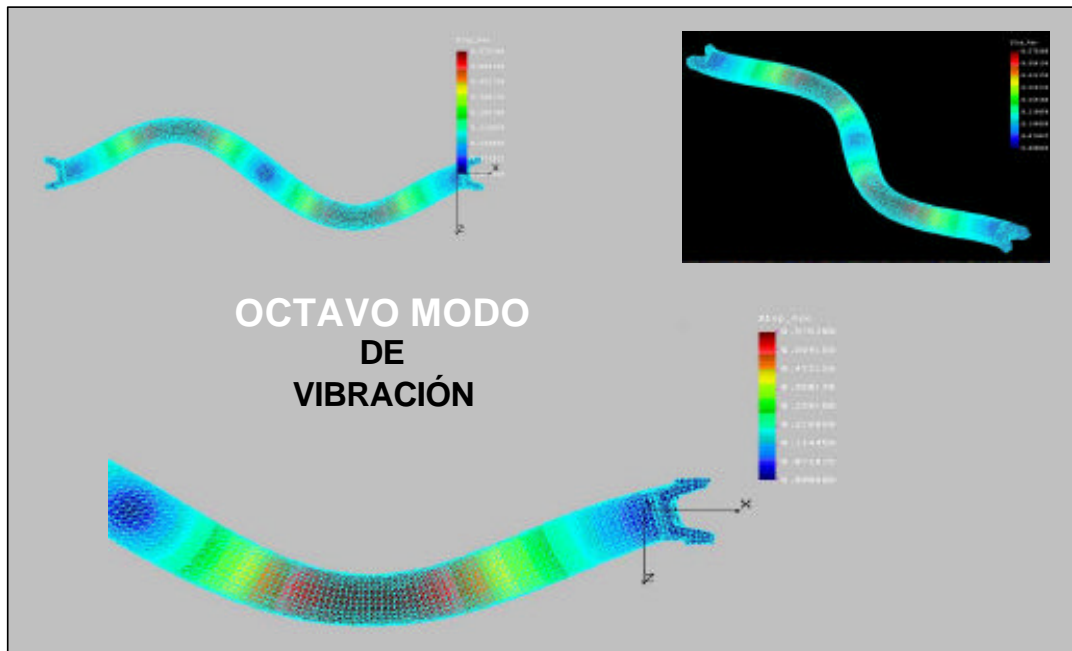


Figura 14: Octavo Modo de Vibración - 641,99 Hz

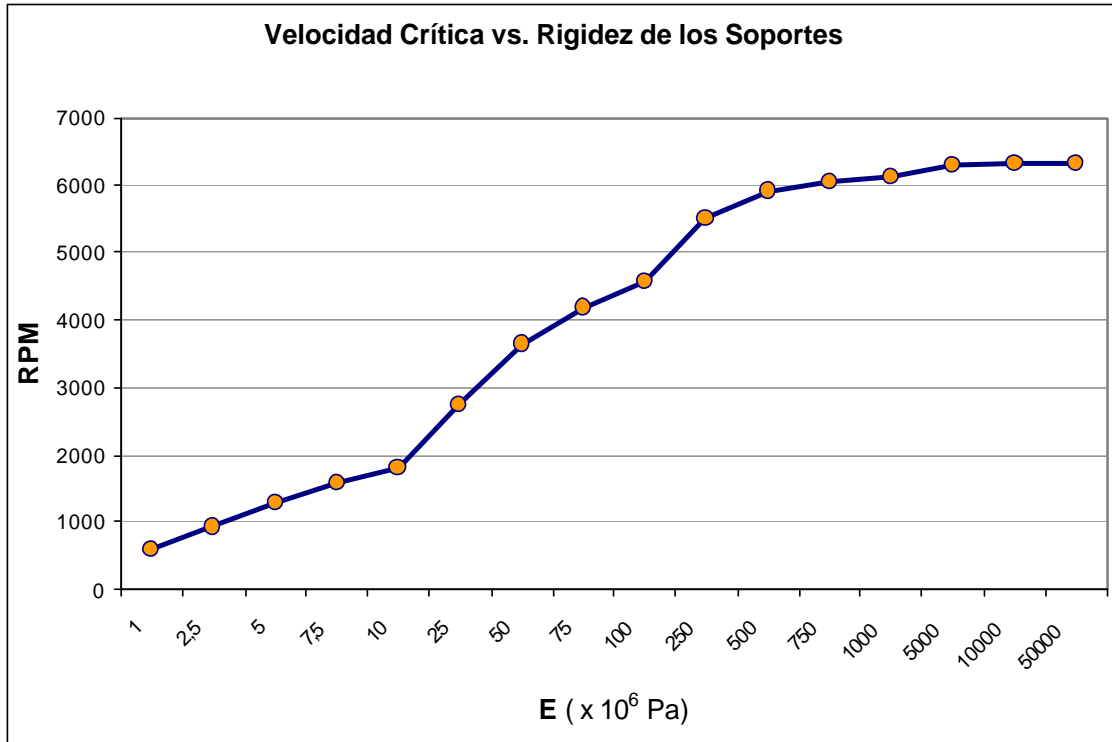


Figura 15: Curva que muestra la variación de la Velocidad Crítica en función de la rigidez de los apoyos del árbol