Asociación Argentina



de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXIX, págs. 625-645 (artículo completo) Eduardo Dvorkin, Marcela Goldschmit, Mario Storti (Eds.) Buenos Aires, Argentina, 15-18 Noviembre 2010

# CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES EM NOTCH TYPE SPRING UTILIZANDO NEUTRALIZADORES DINÂMICOS VISCOELÁSTICOS E FILTROS ELETRÔNICOS: REALIZAÇÃO FÍSICA

# Paulo de Tarso Neves Jr.<sup>a</sup>, Jucélio T. Pereira<sup>b</sup>, Klaas B. Bronkhorst<sup>b</sup>, Djones A. Boni<sup>a</sup>, Alexandre A. A. Pohl<sup>a</sup> and Carlos A. Bavastri<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Grupo de Componentes e Sistemas para Telecomunicações, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Rua Cristo Rei, 19 Toledo-PR, Brasil, pneves@utfpr.edu.br

<sup>b</sup>Grupo de Pesquisa em Vibrações e Som em Sistemas Mecânicos, Universidade Federal do Paraná, Centro Politécnico, CP 19011, Curitiba, Brasil, bavastri@ufpr.br, http://www.ufpr.br

**Palavras-chave:** Redes de Bragg em fibra, Notch Type Spring, controle de vibrações, neutralizadores dinâmicos viscoelásticos.

Resumo. Este artigo apresenta o projeto e implementação de duas técnicas de controle para reduzir níveis indesejáveis de vibração em um mecanismo novo chamado Notch Type Spring (NTS) utilizado na sintonização de redes de Bragg em fibra. O NTS é uma mola de flexão monolítica obtida de um material sólido, usando dobradiças entalhadas para amplificar o deslocamento provocado por um atuador piezoelétrico. Uma vantagem ao utilizar esta mola de flexão encontra-se na fabricação a partir de um único bloco material, evitando-se assim instabilidades e pontos de tensão em soldas. Por outro lado, devido ao baixo amortecimento próprio do dispositivo de sintonização, a resposta vibratória provocada pela excitação do tipo degrau sobre a fibra, proveniente do atuador piezoelétrico e amplificada pela mola de flexão, possui oscilações indesejáveis após a aplicação da carga. Estas vibrações indesejáveis ocorrem para todos os intervalos de sintonização no sistema mola de flexão - rede de Bragg em fibra óptica. A fim de reduzir o tempo de sintonização neste processo foram implementadas duas técnicas de controle. Uma, atuando diretamente na excitação, através de um filtro eletrônico e, a outra, atuando sobre a fonte vibratória, mola de flexão-base-fibra, através de dispositivos simples conhecidos como neutralizadores dinâmicos viscoelásticos. Para o projeto ótimo dos neutralizadores foi utilizado uma metodologia própria através de uma técnica de otimização não linear híbrida composta por algoritmos genéticos e o método "Quase" Newton. O filtro eletrônico foi projetado para atuar entre o gerador de sinais e o controlador deste, para rejeitar as freqüências elevadas. Uma implementação numéricoexperimental sobre um dispositivo de sintonização real é realizada e os resultados, provenientes da aplicação de ambas técnicas de controle, são comparados e amplamente discutidos.

# 1 INTRODUÇÃO

As redes de Bragg em fibra são dispositivos ópticos passivos que podem ser empregados como sintonizadores de comprimento de onda nas redes ópticas de telecomunicação (um tipo de filtro óptico passa banda). A maneira mais efetiva para a rede de Bragg operar como sintonizador é a aplicação de uma deformação longitudinal através de dispositivos mecânicos apropriados.

A literatura relata sistemas de deformação longitudinal baseados no princípio da tração e/ou compressão com diferentes desempenhos para velocidade de sintonização e alcance (Iocco, 1999; Mavoori et al., 1999; Ball e Morey, 1994; Mohhamad et al. 2004), onde a velocidade de sintonização compreende a relação entre a maior mudança de comprimento de onda (alcance de sintonização) e o tempo necessário para realizar esta mudança. Normalmente sintonizações com longo alcance são obtidas por meio de compressão de redes de Bragg em fibra, necessitando de um sofisticado aparato devido sua baixa deformação sem flambagem (Mohhamad et al. 2004). No entanto, sistemas de tração, quando devidamente desenvolvidos, podem obter uma faixa de sintonização considerável.

No presente trabalho, um simples mecanismo de tração chamado Mola de Entalhe (NTS - *Notch Type Spring*) amplifica o deslocamento de um atuador piezoelétrico de baixa tensão através de contato direto. Porém, o tempo de sintonização é relativamente longo devido às vibrações indesejáveis do mecanismo após aplicação da carga.

Para reduzir níveis indesejáveis de vibração no processo de sintonização de redes de Bragg usando NTS, neste trabalho são propostos o projeto e implementação de duas técnicas de controle passivo. Uma, através do uso de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos, controlando as vibrações do sistema como um todo e, a outra, através de filtros eletrônicos, controlando o gerador de sinais da excitação.

Neutralizadores ou absorvedores dinâmicos de vibração são sistemas ressonantes simples que ao serem fixados a um sistema ou estrutura mecânica (sistema primário) reduzem os níveis de vibração a valores aceitáveis. Em geral, uma estrutura mecânica apresenta impedância mecânica baixa ao redor de suas freqüências naturais. Os neutralizados, quando devidamente projetados, injetam na estrutura, naquela faixa de freqüência que o sistema precisa, uma elevada impedância mecânica. Desta forma, um ou vários neutralizadores podem ser utilizados para controlar, na banda de freqüências de interesse, uma ou várias freqüências naturais. Mostra-se que para um controle em banda larga, o amortecimento é fundamental.

Existem diversos tipos de neutralizadores do ponto de vista da sua construção física e cada um destes possui uma aplicação bem característica. No controle de vibrações em prédios e estruturas esbeltas geralmente são utilizados neutralizadores hidráulicos, devido às baixas freqüências e às grandes massas envolvidas. Neutralizadores eletromecânicos podem ser empregados em dispositivos nos quais é necessária uma boa adaptabilidade, já que é possível variar suas características dinâmicas através dos seus parâmetros elétricos RLC. Com estes dispositivos, praticamente não se acrescenta massa ao sistema primário. Por outro lado, muitas vezes é necessária uma estrutura adicional para fixar o dispositivo que gera o campo magnético necessário. Neutralizadores viscosos são de difícil construção prática, resumindo-se a modelos teóricos comparativos ou equivalentes. Na maioria das aplicações em engenharia são utilizados neutralizadores dinâmicos viscoelásticos, projetados com diferentes tamanhos, a partir de umas poucas gramas até toneladas, graças às características que confere estes materiais. Esta versatilidade na construção prática junto à grande dissipação de energia conseguida pelas características dinâmicas do material viscoelástico permite seu emprego em aplicações tão diversas quanto: linhas aéreas de energia, estruturas metálicas de grande porte, ferramentas de corte para torneamento interno e unidades hidráulicas de geração de energia, entre outras aplicações. O modelo utilizado para o material viscoelástico, é o modelo de derivadas fracionárias de 4 parâmetros (Bagley e Torvik, 1986, Pritz, 1996).

Uma metodologia geral para o projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos para reduzir os níveis de vibração de uma estrutura mecânica qualquer, sobre uma banda larga de freqüências, onde podem atuar um ou vários dispositivos de controle, foi proposta por Espíndola e Silva (1992), Espíndola e Bavastri (1995 e 1997) e Bavastri et al. (1998). Para aplicar essa metodologia é fundamental conhecer os parâmetros modais do sistema primário, as características dinâmicas do material viscoelástico e o modelo equivalente generalizado do neutralizador em estudo. O uso do modelo de parâmetros equivalentes generalizados (PEG) para os NDVs, como apresentado por Espíndola e Silva (1992) e posteriormente por Espindola e Bavastri (1995 e 1997), permite escrever as equações de movimento do sistema composto (sistema primário + neutralizadores), apenas em termos dos graus de liberdade do sistema primário, apesar dos graus extras introduzidos pelos neutralizadores. Escrevendo a dinâmica do sistema composto em um sub-espaço modal do sistema primário, retendo apenas algumas poucas equações relacionadas com os modos a controlar na faixa de freqüências de interesse, Espindola e Bavastri (1995) mostraram ser possível, através do uso de técnicas de otimização não linear, minimizar a resposta vibratória em uma banda larga de freqüências. Como resultado se obtém os parâmetros físicos ótimos para um ou mais neutralizadores. A estrutura a controlar, através desses dispositivos, pode ter qualquer complexidade geométrica, sempre que possua um comportamento linear.

No presente trabalho é implementado um exemplo numérico-experimental, tanto para o projeto do filtro eletrônico quanto para o projeto dos neutralizadores. Para mostrar a eficácia de ambas técnicas, os resultados são apresentados em forma de gráficos de resposta. Estas respostas são apresentadas no domínio do tempo e no domínio da freqüência.

# 2 REDES DE BRAGG EM FIBRA ÓPTICA

Quando luz ultravioleta (UV) com uma fluência adequada incide sobre a fibra óptica seu índice de refração sofre alteração devido a um efeito denominado fotossensibilidade. Se tal alteração for espacialmente periódica ocorre a formação de redes na fibra. No caso das fibras de germano-silicato a mudança do índice de refração ocorre, entre outros fatores, por modificação na estrutura eletrônica de defeitos pontuais denominados "centros de cor" explicados pelo modelo de Kramers-Kronig. A formação de uma rede permanente foi inicialmente demonstrada por Hill et al. (1978) e Kawasaki et al. (1978).

As redes em fibra podem ser divididas em redes de Bragg (*FBG- Fiber Bragg Grating*), também denominada rede de reflexão ou rede de período curto, na qual ocorre acoplamento entre os modos que se propagam em sentidos opostos, e em redes de período longo (*LPG-Long Period Grating*, também denominada rede de transmissão), na qual modos de casca e de núcleo que se propagam no mesmo sentido são acoplados.

Dessa forma, a FBG é uma perturbação periódica do índice de refração do núcleo ao longo do comprimento da fibra, gerada pela exposição da mesma a um padrão intenso de interferência (Hill e Meltz, 1997).

A técnica de gravação mais difundida é baseada no uso da máscara de fase. Essa técnica tem inúmeras vantagens como uma relativa simplicidade na montagem para a gravação, boa reprodutibilidade, além de ser menos dependente da coerência da fonte UV usada na gravação (Hill et al. 1993). A máscara de fase geralmente é mantida junto à superfície da fibra durante a



gravação, como mostra a Figura 1, e o período da rede será a metade do período da máscara de fase  $\Lambda_{mf}$ .

Figura 1: Gravação com máscara de fase.

A perturbação periódica que ocorre no núcleo da fibra é análoga a uma rede cristalina e age como um filtro rejeita-banda. Uma banda estreita do campo óptico incidente é refletida, sendo que a interação mais forte, ou acoplamento de modo, ocorre no comprimento de onda de Bragg  $\lambda_B$  dado por (Kashyap, 1999):

$$\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda\tag{1}$$

onde  $n_{eff}$  é o índice modal ou índice de refração efetivo e  $\Lambda$  é o período da rede.

A vantagem principal das redes em fibra é a flexibilidade que essas oferecem na aquisição das características espectrais desejadas.

A Figura 2 mostra o esquema de incidência e a reflexão de um campo óptico em uma rede de Bragg.



Figura 2: Incidência, reflexão e transmissão em uma rede de Bragg. Para uma FBG típica o espectro refletido tem como comprimento de onda central  $\lambda_B = 2n_{eff} \Lambda$ 

Qualquer mudança que venha a causar variação no índice efetivo também modificará o comprimento de onda de Bragg. A sensibilidade das FBGs a essa mudança é governada pelas propriedades elástica, fotoelástica, termo-óptica da fibra e pela natureza da carga ou tensão aplicada à estrutura em que a fibra está anexada ou imersa.

A expressão geral para o deslocamento do comprimento de Bragg em função da variação do comprimento da rede e da variação da temperatura é obtida diferenciando (2.22) e desprezando os termos de ordem superior, resultando em Kashyap (1999) e Othonos e Kalli (1999).

$$\Delta\lambda_B = 2 \left( \Lambda \frac{\partial n_{eff}}{\partial L} + n_{eff} \frac{\partial \Lambda}{\partial L} \right) \Delta L + 2 \left( \Lambda \frac{\partial n_{eff}}{\partial T} + n_{eff} \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \right) \Delta T .$$
(2)

onde  $\Delta L$  é a variação do comprimento da rede e  $\Delta T$  é a variação da temperatura.

Desprezando a variação de temperatura, o que foi feito no presente trabalho, a variação do comprimento de onda de Bragg, tanto para tração quanto para compressão, devido à deformação longitudinal pode ser escrita na forma (Hill e Meltz, 1997):

$$\Delta \lambda_B = \lambda_B (1 - p_e) \varepsilon_{xx} \tag{3}$$

sendo  $\lambda_B$  o comprimento de onda de Bragg inicial com a FBG em repouso (sem deformação),  $\varepsilon_{xx}$  a deformação longitudinal aplicada e  $p_e$  a constante fotoelástica efetiva que, para uma FBG típica, apresenta o valor de 0,22.

Dessa forma, para uma FBG com  $\lambda_B = 1550$  nm, aplicando uma deformação longitudinal de 1% (o máximo permitido em uma FBG típica sem ocorrer sua ruptura) consegue-se um deslocamento de onda de Bragg de aproximadamente 12 nm.

#### **3** A MOLA DE ENTALHE

A mola de entalhe (*NTS* - *Notch Type Spring*) é uma mola de flexão monolítica obtida de um material sólido usando dobradiças entalhadas (Smith e Chetwynd, 2005). São feitos furos próximos, formando um entalhe circular ou elíptico, que serve como elemento flexível (Tseytlin, 2002), evitando fricção, lacunas e a necessidade de juntas, rolamentos e lubrificação.

O princípio básico de funcionamento consiste no movimento de rotação ao redor de um eixo localizado entre dois furos semicirculares, como mostra a Figura 3.



Figura 3: Dobradiça monolítica

Uma vez que este dispositivo é projetado para trabalhar com pequenos deslocamentos, muitas vezes faz-se uso de um atuador piezelétrico (PZT) como gerador de força externa.

A forma do NTS apresentada neste trabalho tem a finalidade de alongar em 1% um trecho de 12 mm de uma fibra óptica. Para amplificar o deslocamento, o NTS trabalha como uma alavanca de terceira classe, como mostra a Figura 4.



Figura 4: A NTS como alavanca de terceira classe

O NTS pode ser visto como dois suportes e uma viga, onde um destes é engastado (servindo de fulcro) e o outro recebe a força de entrada (gerada por um atuador piezelétrico). O deslocamento no suporte não engastado é amplificado ao longo do braço do NTS, onde a FBG é fixada.

Usou-se um LVPZT (*Low Voltage PZT*) com entrada de 0 a 120 V, carga máxima de 1000 N, 4,5  $\mu$ F de capacitância e deslocamento máximo de 45  $\mu$ m. Além disso, escolheu-se arbitrariamente o comprimento de 110 mm para o braço (medido do topo do braço ao suporte não engastado) e h = 15 mm.

Com estes parâmetros, assumindo que o ponto de aplicação da força é a extremidade direita do suporte não engastado e levando em conta o máximo deslocamento possível do PZT, o ângulo  $\Theta$  de máxima inclinação do suporte não engastado será aproximadamente o ângulo de rotação  $\Theta_z$ , podendo ser escrito como

$$\Theta_z \approx \Theta = \arcsin\left(\frac{45 \times 10^{-6}}{h}\right).$$
 (4)

Aplicando a Equação (4) para h = 15 mm, alcança-se um ângulo de inclinação de  $3,0 \times 10^{-3}$  rad, resultando em um deslocamento  $\Delta L = 330 \ \mu m$  no topo do braço (ver Figura 4). Como o deslocamento é maior que 120  $\mu m$ , estas dimensões satisfazem os requerimentos do projeto.

Construiu-se uma NTS usando aço SAE/AISI 1045, com módulo de Young E = 210 GPa e máxima tensão de tração  $\sigma_{max} = 530$  MPa. Com esses valores e as dimensões escolhidas para a NTS garante-se que a mesma trabalhe na região elástica (Smith e Chetwynd, 2005).

### **4** APARATO EXPERIMENTAL

A Figura 5 mostra o aparato experimental usado para se obter o tempo de resposta do NTS.



Figura 5: O aparato experimental

Um gerador de sinal fornece uma onda quadrada com 0,3 Hz a fim de simular uma função degrau. O controlador do PZT amplifica e ajusta o tempo de subida da onda quadrada através de filtros eletrônicos internos para proteger o atuador PZT. Este alonga uma FBG, através da NTS, gerando uma tensão proporcional ao pico de tensão da onda quadrada. O comprimento da fibra a ser alongada, fixada na torre direita e no braço do NTS, é de 12 mm.

Como referência, usou-se seis comprimentos de onda discretos fornecidos por lasers DFB (*Distributed Feedback Laser*) espaçados 1,6 nm (200 GHz). Tais comprimentos de onda são mostrados na Tabela 1 e são usados em sistemas WDM (*Wavelength Division Multiplexing*), padronizados por ITU-T (*International Telecommunication Union – Standardization sector*) pela norma G.692, que correspondem aos canais ímpares de 23 a 27 da banda-C.

Lasers DFB	Comprimento de Onda (nm)	Canal (Banda C)
C1	1547,72	37
C2	1549,32	35
C3	1550,92	33
C4	1552,52	31
C5	1554,13	29
C6	1555,75	27

Tabela 1: Comprimentos de Onda do Laser DFB

O multiplexador agrega os comprimentos de onda dos lasers na fibra, o circulador direciona o espectro refletido pela FBG para o fotodetector e o osciloscópio mostra o tempo de sintonização.

São ligados apenas dois lasers por vez, gerando um ponto de partida e um ponto de chegada. Enquanto a fibra é esticada, o comprimento de onda de Bragg da rede se aproxima do ponto de chegada e ocasionalmente coincide com o comprimento de onda de um laser DFB

em particular –  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$ , como mostrado pela Figura 6 – e a potência refletida pela FBG é máxima. Entre estes dois comprimentos de onda, a potência refletida pela FBG é praticamente zero.



Figura 6: Esquema do espectro refletido (linha tracejada) pela FBG. Quando o comprimento de onda coincide com algum *laser* DFB (λ<sub>1</sub> ou λ<sub>2</sub>), a potência refletida é máxima

A potência refletida retorna para a porta 2 do circulador óptico e é direcionada ao circuito fotodetector pela porta 3 (ver Figura 5). O circuito fotodetector converte o sinal óptico recebido em uma tensão negativa proporcional à potência óptica, que pode ser visualizada através de um osciloscópio. A potência óptica do segundo laser DFB é ajustado para 1 dBm abaixo do primeiro laser a fim de distingui-los no osciloscópio quando o braço de alavanca sobe e desce. A frequência da onda quadrada é baixa o suficiente para permitir a estabilização mecânica do braço de alavanca.

Para o experimento usou-se uma FBG especial do tipo DTG (*Draw Tower Grating*), que tolera cargas até 50 N, o suficiente para causar até 5% de alongamento. Esta DTG é feita com um núcleo de sílica de 6 µm de diâmetro, um revestimento com diâmetro externo de 125 µm e uma proteção de ORMOCER (*Organic Ceramic*), totalizando um diâmetro externo de 187 µm. A ORMOCER tem módulo de Young de 1 GPa e desnsidade de 1200 kg/m<sup>3</sup>. Além disso, a DTG usada apresenta, em estado de repouso, um comprimento  $L_g = 8$  mm, comprimento de onda central de 1547,05 nm e sensitividade de 1,2 pm/µε ao comprimento de onda de 1550 nm.

A Figura 7 mostra o comportamento do sintonizador para a sintonização de C1 para C2, e vice-versa. O tempo de sintonização para os dois casos é maior que 60 ms. Para o caso de sintonização de C1 para C6, e vice-versa, não foram realizadas medições porque o tempo de oscilações indesejadas eram superiores a 60 ms. Isto se deve ao fato de que para passar de C1 a C6 a excitação via PZT é bem maior que quando precisamos passar de C1 para C2, obtendo-se tempos de oscilações residual após a aplicação da carga de, aproximadamente, 100 ms.

Como pode observar-se, o sintonizador apresenta vibrações em níveis indesejáveis para todos os intervalos de sintonização. Como todo sistema mecânico, principalmente estruturas metálicas, com baixo amortecimento próprio ou sem algum tipo de controle, após uma excitação do tipo degrau, passando de uma posição de equilíbrio para outra através de um deslocamento quase instantâneo, apresentará oscilações ao redor do novo ponto de equilíbrio. O tempo destas oscilações, geralmente indesejáveis, será maior quanto menor for o amortecimento do mecanismo ou quanto menor for o tempo de aplicação da carga. Neste caso, o mecanismo é o braço de alavanca da NTS com a fibra na extremidade livre, ambos fixados a uma base metálica.



Figura 7: Tempo de resposta para a sintonização dos lasers C1-C2 sem amortecimento

# 5 TÉCNICAS DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES IMPLEMENTADAS E COMPARAÇÕES DO TEMPO DE RESPOSTA

A fim de diminuir as vibrações do braço de alavanca, foram aplicadas duas técnicas de controle: uma sobre a excitação e outra sobre a própria estrutura. Sobre a excitação foi aplicado um filtro eletrônico para torná-la menos impulsiva. Sobre a estrutura foram projetados de forma ótima e fixados a ela um sistema de controle de vibrações através de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos (NDV).

#### 5.1 Filtro Eletrônico

Como já visto na seção anterior, as vibrações do braço de alavanca estão diretamente relacionadas com o sinal de entrada do PZT. Dessa forma, para modificar o sinal do tipo degrau entregue ao PZT foi projetado um filtro eletrônico, o qual foi inserido entre o gerador de sinal e o controlador deste (ver Figura 5). Este filtro foi projetado para rejeitar freqüências maiores que 30 Hz (frequência a partir da qual aparecem as vibrações indesejáveis). Foi construído um filtro passa-baixas de primeira ordem, com ganho dc unitário cujo diagrama esquemático é mostrado na Figura 8.



Figura 8: Diagrama esquemático do filtro passa-baixas

A freqüência de corte é dada por

sendo *C* e *R* a capacitância e a resistência do capacitor e do resistor do primeiro estágio de amplificação, respectivamente. Com *C* = 100 nF e *R* = 56 k $\Omega$ , a frequência de corte será  $f_c$  = 28,4 Hz.

A Figura 9 mostra a sintonização entre os canais C6 para C1 e C2 para C1, respectivamente a maior e a menor velocidade de sintonização obtida.



Figura 9: Tempo de resposta para a sintonização dos lasers C6-C1 e C2-C1 inserindo o filtro eletrônico na entrada do controlador do PZT

Observa-se que o tempo de sintonização foi diminuído sensivelmente comparando a Figura 9 com a Figura 7. Observa-se também que para um maior deslocamento do braço de alavanca o tempo de sintonização aumenta sensivelmente, sendo em torno de 25 ms na sintonização dos lasers C1-C2 e 45 ms para os lasers C1-C6.

#### 5.2 Neutralizador dinâmico viscoelástico

Para aplicar a metodologia de projeto dos neutralizadores dinâmicos viscoelásticos é fundamental conhecer os parâmetros modais do sistema primário, as características dinâmicas do material viscoelástico e o modelo equivalente generalizado do neutralizador em estudo, como proposto em Espíndola e Silva (1992), Espíndola e Bavastri (1995 e 1997). Outras informações de projeto relevantes são: faixa de freqüência de interesse, temperatura de trabalho, localização dos neutralizadores, massa dos neutralizadores, entre outras.

#### 5.2.1 Modelo de material viscoelástico

O comportamento da maioria dos materiais viscoelásticos utilizados em engenharia apresentam variação no módulo complexo de cisalhamento ( $\overline{G}$ ) tanto em freqüência ( $\Omega$ ) quanto em temperatura (T). Estes materiais apresentam curvas características semelhantes às da Figura 10 (Lopes et al., 2004; Espíndola et al., 2008).



Figura 10: Curvas de módulo de cisalhamento dinâmico, Gr, e fator de perda, η, para um material viscoelástico típico

O modelo de derivadas fracionárias do módulo complexo de cisalhamento, no domínio da freqüência, pode ser definido como:

$$\overline{G}(\Omega) = \frac{G_0 + G_\infty b_1 (i\alpha(T)\Omega)^{\beta}}{1 + G_\infty b_1 (i\alpha(T)\Omega)^{\beta}}$$
(8)

onde  $G_0$  representa o valor assintótico do módulo de cisalhamento para freqüências muito baixas e  $G_{\infty}$  para freqüências muito altas,  $\beta$  é um valor fracionário menor que a unidade,  $b_1$ parâmetro complementar e  $\alpha(T)$  é fator de deslocamento que depende da temperatura de trabalho T. O fator de deslocamento é dado pela seguinte expressão

$$\log \alpha(T) = -\theta_1 \frac{(T - T_0)}{(\theta_2 - T - T_0)}.$$
(9)

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são constantes a determinar que dependem do material e  $T_0$  é uma temperatura de referência escolhida arbitrariamente. Em Lopes et al. (2004) foi apresentada uma metodologia que permite caracterizar dinamicamente materiais viscoelásticos, obtendo todos os parâmetros mostrados na Equação 8. Para tal fim, é realizado um ajuste simultâneo de transmissibilidades medidas a diferentes temperaturas com um modelo matemático equivalente. A representação complexa do módulo é dada por:

$$G(\Omega) = G_r(\Omega)(1+i\eta(\Omega))$$
(10)

sendo  $G_r(\Omega) = Re(\overline{G}(\Omega))$  o módulo de cisalhamento dinâmico e  $\eta(\Omega) = \frac{Im(\overline{G}(\Omega))}{Re(\overline{G}(\Omega))}$  o fator de perda.

perua

#### 5.2.2 Neutralizador dinâmico viscoelástico - PEGs

O principio fundamental do conceito PEGs é utilizar as vantagens do modelo equivalente como explicado no item 5.2.3. Assim, os parâmetros físicos do modelo de um grau de liberdade, cujo elemento resiliente é um material viscoelástico (Figura 11a), serão substituídos por outro modelo dinamicamente equivalente (Figura 11b). A equivalência dinâmica é obtida igualando as impedâncias mecânicas na base dos modelos mostrados na Figura 11.



Figura. 11: Parâmetros equivalentes para modelo com material viscoelástico no domínio da freqüência

Como mostrado em Espíndola e Silva (1992), esses parâmetros são obtidos através de:

$$m_e(\Omega) = -m \frac{r(\Omega)\{\varepsilon^2 - r(\Omega)[1 + \eta(\Omega)^2]\}}{(\varepsilon^2 - r(\Omega))^2 + (r(\Omega)\eta(\Omega))^2}.$$
(11)

$$c_e(\Omega) = m\Omega_a \frac{r(\Omega)\eta(\Omega)\varepsilon^3}{(\varepsilon^2 - r(\Omega))^2 + (r(\Omega)\eta(\Omega))^2}.$$
(12)

sendo  $\eta(\Omega)$  o fator de perda do material viscoelástico,  $r(\Omega)$  a razão de cisalhamento dada por  $r(\Omega) = \frac{G_r(\Omega)}{G_r(\Omega_a)}$  e  $\varepsilon$  a razão de freqüências,  $\varepsilon = \frac{\Omega}{\Omega_a}$ . Da Figura 12, usando o modelo equivalente, observa-se que o sistema primário sente o neutralizador como uma massa equivalente, em

função da freqüência, diretamente a ele fixado e um amortecedor ligado a terra. Observa-se, também da Figura 12, que a dinâmica do sistema composto (neutralizador mais sistema primário) pode ser descrita em função das coordenadas generalizadas do sistema primário apenas.



Fig. 12: Modelo de neutralizador dinâmico e modelo equivalente sobre um sistema primário qualquer

#### 5.2.3 Equação de movimento do sistema composto

Como mostrado em Bavastri (1997) e Espindola e Bavastri (1995 e 1997), acrescentandose p neutralizadores ao sistema primário nas coordenadas generalizadas  $q_{k1}$ ,  $q_{k2}$ , ..., $q_{kp}$ , podemse agregar as p massas  $m_e(\Omega)$  e os p amortecimentos  $c_e(\Omega)$  equivalentes, somando-as, apropriadamente, nas matrizes de massa e amortecimento do sistema primário nos elementos da diagonal dados por:  $[(q_{k1},q_{k1}); (q_{k2},q_{k2}); ...; (q_{kp},q_{kp})]$ . Isto é possível graças à utilização dos PEGs definidos nas Equações 11 e 12, como mostra a Figura 12.

Como o sistema composto foi modelado em termos dos PEG's, o mesmo é válido para uma excitação harmônica de frequência  $\Omega$ , e pode agora ser representado por:

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = f(t).$$
(13)

sendo

$$\widetilde{M} = M + M_e(\Omega) \ e \ \widetilde{C} = C + C_e(\Omega).$$
<sup>(14)</sup>

Considerando-se a teoria geral desenvolvida em Espíndola e Bavastri (1995) é possível descrever o sistema composto em um sub-espaço modal do sistema primário. Para isso é preciso conhecer os parâmetros modais do sistema primário: matriz modal,  $\Phi$ , freqüências naturais  $\Omega_j$  e relação de amortecimento ou amortecimento estrutural,  $\zeta_j$  ou  $\eta_j$ , com j=1 a n graus de liberdade, respectivamente. As matrizes de massa e amortecimento equivalentes  $M_e(\Omega)$  e  $C_e(\Omega)$  são diagonais e contém elementos somente nas colunas correspondentes às coordenadas  $q_k$ 's de fixação dos neutralizadores.

Pelas propriedades de ortogonalidade da matriz  $\Phi$  é possível aplicar uma transformação de coordenadas dada por:

$$q(t) = \Phi p(t). \tag{15}$$

Através desta transformação de coordenadas, pré-multiplicando a Eq. (13) por  $\Phi^{T}$  e considerando as propriedades de ortogonalidade destas matrizes em relação às matrizes massa, rigidez e amortecimento proporcional, obtêm-se, no domino da freqüência, a equação de movimento do sistema composto. Esta equação de movimento é obtida no espaço modal do sistema primário, devido às transformações realizadas, e é dada por:

$$\widetilde{D}(\Omega) P(\Omega) = \Phi^{\mathrm{T}} F(\Omega).$$
(16)

sendo a matriz  $\widetilde{D}(\Omega)$ 

$$\tilde{D}(\Omega) = \mathbf{A} + \mathbf{B} + C \tag{17}$$

com

$$A = \left[ -\Omega^{2} \left( \mathbf{I} + \Phi^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_{e}(\Omega) \Phi \right) \right]$$
$$B = \left[ i\Omega \left( \left[ {}^{\mathsf{Y}} \mathcal{Z} \mathcal{J}_{\Omega_{j_{\mathsf{Y}}}} \right] + \Phi^{\mathsf{T}} C_{e}(\Omega) \Phi \right) \right]$$
$$C = \left[ {}^{\mathsf{Y}} \mathcal{A}_{j_{\mathsf{Y}}} \right]$$

A partir da Eq. (16) é possível achar a resposta do sistema composto, no espaço modal do sistema primário. Ainda, se são utilizados apenas alguns autovetores, aqueles que se encontram na faixa de freqüência de interesse, a transformação é realizada em um sub-espaço modal do sistema primário. Esta resposta é conhecida como coordenadas principais e é obtida a partir da relação:

$$\hat{P}(\Omega) = \hat{D}(\Omega)^{-1} \hat{\Phi}^{\mathrm{T}} F(\Omega).$$
(18)

o símbolo  $\wedge$  representa uma aproximação onde apenas alguns modos, aqueles de interesse,

participam da transformação, sendo a ordem da matriz de  $n x \hat{n}$ , com  $\hat{n} \ll n$ .

Da Eq. (18), usando-se técnicas de otimização não linear como em Bavastri et al. (1998), é possível projetar um conjunto de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos para reduzir a resposta vibratória do sistema primário, em uma banda ampla de freqüências.

A massa dos neutralizadores é definida previamente, através de uma equivalência com a teoria de um grau de liberdade apresentada por Den Hartog (1956), ver Espindola e Silva (1992) e Bavastri (1997). Esta massa é definida através da relação entre a massa do neutralizador e a massa modal do sistema primário, segundo:

$$\mu = \frac{m_a}{m_i} \approx 0.1 - 0.25 \tag{19}$$

A partir desta analogia, a massa de um neutralizador quando projetado para controlar um modo da estrutura primária pode ser obtida segundo:

$$m_{a} = \frac{\mu_{j}}{\sum_{j=1}^{p} \hat{\Phi}_{k j}^{2}}.$$
(20)

Quando se tem um neutralizador para controlar vários modos, utiliza-se um valor médio da massa obtida através da Eq. (20) (Bavastri, 1997).

#### 5.2.4 Otimização

Para minimizar a resposta vibratória em uma banda larga de freqüências pré-estabelecidas, Espíndola e Bavastri (1995 e 1997) propõem utilizar técnicas de otimização não linear. Assim, o problema de otimização fica definido por:

$$\min f_{obj}(x) \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}.$$
(21)

com

$$f_{obj}(x) = \left\| \max_{\Omega_1 < \Omega < \Omega_2} \left| P(\Omega, x) \right| \right\|.$$
(21)

e

$$x^{T} = \left(\Omega_{a1}, \Omega_{a2}, ..., \Omega_{ap}\right).$$
(22)

para neutralizadores viscoelásticos com material conhecido, sendo

$$\Omega_{ai} \underline{\Delta} \sqrt{\frac{LG_r(\Omega_a)}{m_{ai}}}.$$
(23)

a freqüência natural do *i*-ésimo neutralizador, com i=1 a p.

O problema de otimização está sujeito às seguintes restrições de desigualdades:

$$x_i^L < x_i < x_i^U \tag{24}$$

sendo  $x_i^L$  e  $x_i^U$ , os limites inferior e superior para cada componente do vetor projeto, respectivamente.

A técnica de otimização não linear utilizada é apoiada no método Quase Newton (Devidon

Fletcher Powell). A metodologia apresentada neste trabalho usa algoritmos híbridos, uma associação de algoritmos evolutivos (algoritmos genéticos) e técnicas de otimização não linear. A primeira procura um ponto perto do mínimo global e a segunda realiza uma rápida convergência. O código numérico para algoritmo genético e os coeficientes empregados na otimização podem ser encontrados em Bavastri et al. (1998). Outra funções objetivos foram propostas em Espíndola et al. (2009).

## 6 RESULTADOS

As análises numéricas foram realizadas através do software comercial de elementos finitos ANSYS v. 11. Para a geração da malha, foram utilizados os elementos sólidos quadráticos dos tipos SOLID186 e SOLID187, elementos de contato do tipo TARG170 e CONTA174 e elementos de viga BEAM4, com um total de 20843 elementos (Figura 13). Para a análise modal foram consideradas várias situações da fibra e a presencia do PZT. As fibras foram modeladas com porcentagens diferentes de rigidez, com o intuito de modelar a relaxação da tensão de tração que ocorre após vários ensaios. Já o PZT foi modelado como um elemento de mola segundo dados fornecidos pelo fabricante. O atuador foi apoiado com pré-carga em uma das extremidades sobre o NTS, no ponto de aplicação da carga, e no outro extremo foi fixado rigidamente na base. Na Figura 13 pode observar-se o modelo por elementos finitos com os diferentes tipos de elementos utilizados nos diferentes componentes do sistema primário. Nesta figura, a fibra foi modelada com uma participação de 50%.



Figura 13: Modelo de elementos finitos da estrutura NTS-base-fibra.

Para achar os parâmetros modais do sistema primário, foi realizada uma análise modal no software comercial ANSYS. Desta forma, as freqüências naturais e os modos de vibrar da estrutura foram exportadas para os códigos desenvolvidos em um ambiente de otimização encarregados de projetar os neutralizadores dinâmicos viscoelásticos (ver Bavastri et al., 2007). Na Figura 14 e 15 podem observar-se os dois primeiros modos e suas freqüências naturais correspondentes.



Figura 14: Primeiro modo de vibrar do sistema primário.



Figura 15: Segundo modo de vibrar do sistema primário.

## 6.1 Características dinâmicas do material viscoelástico

Os parâmetros do modelo de derivadas fracionária do material viscoelástico utilizado neste trabalho, borracha butílica, foram levantados no Laboratório de Vibrações e Acústica da UFSC (LVA) sob a orientação do pesquisador Eduardo Marcio de Oliveira Lopes, PhD, enquanto fazia parte do grupo de pesquisa PISA do CNPq. Estes parâmetros são: T = 303 K, T0 = 273 K,  $G_0 = 1.76 \ 10^5 \ \text{N/m}^2$ ,  $G_{\infty} = 2.41 \ 10^8 \ \text{N/m}^2$ ,  $b_1 = 4.5 \ 10^{-3}$ ,  $\theta_1 = 9.91$ ,  $\theta_2 = 119$ .

A partir destes parâmetros, usando as Eq. (8), (9) e (10), é possível determinar, para cada temperatura e freqüência, a rigidez e o amortecimento do material viscoelástico, para uma dada forma física do mesmo.

### 6.2 Projeto ótimo dos neutralizadores

Uma vez conhecido o sistema a controlar através dos seus parâmetros modais, ter um modelo matemático para o material viscoelástico e demais parâmetros de projetos, como faixa de freqüência de interesse, temperatura de trabalho, entre outros, foram calculados os parâmetros físicos dos neutralizadores. Os códigos utilizados para tal fim foram desenvolvidos em Labview e Fortran (denominado aqui de LAVIB 1), segundo a teoria acima apresentada.

Foram realizadas várias simulações numéricas: considerando um neutralizador para controlar o primeiro modo apenas (I), considerando um neutralizador para controlar os dois primeiros modos (II) e considerando dois neutralizadores para controlar os dois primeiros modos (III). Em ambos casos foram considerados a presencia do PZT e diferentes porcentagens de participação da fibra, 14, 50 e 100%. Este estudo de porcentagem de participação da rigidez da fibra, nas características dinâmica do conjunto, se deve, fundamentalmente, a problemas de fixação da fibra com o NTS e a base. Se a fibra fica totalmente esticada na hora da colagem e se mantêm assim durante todo o ensaio, a mesma introduz uma rigidez elevada sobre o NTS e a base. Se por outro lado, após alguns ensaios a mesma fica totalmente frouxa, a participação da fibra pode ser nula. Neste trabalho só serão apresentados os resultados correspondentes a 14 % de participação da fibra, uma vez que o processo de fixação foi realizado usando cola à base de acrilato, observando-se que a fibra começava a afrouxar após vários ensaios.

A relação de massas modal utilizada neste trabalho foi de 0,1. Os valore das massas e das freqüências naturais dos nuetralizadores para as diferentes simulações são apresentadas na Tabela 2.

Simulação Numérica	Massas (gramas)	Freqüência (Hz)
Ι	25,5	282,2
Π	30,0	279,3
III	20,0	254,2
111	20,0	1498,0

Tabela 2: Parâmetros físicos dos neutralizadores para os diferentes casos.

Na Figura 16 é mostrado um diagrama esquemático da localização de um neutralizador, no caso de ser utilizado apenas um neutralizador para reduzir as vibrações indesejadas do suporte. Como pode ser visto na Figura 16, na extremidade livre do NTS encontra-se o material resiliente de cor zinca mais escuro e de cor zinca mais claro a massa de sintonização, formando assim um sistema de um grau de liberdade (neutralizador dinâmico). A extremidade livre do NTS é escolhida porque é o ponto de máxima amplitude do modo, ponto mais favorável para fixar o neutralizador, tanto para o primeiro quanto para o segundo modo.

Na Figura 17 é apresentada uma curva de função resposta em freqüência (receptância), considerando como ponto de excitação aquele no qual o PZT está localizado e a resposta perto deste. Como pode observar-se na Figura 17, a redução de amplitude de resposta ao fixar um neutralizador (caso I das simulações numéricas apresentadas na Tabela 1) é de 10 a 20 dB ou maior. Este valor está diretamente relacionado com o amortecimento do sistema a controlar e para se ter precisão na redução, este valor deve ser identificado. Quanto menor for o amortecimento maior será a redução conseguida com este tipo de controle.

Uma vez o neutralizador construído e fixado no sistema a controlar, foram implementados ensaios de sintonização de forma equivalente aos realizados no item 5.1, quando o controle foi aplicado na excitação. A Figura 18 mostra o tempo de resposta para a sintonização dos lasers C1-C2 usando dois neutralizadores para o controle com freqüências de 254 Hz e 1500 Hz e uma massa de 20 gramas cada um deles. Observa-se que o tempo de sintonização está abaixo de 10 ms, menos da metade do tempo obtido usando o filtro eletrônico.



Figura 16: Esquema da fixação do neutralizador na extremidade livre do NTS.



Figura 17: Simulação numérica da eficácia do neutralizador dinâmico viscoelástico.



Figura 18: Tempo de resposta para a sintonização dos lasers C1-C2 usando dois neutralizadores.

A Figura 19 mostra o tempo de resposta para a sintonização dos lasers C1-C6 com os mesmos neutralizadores. Observa-se que, nesse caso, o tempo de sintonização está abaixo de 20 ms, outra vez, menos da metade do tempo obtido usando o filtro eletrônico.



Figura 19: Tempo de resposta para a sintonização dos lasers C1-C2 usando neutralizadores com freqüências naturais de 254 Hz e 1500 Hz

Os uso de neutralizadores foi a técnica mais eficaz para controlar as vibrações remanentes após a excitação via PZT no processo de sintonização.Com esta técnica, foi possível reduzir o tempo de sintonização em mais de 6 vezes se comparado com o sistema sem nenhum tipo de controle, como pode ser visto na sintonização dos canais C1-C2 (ver Figura 7). Os resultados mostram uma certa dificuldade na sintonização,principalmente quando se trabalha entre os canais C1-C6, não ocorrendo o mesmo fenômeno quando se trata dos canais C1-C2. Isto pode ser explicado pelo fato de ao trabalhar entre os canais C1-C6 a carga aplicada na fibra deve ser maior e após alguns ensaios a fibra ficou frouxa, mudando as características dinâmicas do sistema a controlar. Uma fixação da fibra sobre o NTS e a base pode solucionar este problema, conseguindo-se assim, melhores resultados.

## 7 CONCLUSÕES

Foi apresentado o projeto de um dispositivo para sintonização de redes de Bragg em fibra quando utilizado uma mola de entalhe tipo NTS.

Foram revisados os conceitos relacionados com uma metodologia geral de projeto de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos. Foram introduzidos nesta revisão os modelos dos neutralizadores através de parâmetros equivalentes generalizados e a sua importância nas equações de movimento, modelo de derivadas fracionárias para predizer com precisão o comportamento dos materiais viscoelásticos usados em controle de vibrações e as equações de movimento do sistema composto (sistema a controlar + neutralizadores), necessários para projetar de forma ótima o conjunto dos dispositivos de controle.

Foram introduzidas as respostas de sintonização em redes de Bragg em fibra usando mola de entalhe tipo NTS, mostrando os problemas relacionados com tempo gasto nesta sintonização quando no se conta com um sistema de controle de vibrações.

Foi projetado e construído um controle passivo sobre a excitação para diminuir este tempo

de sintonização através de filtros eletrônicos ente o gerador e o controlador que alimenta o atuador – PZT. Os resultados mostram que ao utilizar este tipo de controle sobre a excitação, filtrando as altas freqüências, se alcançam reduções no tempo de sintonização da ordem de 3 vezes, passando de 60 ms, sem controle, para 20 ms, quando implementado o filtro.

Foi projetado e construído um controle passivo sobre a estrutura (NTS-base-fibra) através do uso de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos. Uma vez fixados, este dispositivo de controle mostrou ser mais eficiente que o filtro eletrônico, conseguindo-se reduções da orem de 6 vezes se comparado ao tempo necessário sem controle. Os resultados são alentadores, mostrando que os neutralizadores representam uma ação eficaz de controle para esta aplicação.

Quando utilizado tensões sobre a fibra elevadas, sintonização C1-C6, respostas elevadas foram encontradas após a ação de controle usando NDVs, o que prejudica o controle. Isto pode ser melhorado com uma fixação mais adequada da fibra. Estes autores entendem que a fibra, após vários ensaios, principalmente a elevadas tensões, relaxa, mudando as características do sistema a controlar, dessintonizando o controle ótimo dos neutralizadores.

### REFERENCIAS

- Bagley, R. L.; Torvik, P. J. On the fractional derivative model of real solid materials. Journal of Rheology, v. 30, n. 1, p. 133–155, 1986.
- Ball, G. A., and Morey, W. W., Compression-tuned single-frequency Bragg grating fiber laser, *Optics Letters*, vol. 19, pp. 1979–1981, 1994.
- Bavastri, C. A., Redução de vibrações de banda larga em estruturas complexas por neutralizadores vicoelásticos, Tese (Doutorado) — UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 1997.
- Bavastri, C. A., Espíndola, J. J., and Teixeira, P. H., A hybrid algorithm to compute the optimal parameters of a system of viscoelastic vibration neutralizers in a frequency range, in: MOVIC 98, Zurich, 2:577-582, 1998.
- Espíndola, J. J., and Bavastri, C. A., Reduction of vibrations complex structures with viscoelastic neutralizers: A Generalized Approach, in: DETC'95 ASME, 1995, Boston. Proceedings of DETC 95, 3:761-766, 1995.
- Espíndola, J. J., and Bavastri, C. A., Reduction of vibration in complex structures with viscoelastic neutralizers: a generalized approach and physical realization, in: DETC'97/VIB-4187, Sacramento, California, Proceedings of DETC 97, 1997.
- Espíndola, J. J., Bavastri, C. A., and Lopes, E. M. O., Design of Optimum Systems of Viscoelastic Vibration Absorbers for a Given Material Based on the Fractional Calculus Model, *Journal of Vibration and Control*, 14:1607-1630, 2008.
- Espíndola, J. J., Pereira, P., Bavastri, C. A., and Lopes, E. M., Design of optimum system of viscoelastic vibration absorbers with a Frobenius norm objective function, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 31:210-219, 2009.
- Espíndola, J. J., Bavastri, C. A., and Lopes, E. M. O., On the Passive Control of Vibrations with Viscoelastic Dynamic Absorbers of Ordinary and Pendulum Types, *Journal of the Franklin Institute*, 347:102-115, 2010.
- Hill, K. O., Fuji, Y., Johnson, D. C., and Kawasaki, B. S., Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection filter fabrication, *Appied Physics Letters*, 32:647-649, 1978.
- Hill, K. O., Malo, B., Bilodeau, F., Johnson, D. C., and Albert, J., Bragg gratings fabricated in monomode photosensitive optical fiber by UV exposure through a phase mask, *Applied*

*Physics Letter*, 62:1035–1037, 1993.

- Hill, K. O., and Meltz, G., Fiber Bragg grating technology fundamentals and overview, *Journal of Lightwave Technology*, 15:1263-1276, 1997.
- Iocco, A., *Tunable fiber Bragg grating filters*, Tese (Doutorado), Institute of Applied Optics, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland, 1999.
- Kashyap, R., Fiber Bragg Gratings, Academic Press, 1999.
- Kawasaki, B. S., Hill, K. O., Johnson, D. C., and Fuji, Y., Narrow-band Bragg reflectors in optical fibers, *Opics. Letters*, 3:66-68, 1978.
- Lopes, E. M. O., Bavastri, C. A., Silva Neto, J. M., and Espíndola, J. J., Caracterização dinâmica integrada de elastômeros por derivadas generalizadas. In: CONEM 2004 - III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Belém, Brasil, 2004.
- Mavoori, H., Jin, S., Espindola, R. P., Adams, L. E., and T. A. Strasser, Magnetically tunable fiber Bragg gratings, in: OFC 99- Optical Fiber Communications Conference, San Diego, California, Paper ThJ2:135–137G, 1999.
- Mohammad, N., Szyszkowsky, W., Zhang, W. J., Haddad, E. I., Zou, J., Jamroz, W. J., and Kruzelecky, R., Analysis and development of a tunable fiber Bragg grating filter based on axial tension/compression, *Journal of Lightwave Technology*, 22:2001-2013, 2004.
- Othonos, R., and Kalli, K, Fiber Bragg Gratings Fundamentals and Applications in Telecommunications and Sensing, Artech House, 1999.
- Pritz, T. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. Journal of Sound and Vibration, v. 195, n. 1, p. 103–115, 1996.
- Smith, S. T., and Chetwynd, D. G., *Foundations of Ultra-Precision Mechanism Design*, Taylor & Francis Group, 2005.
- Tseytlin, Y. M., Notch Flexure Hinges: An effective theory, Review of Scientific Instruments, 73:3365-3368, 2002.