

## DETERMINACIÓN DE FRECUENCIAS EN VIGAS TIMOSHENKO ROTANTES DE SECCIÓN TRANSVERSAL VARIABLE EN FORMA CONTINUA POR TRAMOS

**Daniel H. Felix<sup>a</sup>, Diana V. Bambill<sup>a,b</sup>, Raúl E. Rossi<sup>a</sup>, Samanta J. Escanes<sup>a</sup>, Alejandro Ratazzi<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur (UNS), )Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina <http://www.uns.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina  
[dhfelix@criba.edu.ar](mailto:dhfelix@criba.edu.ar), [dbambill@criba.edu.ar](mailto:dbambill@criba.edu.ar), [rerossi@criba.edu.ar](mailto:rerossi@criba.edu.ar), [sescanes@uns.edu.ar](mailto:sescanes@uns.edu.ar),  
[alejandro.ratazzi@uns.edu.ar](mailto:alejandro.ratazzi@uns.edu.ar)*

**Palabras clave:** vibración transversal, cuadratura diferencial, viga rotante, Timoshenko, sección variable.

**Resumen.** En este trabajo se implementa un nuevo algoritmo desarrollado por los autores, basado en el Método de Cuadratura Diferencial (MCD), combinado con la técnica de descomposición del dominio, para modelar elementos estructurales tales como aspas de helicópteros o álabes de turbinas, mediante una viga Timoshenko rotante que considera los efectos de deformación por corte e inercia rotatoria. El mismo permite modelar variaciones de la sección transversal tanto en forma continua como discontinua, hecho que lo hace más versátil comparado con los presentados en trabajos previos. Para el análisis se adopta, en primer lugar, una viga de un solo tramo de sección transversal rectangular de ancho constante y con variación parabólica (cuadrática) de la altura. Luego se estudian vigas de dos tramos, siempre de ancho constante y con variaciones lineal y/o parabólica de la altura de la sección transversal.

Se determinan y analizan las primeras frecuencias de vibración transversal en función de la geometría del modelo y del parámetro que define la velocidad de rotación. En todos los casos los resultados se comparan con los obtenidos con el Método de Elementos Finitos (MEF).

## 1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una aplicación del método de cuadratura diferencial aplicado al análisis de vigas rotantes no prismáticas con variación continua de su sección transversal a lo largo de su longitud. Este tipo de vigas es de aplicación en áreas donde la optimización del peso propio y la resistencia es determinante en el diseño. Se utilizan vigas rotantes en estructuras como aspas de helicópteros, turbinas de molino eólico, turbinas de vapor o gas y hélices de aeronaves. Simultáneamente son comúnmente usadas como elementos estructurales en ingeniería porque permiten a los ingenieros de diseño cumplir tanto con exigencias arquitectónicas como estéticas. El análisis de las vibraciones, y en particular la predicción de las frecuencias naturales de este tipo de vigas, es importante debido al requisito de diseño de mantener las frecuencias naturales lejos de los múltiplos de la velocidad del rotor así como para el análisis dinámico. Existen publicaciones recientes que presentan técnicas numéricas como el método de elementos finitos (Jagadish Babu Gunda et al., 2008; Attarnejad et al., 2010) y los métodos de Frobenius y Rayleigh-Ritz (Banerjee, 2000; Auciello y Ercolano, 2004; Banerjee et al. 2006). En su trabajo para vigas escalonadas Wang y Wereley (2004) muestran que las aspas de las turbinas de viento se pueden modelar adecuadamente con variación lineal de la masa y de la rigidez flexional, y las de las hélices de helicópteros con una variación lineal de la masa y una distribución cuadrática para la rigidez. (Dumitru et al., 2009)

Varios investigadores analizan el caso de vigas Timoshenko rotantes (Karami et al., 2003; Lin y Hsiao, 2001; Sinha, 2005, Bambill et al. 2010, Rossi et al, 1991; Seon et a., 1999). Para el caso particular de este estudio se utiliza la formulación para vibración transversal de vigas rotantes de sección variable en forma continua de vigas Timoshenko, deducida a partir del principio de Hamilton, (Felix et al., 2009b).

El uso del método de cuadratura diferencial es ventajoso para resolver las vigas rotantes reales, que son en general no prismáticas. En ellas varían tanto la masa como la rigidez a flexión. Con este procedimiento se requiere un número mínimo de elementos para resolverlas. Este método ya ha sido utilizado por otros autores (Bellman y Casti, 1971; Bert y Malik, 1996; Karami et al., 2003; Choi et al., 2000; Liu y Wu, 2001), pero sin considerar una variación continua de la sección. Los resultados se comparan con valores obtenidos por el método de elementos finitos (Rossi, 2007) a fin de corroborarlos.

## 2 MODELO MATEMÁTICO

### 2.1 Esfuerzos internos originados por la rotación y el movimiento vibratorio en el plano transversal

Se asume que la viga rota con velocidad  $\bar{\eta}$  y se analizan las vibraciones en el plano normal al plano de rotación.

La rotación produce esfuerzos internos en la viga, generados por la fuerza centrífuga, que causan un efecto de rigidización y modifican el comportamiento dinámico.

Para el análisis los esfuerzos internos son evaluados en cada tramo de la viga, comenzando por el más alejado del eje de rotación (Banerjee, 2001).

La Figura 1 muestra esquemáticamente la geometría de la viga rotante de longitud  $L$  de sección transversal variable en forma continua en cada tramo. El área de la sección de la viga varía, encada tramo, de acuerdo a una expresión de la forma:  $A_k(\bar{x}_k) = A_k(0) a_k(\bar{x})$

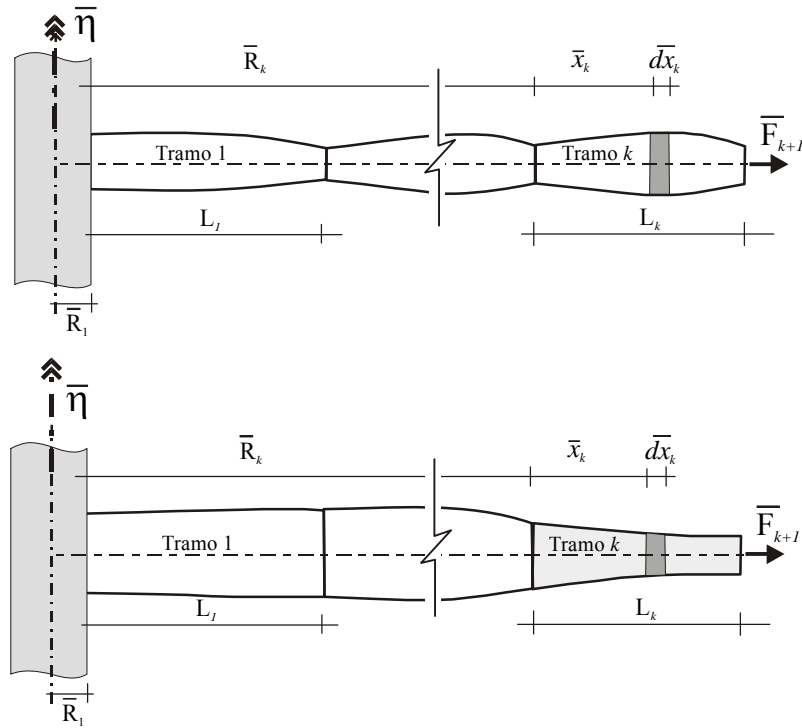


Figura 1: Viga rotante: tramo  $k$ -ésimo con variación continua de la sección transversal

En las expresiones se indica con  $\bar{\eta}$  a la velocidad de rotación de la viga y con  $\bar{F}_{k+1}$  a la fuerza centrífuga que actúa en el extremo del tramo  $k$ . La coordenada global  $\bar{R}_k$  mide la distancia entre el eje de rotación y el comienzo del tramo  $k$ -ésimo analizado; y la coordenada local  $\bar{x}_k$ , define la posición relativa de una sección transversal particular dentro del tramo. La expresión del esfuerzo interno axial  $\bar{N}_k(\bar{x}_k)$  para un tramo  $k$  como el mostrado en la Figura 1, (Felix et al., 2009a) es:

$$\bar{N}_k(\bar{x}_k) = \bar{\eta}^2 \rho (\bar{R}_k V_k(L_k) + \Phi_k(L_k) - \bar{R}_k V_k(\bar{x}_k) - \Phi_k(\bar{x}_k)) + \bar{F}_{k+1} \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material de la viga rotante y las funciones  $V_k$  y  $\Phi_k$  dependen de la geometría del tramo  $k$ -ésimo y son dadas por las siguientes expresiones:

$$V_k(\bar{x}_k) = \int_0^{\bar{x}_k} A_k(\bar{x}_k) d\bar{x}_k ; \quad \Phi_k(\bar{x}_k) = \int_0^{\bar{x}_k} A_k(\bar{x}_k) \bar{x}_k d\bar{x}_k , \quad (2a, b)$$

La ecuación (1) expresada en forma adimensional es:

$$N_k(x) = \eta^2 \frac{l_k^2}{S_1^2} (R_k v_k(1) + \phi_k(1) - R_k v_k(x) - \phi_k(x)) + F_{k+1} \quad (3)$$

$$\text{con } N_k(x) = \frac{\bar{N}_k(\bar{x}_k)}{EA_k(0)}; \eta^2 = \left( \frac{\rho A_1(0)}{EI_1(0)} L^4 \right) \bar{\eta}^2; l_k = \frac{L_k}{L}; s_1 = \sqrt{L^2 \frac{A_1(0)}{I_1(0)}}; \quad (4a, b, c, d)$$

$$x = \frac{\bar{x}_k}{L_k}; R_k = \frac{\bar{R}_k}{L_k}; v_k(1) = \frac{V_k(L_k)}{L_k A_k(0)}; \phi_k(1) = \frac{\Phi_k(L_k)}{L_k A_k(0)}; F_{k+1} = \frac{\bar{F}_{k+1}}{L} \quad (4e, f, g, h, i)$$

donde  $l_k$  es la longitud adimensional del tramo  $k$ -ésimo,  $s_1$  es el parámetro de esbeltez de la viga relacionado con el momento de inercia de la sección más cercana al eje de rotación, que corresponde al primer tramo de la viga rotante,  $k = 1$ , y  $E$  es el módulo de Young del material de la viga.

Teniendo en cuenta la existencia del esfuerzo axial generado por la fuerza centrífuga se determinan las amplitudes de los esfuerzos internos de corte y momento flector originados por la combinación del movimiento vibratorio transversal y de rotación de la viga.

En forma adimensional dichos esfuerzos se expresan:

$$Q_k(x) = \frac{\bar{Q}_k(\bar{x}_k)}{EA_k(0)}; M_k(x) = \frac{L_k}{EI_k(0)} \bar{M}_k(\bar{x}_k) \quad (5a, b)$$

y en función de los desplazamientos de las secciones del tramo  $k$ -ésimo:

$$Q_k(x) = \left( N_k(x) + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_k(x) \right) \frac{dW_k(x)}{dx} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_k(x) \Psi_k(x) \quad (5c)$$

$$M_k(x) = b_k(x) \frac{d\Psi_k(x)}{dx} \quad (5d)$$

donde  $b_k(x)$  define la ley de variación del momento de inercia de la sección transversal variable:  $I_k(x_k) = I_k(0) b_k(x)$ .  $W_k(x)$  y  $\Psi_k(x)$  representan la amplitud del desplazamiento transversal y del giro de la sección ubicada en la coordenada local  $x$ . El coeficiente  $\kappa$  es el factor de la deformación por corte considerado en la teoría de vigas Timoshenko y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson del material.

Las condiciones de borde consideradas son desplazamiento y giro nulos en el empotramiento de la viga cantilever con el eje de rotación, y las condiciones de esfuerzo de corte y momento flector nulos en el extremo libre de la viga.

Las frecuencias de vibración natural  $\omega_i$  de la viga rotante se obtienen mediante la resolución de las ecuaciones de movimiento con las condiciones de compatibilidad y condiciones de borde que gobiernan el problema. El detalle de dicho desarrollo se halla en (Felix et al. 2009a). Los coeficientes adimensionales de vibración se calculan con la expresión

$$\Omega_i^2 = \frac{\rho A_1(0)}{EI_1(0)} L^4 \omega_i^2 \quad (6)$$

## 2.2 Sistema de ecuaciones gobernantes

Una vez determinadas las expresiones de los esfuerzos internos, es posible obtener, mediante la aplicación del principio de Hamilton, las ecuaciones de movimiento que gobiernan las vibraciones transversales libres de la viga rotante.

Finalmente la forma adimensional de las ecuaciones de movimiento en cada tramo  $k$ -ésimo de la viga resultan:

$$\eta^2 a_k(x)(R_k + x) \frac{dW_k(x)}{dx} - \frac{s_1^2}{l_k^2} N_k(x) \frac{d^2W_k(x)}{dx^2} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_k(x) \left( \frac{d^2W_k(x)}{dx^2} - \frac{d\Psi_k(x)}{dx} \right) = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_{1k}(x) \left( \frac{dW_k(x)}{dx} - \Psi_k(x) \right) = \Omega^2 a_k(x) W_k(x) - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 a_k(x) \left( \frac{dW_k(x)}{dx} - \Psi_k(x) \right) - \frac{s_1^2}{l_k^2} b_k(x) \frac{d^2\Psi_k(x)}{dx^2} - \frac{s_1^2}{l_k^2} b_{1k}(x) \frac{d\Psi_k(x)}{dx} - \eta^2 b_k(x) \Psi_k(x) = \Omega^2 b_k(x) \Psi_k(x) \quad (7b)$$

El sistema de ecuaciones gobernante incluye las ecuaciones de compatibilidad de esfuerzos y corrimientos entre tramos adyacentes.

La compatibilidad de desplazamientos viene dada por:

$$-l_{(k-1)} W_{(k-1)}(1) + l_k W_k(0) = 0 \quad (8a)$$

$$-\Psi_{(k-1)}(1) + \Psi_k(0) = 0 \quad (8b)$$

y la compatibilidad de esfuerzos en función de los desplazamientos resulta:

$$-\alpha_{(k-1)} \left( \left( N_{(k-1)}(x) + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_{(k-1)}(x) \right) \frac{dW_{(k-1)}(x)}{dx} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_{(k-1)}(x) \Psi_{(k-1)}(x) \right) \Bigg|_{x=1} + \alpha_k \left( \left( N_k(x) + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_k(x) \right) \frac{dW_k(x)}{dx} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_k(x) \Psi_k(x) \right) \Bigg|_{x=0} = 0 \quad (9a)$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{l_{(k-1)}} b_{(k-1)}(x) \frac{d\Psi_{(k-1)}(x)}{dx} \Bigg|_{x=1} + \frac{\alpha_k}{l_k} b_k(x) \frac{d\Psi_k(x)}{dx} \Bigg|_{x=0} = 0 \quad (9b)$$

El coeficiente  $\alpha_k = A_k / A_1$  permite considerar una discontinuidad en la sección transversal de tramos adyacentes de la viga, (Felix et al., 2008).

Las condiciones de borde geométricas vienen impuestas por la nulidad de giro y desplazamiento en el extremo de la viga vinculado al eje de rotación:

$$W_1|_{x=0} = 0; \Psi_1|_{x=0} = 0 \quad (10a, b)$$

mientras que las condiciones de borde naturales vienen dadas por la nulidad de los esfuerzos en el extremo libre, las que expresadas en término de los desplazamientos resultan:

$$\left[ \left( N_d(x) + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_d(x) \right) \frac{dW_d(x)}{dx} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_d(x) \Psi_d(x) \right]_{x=1} = 0 \quad (11a)$$

$$b_d(x) \frac{d\Psi_d}{dx} \Big|_{x=1} = 0 \quad (11b)$$

### 3 ECUACIONES ANÁLOGAS DE CUADRATURA DIFERENCIAL

Se obtiene una solución aproximada del sistema planteado mediante la discretización del dominio definido por la coordenada espacial  $x$ , definiéndose un conjunto finito de puntos o nodos en los que se plantean las denominadas ecuaciones análogas de cuadratura diferencial.

Un desarrollo detallado del MCD fue elaborado previamente por distintos autores y se encuentra fuera del alcance del presente artículo.

A continuación se presentan las ecuaciones análogas de cuadratura aplicables al dominio discreto, que se obtienen a partir de las ecuaciones adimensionales vistas, correspondientes al dominio continuo. Obsérvese que la coordenada espacial adimensional  $x$  es continua en las ecuaciones anteriores y pasa a ser discreta en las ecuaciones análogas de cuadratura.

Se tiene así para los esfuerzos:

$$N_k(x_i) = \eta^2 \frac{l_k^2}{s_1^2} (R_k v_k(1) + \phi_k(1) - R_k v_k(x_i) - \phi_k(x_i)) + N_{k+1} \quad (12a)$$

$$Q_k(x_i) = \left( N_k(x_i) + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_k(x_i) \right) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} W_{kj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(0)} \Psi_{kj} \quad (12b)$$

$$M_k(x_i) = b_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} \Psi_{kj} \quad (12c)$$

donde  $n$  es el número de nodos del modelo discreto del método de cuadratura diferencial.

Las ecuaciones de movimiento resultan:

$$\begin{aligned} & \left( \eta^2 a_k(x_i) (R_k + x_{ki}) - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_{1k}(x_i) \right) \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{(1)}) W_{kj} - \\ & \left( \frac{s_1^2}{l_k^2} N_k(x_i) + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_k(x_i) \right) \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{(2)}) W_{kj} - \\ & + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} \Psi_{kj} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_{1k}(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(0)} \Psi_{kj} = \Omega^2 a_k(x_i) W_{ki} \end{aligned} \quad (13a)$$

$$-\frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 a_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} W_{kj} - \frac{s_1^2}{l_k^2} b_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(2)} \Psi_{kj} + \left( \frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 a_k(x_i) - \eta^2 b_k(x_i) \right) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(0)} \Psi_{kj} - \frac{s_1^2}{l_k^2} b_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} \Psi_{kj} = \Omega^2 b_k(x_i) \Psi_{ki} \quad (13b)$$

Las ecuaciones análogas de cuadratura que rigen la compatibilidad de desplazamientos resultan:

$$-l_{(k-1)} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} W_{(k-1)j} + l_k \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} W_{kj} = 0 \quad (14a)$$

$$-\sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{(k-1)j} + \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} = 0 \quad (14b)$$

y las correspondientes a la compatibilidad de esfuerzos internos son:

$$-\alpha_{(k-1)} \left( \left( N_{(k-1)}(1) + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_{(k-1)}(1) \right) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} W_{(k-1)j} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_{(k-1)}(1) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{(k-1)j} \right) + \alpha_k \left( \left( N_k(0) + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_k(0) \right) \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} W_{kj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_k(0) \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} \right) = 0 \quad (15a)$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{l_{(k-1)}} b_{(k-1)}(1) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} \Psi_{(k-1)j} + \frac{\alpha_k}{l_k} b_k(0) \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} \Psi_{kj} = 0 \quad (15b)$$

En las expresiones (12), (13), (14) y (15)  $A_{ij}^{(0)}$ ,  $A_{ij}^{(1)}$  y  $A_{ij}^{(2)}$  son coeficientes generados para la modelización discreta de la viga rotante,

El sistema de ecuaciones se completa aplicando las condiciones de borde. En el extremo que vincula a la viga con el eje tendremos las condiciones de borde geométricas dadas por:

$$\sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} W_{1j} = 0 \quad (16a)$$

$$\sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{1j} = 0 \quad (16b)$$

y en el extremo libre de la viga, indicado con el subíndice  $d$ , se aplican las condiciones de borde naturales:

$$\left( N_d(1) + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_d(1) \right) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} W_{dj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} a_d(1) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{dj} = 0 \quad (17a)$$

$$b_d(1) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} \Psi_{dj} = 0 \quad (17b)$$

#### 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Con el procedimiento propuesto se resolvieron los casos de vigas rotantes que se presentan en las Figuras 3 a 9. En todos los casos los tramos tienen sección transversal rectangular. Las variaciones de la sección transversal consideradas son la lineal y la cuadrática de la altura de la sección de la viga, manteniéndose en ambos casos constante el ancho  $e$  de la viga.

$$A(x) = e \times h(x) = e \times (c_{0k} + c_{1k}x + c_{2k}x^2); \quad (18)$$

También se define para cada tramo  $k$ -ésimo de viga:

$$\begin{aligned} h_{Ak} &= h_k(0); \\ h_{Bk} &= h_k(1); \end{aligned} \quad (19a,b,c)$$

$$h'_k(x) = c_{1k} + 2c_{2k}x$$

$h_{Ak}$  es la altura de la sección más cercana al eje de rotación de cada tramo,  $h_{Bk}$  lo es de la sección más alejada y  $h'_k(x)$  es la pendiente del perfil de cada tramo de la viga.

##### 4.1 Análisis de convergencia utilizando el MEF

Para el análisis de la convergencia del método de elementos finitos se obtuvieron valores del coeficiente de frecuencia, para el caso de una viga de un solo tramo con variación parabólica de la altura de la sección transversal, de sección rectangular con  $e = cte$ . El algoritmo fue desarrollado en trabajos previos de los autores (Rossi, 2007; Felix et al., 2008). El modelo utilizado se diseñó con una malla de 2000 elementos-viga de igual longitud, la cual resultó suficientemente precisa, como muestran los resultados de las Tabla 1 y 2, la primera para el caso de velocidad de rotación nula y la segunda con un valor de  $\eta = 10$ .

N° de elementos	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
<b>10</b>	3.38628165	11.7689336	26.5951854	46.6658427	71.0448001
<b>100</b>	3.37398143	11.7248502	26.4438604	46.1408176	69.5136708
<b>1000</b>	3.37385398	11.7243988	26.4423706	46.1357196	69.4986357
<b>2000</b>	3.37385302	11.7243954	26.4423593	46.1356810	69.4985219

**Tabla 1:** Análisis de convergencia utilizando el MEF para el cálculo de los primeros coeficientes de frecuencia de una viga rotante de un tramo, de sección rectangular con  $e = cte$ . ;  $R = 0$  ; y variación parabólica de altura definida por:  $h_A/L = 1/5$  ;  $h_B/h_A = 1/4$  ;  $h'_B = 0$  .  $\eta = 0$

N° de elementos	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
<b>10</b>	11.6074237	25.8805102	44.0407905	66.3753084	92.6859627
<b>100</b>	11.6098042	25.7094320	43.5638284	65.4674874	90.8491237
<b>1000</b>	11.6098077	25.7074626	43.5585908	65.4579769	90.8301746

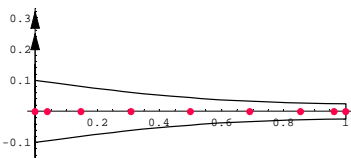
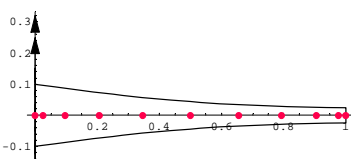
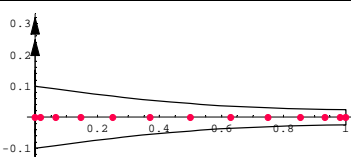
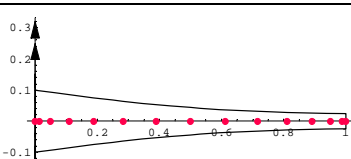
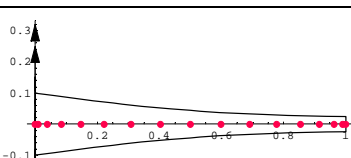
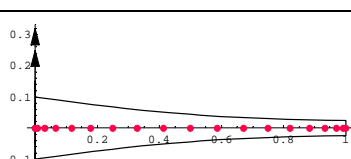
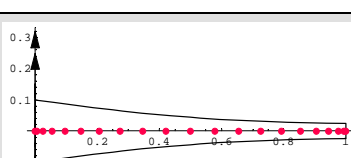


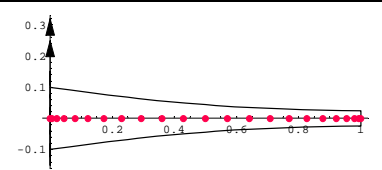
<b>2000</b>	11.6098078	25.7074476	43.5585511	65.4579049	90.8300310
-------------	------------	------------	------------	------------	------------

**Tabla 2:** Análisis de convergencia utilizando el MEF para el cálculo de los primeros coeficientes de frecuencia de una viga rotante de un tramo, de sección rectangular con  $e = cte.$ ;  $R = 0$ ; y variación parabólica de altura definida por:  $h_A / L = 1/5$ ;  $h_B / h_A = 1/4$ ;  $h'_B = 0$ .  $\eta = 10$

#### 4.2 Análisis de convergencia utilizando el MCD

De manera similar se analiza la cantidad de nodos necesaria para lograr una buena convergencia en el método de cuadratura diferencial. Se presentan a continuación, Tabla 3, los coeficientes obtenidos para cada caso analizado.

Mallado	Nº de nodos	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
	<b>9</b>	11,5947	25,6172	43,1632	64,6009	90,8308
	<b>11</b>	11,5949	25,6521	43,4123	65,1846	90,1103
	<b>13</b>	11,5952	25,6795	43,5233	65,4372	90,9172
	<b>15</b>	<u>11,5953</u>	25,6821	43,5296	65,4344	90,8206
	<b>17</b>	11,5953	25,6813	43,5252	65,4230	90,7948
	<b>19</b>	11,5953	<u>25,6811</u>	<u>43,5245</u>	65,4217	90,7938
	<b>21</b>	11,5953	25,6811	43,5245	<u>65,4220</u>	<u>90,7947</u>

	<b>23</b>	11,5953	25,6811	43,5245	65,4220	90,7947
---	-----------	---------	---------	---------	---------	---------

**Tabla 3:** Análisis de convergencia del MCD con viga rotante de un tramo, con variación parabólica de altura definida por:  $h_A/L=1/5$  ;  $h_B/h_A=1/4$  ;  $h'_B=0$  ;  $e=cte.$  ;  $R=0$  ;  $\eta=10$  .

Comparando los resultados de las Tablas 2 y 3 se comprueba que el MCD converge hacia valores ligeramente menores que el MEF, cuando  $\eta > 0$ . Esto es consecuencia de que el algoritmo desarrollado con el MCD tiene en cuenta un efecto adicional de la velocidad de rotación, que no interviene en el algoritmo del MEF (Felix et al., 2009b).

### 4.3 Ejemplos

El modelo adoptado en el presente trabajo para realizar los cálculos con MCD, es el de 21 nodos en la discretización cada tramo  $k$ -ésimo de las vigas rotantes.

La Figura 3 muestra un esquema del primer modelo de viga analizado

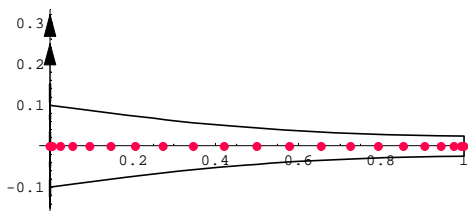


Figura 3: Viga rotante de un solo tramo con variación parabólica de la sección transversal. Se muestra la distribución de los nodos en la discretización con el MCD

La Tabla 4 contiene los coeficientes adimensionales  $\Omega_i = \omega_i \sqrt{\rho A_1(0)L^4 / EI_1(0)}$  de las primeras cinco frecuencias naturales de la viga de la Figura 3, calculados para cuatro valores del parámetro  $\eta$  de la velocidad de rotación.

		$\Omega_i = \omega_i \sqrt{\rho A_1(0)L^4 / EI_1(0)}$ ; ( $s_1=17,32$ )				
$\eta$		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
<b>0</b>	MCD	3,3739	11,7244	26,4423	46,1356	69,4982
	MEF	3,3739	11,7244	26,4424	46,1357	69,4985
	$\Delta\%$	0,0000	0,0000	0,0004	0,0002	0,0004
<b>1</b>	MCD	3,5946	11,9577	26,6734	46,3733	69,7478
	MEF	3,5951	11,9583	26,6740	46,3739	69,7485
	$\Delta\%$	0,0131	0,0050	0,0022	0,0013	0,0010
<b>5</b>	MCD	6,7817	16,5462	31,6858	51,7206	75,4627
	MEF	6,7877	16,5571	31,6975	51,7316	75,4728
	$\Delta\%$	0,0885	0,0658	0,0369	0,0213	0,0134

<b>10</b>	MCD	11,5953	25,6811	43,5245	65,4220	90,7947
	MEF	11,6098	25,7074	43,5586	65,4579	90,8300
	$\Delta\%$	0,1249	0,1023	0,0783	0,0548	0,0389

**Tabla 4:** Primeros coeficientes de frecuencia de una viga rotante de un tramo de sección rectangular, con  $e = cte.$  y variación parabólica de altura definida por  $h_A/L = 1/5$ ;  $h_B/h_A = 1/4$ ;  $h'_B = 0$ .  $R = 0$ . Figura 3.

En este caso se considera despreciable el radio propio del eje de rotación ( $R = 0$ ). La altura  $h$  varía en forma parabólica. Como es posible observar en la Tabla 4, el acuerdo entre los valores calculados por el método de elementos finitos y el método de cuadratura diferencial es excelente cuando  $\eta = 0$ . Obviamente, la mayor diferencia entre los valores calculados por ambos métodos se produce para la mayor velocidad considerada y en este ejemplo es de apenas el 0,12%. En la Tabla 4 y en todas las que siguen se han agregado filas  $\Delta\%$  en las que se indican las diferencias porcentuales entre los dos métodos.

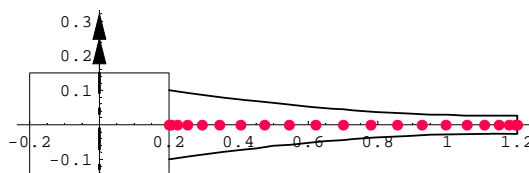


Figure 4: Viga rotante con variación parabólica de la sección transversal considerando el radio del eje de rotación.

La Tabla 5 muestra los coeficientes para una viga similar a la del caso precedente, pero en este modelo también se toma en cuenta la dimensión del eje de rotación ( $R = 0.2$ ) Figura 4.

$\Omega_i = \omega_i \sqrt{\rho A_1(0) L^4 / EI_1(0)}$ ; ( $s_1 = 17,32$ )						
$\eta$		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
<b>0</b>	MCD	3,3739	11,7244	26,4423	46,1356	69,4982
	MEF	3,3739	11,7244	26,4424	46,1357	69,4985
	$\Delta\%$	0,0000	0,0000	0,0004	0,0002	0,0004
<b>1</b>	MCD	3,6472	12,0160	26,7339	46,4378	69,8173
	MEF	3,6477	12,0166	26,7345	46,4383	69,8180
	$\Delta\%$	0,0126	0,0050	0,0022	0,0011	0,0010
<b>5</b>	MCD	7,3850	17,5473	32,9194	53,1334	77,0426
	MEF	7,3906	17,5576	32,9307	53,1442	77,0525
	$\Delta\%$	0,0755	0,0587	0,0343	0,0203	0,0128
<b>10</b>	MCD	12,9216	28,1171	46,9619	69,7170	95,8666
	MEF	12,9345	28,1412	46,9937	69,7512	95,9007
	$\Delta\%$	0,0997	0,0856	0,0677	0,0490	0,0356

**Tabla 5:** Primeros coeficientes de frecuencia de una viga rotante de un tramo de sección rectangular, con

$e = cte.$  y variación parabólica de altura definida por  $h_A / L = 1/5$  ;  $h_B / h_A = 1/4$  ;  $h'_B = 0$  .  $R = 0,2$  . Figura 4.

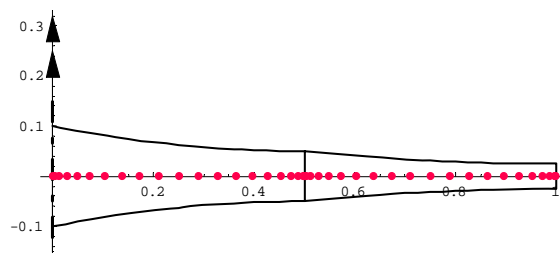


Figura 5: viga rotante de dos tramos con variación parabólica distinta de la sección transversal sin considerar el radio del eje de rotación.

La Tabla 6 muestra los coeficientes para una viga de dos tramos diferentes, cada uno con variación continua de la sección en forma parabólica: No se consideró la dimensión del eje de rotación ( $R = 0$ ) Figura 5.

$$\Omega_i = \omega_i \sqrt{\frac{\rho A_1(0)L^4}{EI_1(0)}} \quad ; (s_1 = 17,32)$$

$\eta$		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
<b>0</b>	MCD	3,3214	11,9753	27,0629	47,1332	70,9354
	MEF	3,3214	11,9753	27,0629	47,1332	70,9354
	$\Delta\%$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b>1</b>	MCD	3,5314	12,2001	27,2865	47,3442	71,1780
	MEF	3,5319	12,2006	27,2870	47,3647	71,1784
	$\Delta\%$	0,0150	0,0041	0,0018	0,0433	0,0006
<b>5</b>	MCD	6,6524	16,7577	32,1759	52,5779	76,7537
	MEF	6,6589	16,6681	32,1883	52,5892	76,7639
	$\Delta\%$	0,0982	0,5376	0,0385	0,0215	0,0133
<b>10</b>	MCD	11,4730	25,7081	43,9254	66,0664	91,8610
	MEF	11,4878	25,7334	43,9620	66,1027	91,8965
	$\Delta\%$	0,1288	0,0983	0,0833	0,0549	0,0386

**Tabla 6:** Primeros coeficientes de frecuencia de una viga rotante de dos tramos, con  $l_1 = l_2 = 0.5$ , de sección rectangular con  $e = cte.$  y variación parabólica de altura definida por  $h_A/L = 1/5$ ;  $h_{B1}/h_{A1} = 1/2$ ;  $h_{B2}/h_{A2} = 1/2$ ;  $h'_{B1} = 0$ ;  $h'_{B2} = 0$ .  $R = 0$ . Figura 5.

A continuación, la Tabla 7 presenta el caso análogo donde la dimensión del eje de rotación es considerada ( $R = 0,2$ ). Figura 6.

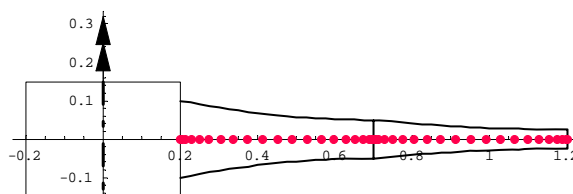


Figura 6: viga rotante de dos tramos, ambos con variación parabólica de la sección transversal, considerando el radio del eje de rotación.

$$\Omega_i = \omega_i \sqrt{\rho A_1(0) L^4 / EI_1(0)} \quad ; (s_1 = 17,32)$$

$\eta$		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
<b>0</b>	MCD	3,3214	11,9753	27,0629	47,1332	70,9354
	MEF	3,3214	11,9753	27,0629	47,1332	70,9354
	$\Delta\%$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b>1</b>	MCD	3,5832	12,2562	27,3460	47,4276	71,2470
	MEF	3,5837	12,2568	27,3466	47,4281	71,2474
	$\Delta\%$	0,0151	0,0049	0,0022	0,0011	0,0006
<b>5</b>	MCD	7,2675	17,6374	33,4070	53,9753	78,3274
	MEF	7,2707	17,6471	33,4190	53,9863	78,3374
	$\Delta\%$	0,0444	0,0550	0,0359	0,0204	0,0128
<b>10</b>	MCD	12,8139	28,1280	47,3976	70,3506	96,9443
	MEF	12,8270	28,1512	47,4317	70,3852	96,9784
	$\Delta\%$	0,1021	0,0824	0,0719	0,0492	0,0352

**Tabla 7:** Primeros coeficientes de frecuencia de una viga rotante de dos tramos, con  $l_1 = l_2 = 0.5$ , de sección rectangular con  $e = cte.$  y variación parabólica de altura definida por  $h_A / L = 1/5$ ;  $h_{B1} / h_{A1} = 1/2$ ;  $h_{B2} / h_{A2} = 1/2$ ;  $h'_{B1} = 0$ ;  $h'_{B2} = 0$ .  $R = 0,2$ . Figura 6.

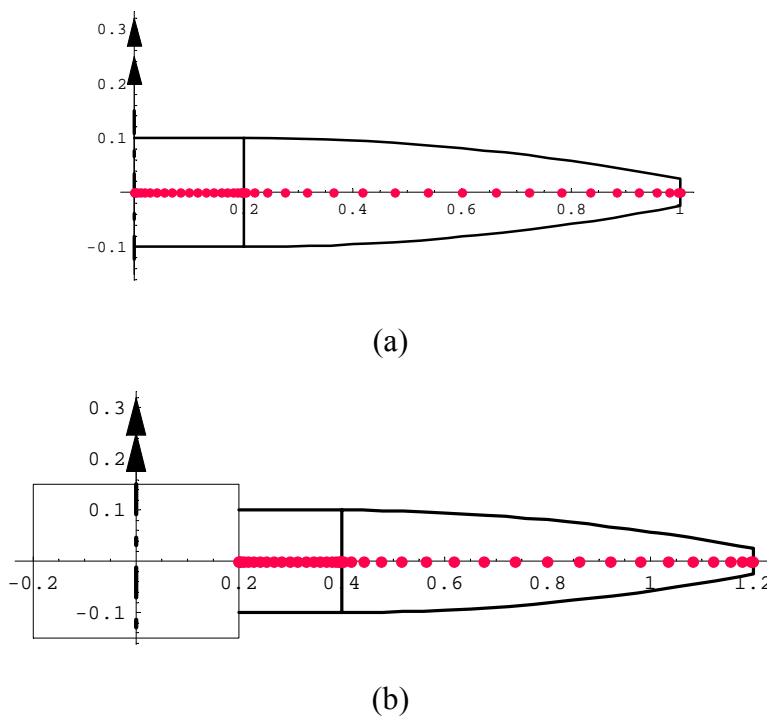


Figura 7: viga rotante de dos tramos de distinta longitud y distinta variación de la sección transversal

La Tablas 8 y 9 presentan los coeficientes para una viga de dos tramos diferentes sin considerar, Figura 7a, y considerando la dimensión del eje de rotación ( $R = 0.2$ ) Figura 7b.

$$\Omega_i = \omega_i \sqrt{\rho A_1(0)L^4 / EI_1(0)} \quad ; (s_i = 17, 32)$$

$\eta$		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
<b>0</b>	MCD	4,4980	18,8895	40,5171	66,6373	95,5202
	MEF	4,4980	18,8895	40,5170	66,6375	95,5204
	$\Delta\%$	0,0000	0,0000	0,0002	0,0003	0,0002
<b>1</b>	MCD	4,6254	19,0144	40,6548	66,7954	95,7024
	MEF	4,6266	19,0153	40,6555	66,7962	95,7031
	$\Delta\%$	0,0257	0,0047	0,0017	0,0012	0,0007
<b>5</b>	MCD	6,9722	21,8019	43,8242	70,4691	99,9516
	MEF	6,9910	21,8206	43,8408	70,4834	99,9636
	$\Delta\%$	0,2683	0,0857	0,0379	0,0203	0,0120
<b>10</b>	MCD	11,3625	28,8204	52,4525	80,7438	111,969
	MEF	11,4049	28,8774	52,5100	80,7962	112,015
	$\Delta\%$	0,3718	0,1974	0,1095	0,0649	0,0411

**Tabla 8:** Primeros coeficientes de frecuencia de una viga rotante de dos tramos, con  $l_1 = 0.2$ ;  $l_2 = 0.8$ ; sección rectangular con  $e = cte.$ ; variaciones de altura definida por:  $h_{A1}/L = 1/5$ ;  $h_{B1}/h_{A1} = 1$ ;  $h_{B2}/h_{A2} = 1/4$ ;  $h'_{A2} = 0$ .  $R = 0$ . Figura 7.a.

$$\Omega_i = \omega_i \sqrt{\rho A_1(0)L^4 / EI_1(0)} \quad ; (s_i = 17, 32)$$

$\eta$		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
<b>0</b>	MCD	4,4980	18,8895	40,5171	66,6373	95,5202
	MEF	4,4980	18,8895	40,5171	66,6375	95,5204
	$\Delta\%$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0002
<b>1</b>	MCD	4,6616	19,0494	40,6956	66,8441	95,7598
	MEF	4,6627	19,0503	40,6963	66,8449	95,7606
	$\Delta\%$	0,0253	0,0047	0,0017	0,0012	0,0008
<b>5</b>	MCD	7,5389	22,5508	44,7503	71,5970	101,2930
	MEF	7,5562	22,5689	44,7666	71,6112	101,3050
	$\Delta\%$	0,2287	0,0802	0,0364	0,0198	0,0118
<b>10</b>	MCD	12,7033	31,0250	55,4230	84,4805	116,4710
	MEF	12,7412	31,0783	55,4782	84,5316	116,5170
	$\Delta\%$	0,2975	0,1715	0,0995	0,0605	0,0395

**Tabla 9:** Primeros coeficientes de frecuencia de una viga rotante de dos tramos, con  $l_1 = 0.2$ ;  $l_2 = 0.8$ ; sección rectangular con  $e = cte.$ ; variaciones de altura definida por:  $h_{A1}/L = 1/5$ ;  $h_{B1}/h_{A1} = 1$ ;  $h_{B2}/h_{A2} = 1/4$ ;  $h'_{A2} = 0$ .  $R = 0$ . Figura 7.b.

La Tabla 10 presenta los primeros coeficientes de frecuencia para una viga de dos tramos de igual longitud, con variación continua de la sección transversal, en la que se desprecia el radio del eje de rotación, como se indica en el esquema de la Figura 8. La altura del tramo más cercano al eje de rotación varía linealmente y la del segundo tramo tiene variación cuadrática y pendiente nula en el extremo libre.

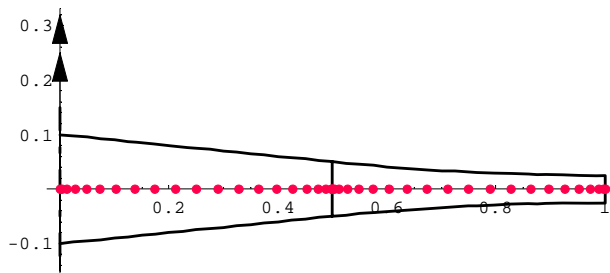


Figura 8: viga rotante de dos tramos con variación lineal-parabólica de la sección transversal

$\Omega_i = \omega_i \sqrt{\rho A_1(0) L^4 / EI_1(0)} ; (s_1 = 17,32)$						
$\eta$		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
<b>0</b>	MCD	3,8316	12,3576	27,8166	48,2226	72,3862
	MEF	3,8316	12,3576	27,8166	48,2226	72,3862
	$\Delta\%$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b>1</b>	MCD	4,0213	12,5678	28,0248	48,4372	72,6127
	MEF	4,0218	12,5684	28,0253	48,4377	72,6132
	$\Delta\%$	0,0127	0,0048	0,0018	0,0010	0,0007
<b>5</b>	MCD	6,9711	16,8015	32,6071	53,3120	77,8360
	MEF	6,9785	16,8131	32,6193	53,3237	77,8467
	$\Delta\%$	0,1065	0,0690	0,0374	0,0219	0,0137
<b>10</b>	MCD	11,6703	25,5289	43,7752	66,1182	92,1160
	MEF	11,6887	25,5573	43,8115	66,1570	92,1538
	$\Delta\%$	0,1574	0,1111	0,0829	0,0586	0,0410

**Tabla 10:** Primeros coeficientes de frecuencia de una viga rotante de dos tramos con  $l_1 = 0.5$ ;  $l_2 = 0.5$ , de sección rectangular con  $e = cte.$  y variación lineal-parabólica de alturas definidas por  $h_{A1}/L = 1/5$ ;  $h_{B1}/h_{A1} = 1/2$ ;  $h_{B2}/h_{A2} = 1/2$ ;  $h'_{B2} = 0$ ;  $R = 0$ . Figura 8.

El modelo de la Figura 9 difiere del anterior en que la pendiente del perfil longitudinal de la viga es nula al comienzo del segundo tramo. Los valores de frecuencia del modelo de la Figura 9 se presentan en la Tabla 11.



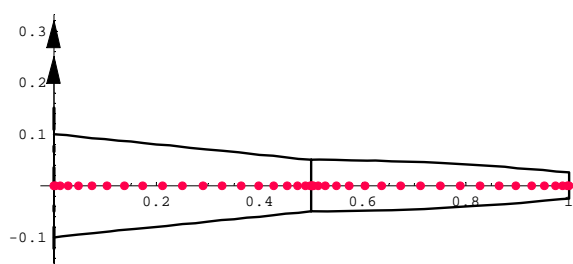


Figura 9: viga rotante de dos tramos con variación lineal-parabólica de la sección transversal

$$\Omega_i = \omega_i \sqrt{\rho A_1(0) L^4 / EI_1(0)} \quad ; (s_1 = 17,32)$$

$\eta$		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
<b>0</b>	MCD	3,6057	14,1550	32,0017	54,3896	80,2351
	MEF	3,6057	14,1550	32,0017	54,3896	80,2351
	$\Delta\%$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b>1</b>	MCD	3,7935	14,3430	32,1901	54,5944	80,4574
	MEF	3,7942	14,3438	32,1906	54,5949	80,4578
	$\Delta\%$	0,0177	0,0056	0,0016	0,0009	0,0005
<b>5</b>	MCD	6,7395	18,2774	36,3934	59,2761	85,5955
	MEF	6,7481	18,2922	36,4063	59,2882	85,6064
	$\Delta\%$	0,1280	0,0809	0,0354	0,0204	0,0127
<b>10</b>	MCD	11,4565	26,9461	46,9844	71,7783	99,7483
	MEF	11,4756	26,9852	47,0246	71,8199	99,7876
	$\Delta\%$	0,1664	0,1449	0,0855	0,0579	0,0394

**Tabla 11:** Primeros coeficientes de frecuencia de una viga rotante de dos tramos con  $l_1 = 0.5$ ;  $l_2 = 0.5$ , de sección rectangular con  $e = cte.$  y variación lineal-parabólica de alturas definidas por  $h_{A1}/L = 1/5$ ;  $h_{B1}/h_{A1} = 1/2$ ;  $h_{B2}/h_{A2} = 1/2$ ;  $h'_{A2} = 0$ ;  $R = 0$ . Figura 9.

## 5 CONCLUSIONES

El método de cuadratura diferencial, aplicable a la resolución de ecuaciones diferenciales como las que gobiernan el problema resuelto, presenta una muy buena opción para hacer un análisis dinámico de vigas rotantes para aplicaciones de control y optimización, donde son útiles modelos de resolución rápida. Los tiempos de carga de datos son extremadamente breves y es muy corto también el tiempo que insume el cálculo de las frecuencias.

La versatilidad del desarrollo presentado permite tratar vigas rotantes con variación continua de la sección por tramos, e incluir las dimensiones del eje rotante en caso de ser requerido. La variación continua de cada tramo puede ser lineal o cuadrática, pudiendo fácilmente implementarse otras formas de variación continua.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se desarrolló en el Departamento de Ingeniería bajo el auspicio de la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

## REFERENCIAS

- Attarnejad, R., Jandaghi Semmani, S., Shahba, A. Basic displacements functions for free vibration analysis of non-prismatic Timoshenko beams. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46: 916-929. 2010
- Auciello, N.M. and Ercolano, A., A general solution for dynamic response of axially loaded non-uniform Timoshenko beams. *International Journal of Solids and Structures*, 41: 4861-4874. 2004.
- Banerjee, J.R.. Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, 233: 857-875. 2000
- Banerjee J. R. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 247:97-115. 2001.
- Banerjee, J.R., H. Su and Jackson, D.R., Free vibration of rotating tapered beams using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, 298: 1034-1054. 2006.
- Bambill, D. V., Felix, D.H. Rossi, R.E. Vibration analysis of rotating Timoshenko beams by means of the differential quadrature method. *Journal of Structural Engineering and Mechanics*, 34, (2) 231-245, 2010.
- Bellman R. and Casti. J. Differential quadrature and long-term integration. *J. Math. Anal. App*, 34, 235-238. 1971.
- Bert C. W. and Malik. M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Review* 49;1-28. 1996.
- Choi, S. T. Wu J. D. and Chou Y. T. Dynamic analysis of a spinning Timoshenko beam by the differential quadrature method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics* 38:51-856. 2000 .
- Dumitru I Caruntu, Dynamic modal characteristics of transverse vibrations of cantilevers of parabolic thickness, *Mechanics Research Communications* 36 391-404. 2009.
- Felix, D. H., Rossi, R. E, Bambill, D. V., Vibraciones transversales por el método de cuadratura diferencial de una viga Timoshenko rotante, escalonada y elásticamente vinculada”, *Mecánica Computacional XXVII*:1957-1973. 2008.
- Felix, D. H., Bambill, D. V., Rossi, R. E, Análisis de vibración libre de una viga Timoshenko escalonada, centrífugamente rigidizada, mediante el método de cuadratura diferencial, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 25:2, en prensa, 2009.
- Felix, D. H., Rossi, R. E, Bambill, D.V., Vibración transversal de vigas Timoshenko rotantes de sección transversal variable por el método de cuadratura diferencial, *Mecánica Computacional XXVIII*: 467-484, 2009
- Jagadish Babu Gunda, Ranjan Ganguli, New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beam, *International Journal of Mechanical Sciences* 50 578-588. 2008.
- Karami, G. Malekzadeh P., Shahpari S. A. A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions. *Engineering Structures* 25:1169-1178. 2003.

- Liu G. R. and Wu T. Y. Vibration analysis of beams using the generalized differential quadrature rule and domain decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 246: 461-481. 2001.
- Lin S. C. and Hsiao K. M.. Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 240:303-322. 2001.
- Rossi, R. E. Gutiérrez R. H. and Laura P. A. A.. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Acoustical Soc. Am.*, 89:2456-2458. 1991.
- Rossi R. E. *Introducción al análisis de Vibraciones con el Método de Elementos Finitos*. Edit. EdiUNS, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina. 238 pp. ISBN 978-987-1171-71-2. 2007.
- Seon, M. H., Benaroya H. y Wei T.. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225: 35-988. 1999.
- Sinha. S. K. Non-Linear dynamic response of a rotating radial Timoshenko beam with periodic pulse loading at the free end. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40: 113-149. 2005.
- Wang, G. y Wereley, N.M., Free vibration analysis of rotating blades with uniform tapers. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 42 (12): 2429-2437. 2004.