

ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS DE ALTA REGULARIDADE NA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES E PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS SÓLIDOS ELÁSTICOS

Oscar A. Garcia^a, Rodrigo Rossi^b e Paulo R. Linzmaier^a

^a*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Caxias do Sul, Rua Francisco Getúlio Vargas, 1130, Caxias do Sul, RS, 95070-560.*

^b*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite, 425, Porto Alegre, RS, 90050-170.*

Palavras Chave: Frequências naturais, Propagação de ondas, MEFG.

Resumo. Uma das limitações dos espaços de aproximação de baixa regularidade construídos utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF) é a precisão na determinação de modos e frequências naturais elevadas. Geralmente o número de frequências naturais obtidas com precisão pelo MEF corresponde a um percentual pequeno da totalidade de modos e frequências naturais que podem ser aproximados pelo modelo numérico. Esta limitação fica mais acentuada quando são utilizados elementos de alta ordem e baixa regularidade. Em problemas de propagação excitados por forças impulsivas a descrição do fenômeno de propagação de uma onda mecânica em meio sólido elástico depende da precisão com que podem ser representados os modos excitados pela força impulsiva. Neste sentido, quanto maior for o número de modos que podem ser precisamente representados, melhor será a representação da onda propagada. Neste artigo é apresentada uma alternativa para abordar o problema de vibrações livres e propagação de ondas em meios sólidos elásticos, pelo Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) utilizando espaços de aproximação de alta regularidade. No trabalho é explorada a potencialidade da versão “p” do método onde o espaço de aproximação será construído pelo enriquecimento explícito de partições de unidade de alta regularidade obtidas a partir de polinômios racionais. O estudo de caso é feito considerando uma barra de material com comportamento elástico linear a qual está sujeita as forças impulsivas. A solução dinâmica será obtida pelo método de superposição modal associado a método implícito de integração direta no tempo de Newmark.

1 INTRODUÇÃO

Dentre as primeiras propostas para abordar problemas de modos e frequências naturais, utilizando métodos sem malha, estão os trabalhos de (Lu, Belytschko e Tabbara, 1994) que utilizaram o Element Free Galerkin method, EFGM, na aproximação do campo de velocidades de uma barra com comportamento elástico e elastoplástico. (Liu et al., 2005), com o Reproducing Kernel Particle Method, RKPM, mostram uma redução de tempo significativo, com relação ao Método de Elementos Finitos (MEF), na determinação de frequências naturais de baixa ordem em problemas uni e bidimensionais elásticos, elasto-plásticos. Em Liew et al., (2002) é utilizado o Reproducing Kernel Particle Method (RKPM), na forma híbrida, para abordar problemas de frequências naturais em cilindros rotativos. Liu (2003), utiliza o Moving Least Square (MLS) para aproximar problemas de deflexões e vibrações livres em placas finas com formas complexas. Outros trabalhos não menos relevantes são os de (Ferreira et al., 2005), onde os autores utilizam o Multiquadrics Method na análise de frequências naturais em cascas rasas de dupla curvatura. Nos trabalhos supracitados os autores mostram o potencial do método na abordagem deste tipo de problema, entretanto não houve a preocupação em explorar o efeito da regularidade destes espaços na determinação do número de modos e frequências naturais que podem ser aproximados numericamente com precisão aceitável.

A possibilidade de se obter uma percentagem elevada dos autovalores aproximados numericamente com precisão aceitável ainda é um tema de pesquisa em aberto onde devem surgir inúmeras propostas para sua abordagem.

Um dos fatores de maior incidência na baixa eficiência na aproximação numérica de problemas elípticos de autovalores está diretamente relacionado à baixa regularidade e a alta ordem dos espaços de aproximação. Este fato pode ser constatado pela estimativa em norma euclidiana do erro nos autovalores para a versão “h” do MEF (ver: Hughes, 1987 e Givoli, 2008). Nestes trabalhos os autores mostram que o erro, nos autovalores, aumenta de forma exponencial com o incremento da ordem polinomial e diminuem da mesma forma com o aumento da regularidade do espaço de interpolação.

Atualmente pesquisas envolvendo a construção de espaços de aproximação de alta regularidade baseadas em metodologias de análise isogeométrica como pode ser visto nos trabalhos de (Cottrel et al., 2007a-b), mostram resultados mais precisos do que os obtidos pelo MEF na determinação dos modos e frequências além da metade dos valores aproximados numericamente para o espectro de frequências.

O *k*-method, proposto pelos autores supracitados utilizam a análise isogeométrica para construir espaços de aproximação de alta ordem e com regularidade desejada. Os resultados obtidos com esta metodologia mostraram resultados mais precisos que o MEF na análise de frequências naturais de uma barra elástica vinculadas nas extremidades. As curvas para valores normalizados de frequência natural são suaves e a precisão aumenta à medida que é aumentada a ordem polinomial do espaço de aproximação (ver: Cottrel et al., 2007b). Por outro lado quando é utilizado o MEF com elementos de alta ordem corre uma perda significativa de precisão na curva supracitada que é denotada por um salto no diagrama definindo os chamados ramos acústicos e óticos do espectro. Esta metodologia, promissora sem dúvida, mostra seu surpreendente potencial na abordagem de problemas suaves, contudo, apesar de se ter uma representação muito mais precisa da geometria, acredita-se que deva apresentar um custo computacional elevado por conta da integração numérica de funções muito regulares. Por outro lado não se tem a versatilidade dos métodos sem malha de inclusão de modos conhecidos da solução em problemas de localização e nem a possibilidade de

enriquecimento anisotrópico da solução já que o espaço de aproximação do campo é o mesmo que o espaço utilizado para representar a geometria.

Por outro lado o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), com os espaços de aproximação construídos conforme (Duarte et al., 2000), apresentam alguns inconvenientes para abordar o problema geral autovalores. Estas dificuldades provém da sistemática utilizada para construir as funções de aproximação que gera modos linearmente dependentes resultando numa matriz de rigidez e de massa positiva semi-definida originando autovalores nulos. A presença de autovalores nulos denota a existência de modos associados a deslocamentos de corpo rígido que não devem surgir, por exemplo, em componentes estruturais estaticamente determinados.

Neste artigo os autores utilizam o MEFG com espaços de alta regularidade e alta ordem na abordagem de problemas de vibrações livres e propagação de ondas mecânicas produzidas por forças impulsivas em barras elásticas. O espaço de aproximação do campo de deslocamento é obtido por enriquecimento explícito, com bases polinomiais, de partições de unidade com regularidade $C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$, obtidas a partir de polinomiais racionais.

2 ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO SEGUNDO O MEFG

O Método dos Elementos Finitos Generalizados é derivado das metodologias que constroem o espaço de aproximação por enriquecimento explícito da partição da unidade. Esta metodologia foi desenvolvida simultaneamente por (Melenk e Babuska, 1996), com o Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM) e por (Duarte e Oden, 1996), com o hp-Clouds. O elo entre as metodologias supracitadas foi apresentado no trabalho de (Oden, Duarte e Zienkiewicz, 1998) e se consolida com o trabalho de (Duarte, Babuska e Oden, 2000).

O procedimento de enriquecimento nodal consiste, essencialmente, na multiplicação da partição de unidade (PU), vinculada a uma partição de elementos, por funções de aproximação associadas aos nós ativos, isto é, nós seletivamente escolhidos para serem enriquecidos entre aqueles que definem a malha. As funções de enriquecimento são definidas num domínio paramétrico Σ vinculado ao domínio físico através de uma função vetorial de mapeamento $\mathbf{X}(s)$, ver **Figura 1** e para maiores detalhes consultar: Garcia e Proença, (2007). No MEFG o espaço de aproximação global constitui-se de todas as combinações lineares possíveis de um espaço de dimensão finita gerado pelo produto entre as funções $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ que definem uma partição da unidade e pelas funções que geram o espaço de aproximação local (\mathcal{Q}_α^p) . A seguir são apresentadas as definições que serão utilizadas para mostrar a metodologia de construção do espaço de aproximação global.

2.1 Partição de unidade (PU) do tipo Lipschitz

Definição: Seja $\Sigma \subset R^n$ um conjunto aberto, seja ainda $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ uma cobertura aberta de Σ que satisfaz a seguinte condição de cobertura:

$$\exists M \in N \quad \forall x \in \Sigma \quad \text{card}\{\alpha / x \in \omega_\alpha\} \leq M \quad (1)$$

Diz-se que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ é uma PU do tipo Lipschitz subordinada à cobertura aberta $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ se satisfazer às propriedades:

$$\text{supp}(\varphi_\alpha) \subset \bar{\omega}_\alpha \forall \alpha, \tag{2}$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha = 1 \quad \forall x \in \Sigma, \tag{3}$$

$$\|\varphi_\alpha\|_{L^\infty(R^n)} \leq C_\infty \text{ e} \tag{4}$$

$$\|\nabla \varphi_\alpha\|_{L^\infty(R^n)} \leq \frac{C_G}{\text{diam}(\omega_\alpha)}. \tag{5}$$

Nas Eqs.(1)-(5), M é o número de funções da PU que cobrem um ponto $x \in \omega_\alpha$ e N é o conjunto dos naturais. As constantes C_∞ e C_G independem de φ_α . A partição de unidade $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ é dita com regularidade $m \in N$ se $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^n \subset C^m(R^n)$.

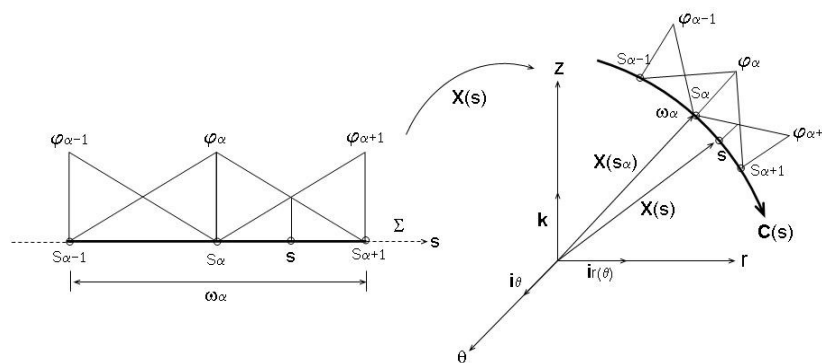


Figura 1: a) PU sobre a cobertura aberta $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, b) PU definida sobre o domínio físico do problema.

Na **Figura 1**, apresenta-se um exemplo de partição da unidade subordinada a cobertura $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ de forma que $\Sigma \subset \cup \bar{\omega}_\alpha$. A partição de unidade da figura é de regularidade $m = 0$, portanto, $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^n \in C_0^0(\Sigma)$.

Definição (*Espaço de Aproximação Local, \mathcal{Q}_α^p*): O espaço de aproximação local de ordem “ p ” associado à partição da unidade “ α ” é definido como,

$$\mathcal{Q}_\alpha^p = \text{span} \left[\{\rho_{k\alpha}\}_{k=1}^p \right]. \tag{6}$$

sendo $\rho_{k\alpha}$ polinômios de grau “ k ” definidos no sistema de coordenadas com origem no α -ésimo nó ativo da malha. Os espaços locais \mathcal{Q}_α^p são construídos usando bases polinomiais, devido à boa capacidade de aproximação e a facilidade de aplicação a uma ampla variedade de problemas.

Definição (*Espaço de Elementos Finitos Generalizados, \mathcal{F}_n^p*): Seja $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ uma partição da unidade subordinada à cobertura aberta $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, define-se o espaço de aproximação global de ordem “ p ” como sendo,

$$\mathcal{F}_n^p = span \left[\left\{ \varphi_\alpha \varrho_\alpha^p \right\}_{\alpha=1}^n \right]. \tag{7}$$

Na Figura 2 apresenta-se um exemplo de espaço local gerado a partir de uma partição da unidade formada por funções lineares. Para este exemplo, toma-se $\rho_2 = \{1, \bar{s}, \bar{s}^2\}$ com espaço de aproximação local dado por $\varrho_\alpha^2 = span \left[\{1, \bar{s}, \bar{s}^2\} \right]$. As Fig. 2b e 2c mostram as funções ψ_2^α e ψ_3^α que geram o espaço do MEFG dado por

$$\mathcal{F}_\alpha^2 = span \{ \psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, \psi_3^\alpha \} = span \{ \varphi_\alpha, \varphi_\alpha \bar{s}, \varphi_\alpha \bar{s}^2 \}. \tag{8}$$

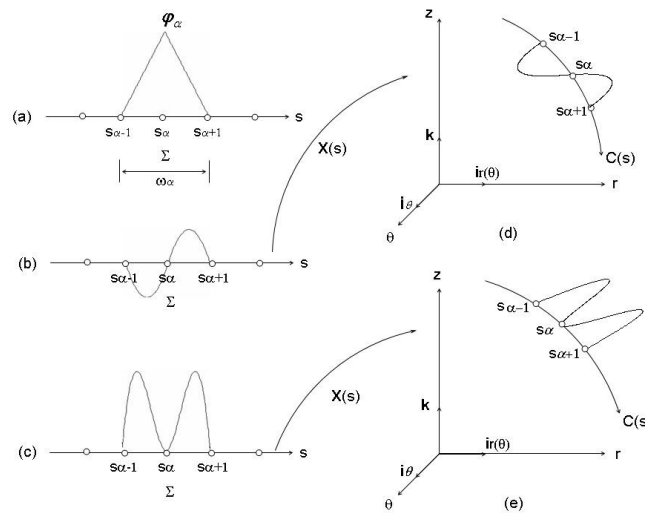


Figura 2: a) PU linear; b) $\psi_2^\alpha = \varphi_\alpha \bar{s}$; c) $\psi_3^\alpha = \varphi_\alpha \bar{s}^2$; d) Mapeamento da função ψ_2^α no domínio físico; e) Mapeamento da função ψ_3^α no domínio físico.

As **Figura 2d-e** representam o mapeamento $\mathbf{X} : \Sigma \rightarrow \Omega$ do espaço de elementos finitos generalizados do domínio parametrizado para o domínio real, (Garcia e Proença, 2007).

3 PARTIÇÕES DE UNIDADE COM REGULARIDADE $C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$

As características do espaço \mathcal{F}_n^p são:

- i. $\dim(\mathcal{F}_n^p) < np$; conforme demonstrado em (Duarte et al., 2000);
- ii. A regularidade de uma função $\psi \in \mathcal{F}_n^p$ com $\psi = \varphi \rho$ é igual à menor regularidade das funções φ ou ρ conforme (Duarte e Oden, 1996).

Em “i” os autores mostram que os espaços de elementos finitos generalizados construídos a partir de PU lineares, função tenda, possuem regularidade $C_0^0(\Sigma)$ e a matriz de rigidez é singular. No presente trabalho é apresentado uma alternativa para construir o espaço de aproximação unidimensional sem problemas graves de condicionamento da matriz de rigidez

e com regularidade desejada utilizando obtidos a partir de uma família de funções de polinomiais racionais.

3.1 PU definida a partir de polinômios racionais

As funções da partição de unidade, apresentadas neste trabalho, são funções de Shepard (ver: Duarte e Oden, 1996), construídas a partir de funções peso obtidas por polinomiais racionais com regularidade $C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$. Estas funções são definidas em R , como segue: Seja $W_\alpha : R \rightarrow R$ tal que $W_\alpha \in C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$, com as seguintes propriedades:

$$W_\alpha(\bar{s}) \geq 0, \forall s \in \Sigma, \quad (9)$$

$$W_\alpha(\bar{s}) = W_\alpha(s - s_\alpha), \quad (10)$$

$$W_\alpha(\bar{s}) \in C_0^k, k = 0, 2, 4, \dots, \infty, \quad (11)$$

$$\forall s \in \bar{\Sigma} \rightarrow \text{card}\{\alpha / \bar{s} \in \omega_\alpha\} \leq M \in N^*. \quad (12)$$

Nas Eqs.(9)-(12), $\bar{s} = s - s_\alpha$ e N^* é o conjunto dos naturais sem o zero.

3.2 Funções peso “piecewise” com regularidade $C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$

As funções peso utilizadas neste trabalho para construir as funções da PU são funções obtidas por polinomiais racionais e com valores não nulos em subdomínios ω_α do domínio Σ do problema. Estas funções constituem uma família de funções contínuas por partes definidas no domínio global pela Eq.(13) abaixo.

$$W_\alpha(s) = \begin{cases} 0 & s < s_\alpha - \frac{h_\alpha}{2} \\ \left[1 - \left(\frac{s - s_\alpha}{h_\alpha/2}\right)^m\right]^n & s_\alpha - \frac{h_\alpha}{2} \leq s \leq s_\alpha + \frac{h_\alpha}{2}, n \geq 1, m = 2, 4, \dots \\ 0 & s > s_\alpha + \frac{h_\alpha}{2} \end{cases} \quad (13)$$

Na Eq.(13) $h_\alpha = \dim(\omega_\alpha)$. As famílias das funções peso definidas pela Eq.(13), são uma generalização da função peso utilizada em (Duarte e Oden, 1996). A regularidade da função

$\left[1 - \left(\frac{s - s_\alpha}{h_\alpha/2}\right)^m\right]^n$ para $n \geq 1$ e $m = 2, 4, 6, \dots$, definida no intervalo indicado na Eq.(13), tem

regularidade $C_0^\infty(\Sigma)$, entretanto, quando definida como *piecewise* e tendo que respeitar as restrições impostas pela propriedade de delta de Kronecker, ou seja, $W_\alpha(s_\alpha) = 1$ e

$W_\alpha\left(s_\alpha \pm \frac{h_\alpha}{2}\right) = 0$, estas funções pertencem aos espaços do tipo $C_0^k(\Sigma)$, onde $k = n$, se n for par e $k = n - 1$, se n for ímpar. Quando a PU é obtida a com funções de Shepard (ver: Duarte e

Oden, 1996) $\varphi_\alpha(s)$ construídas a partir das funções peso supracitadas, então, a regularidade da PU é a mesma que as funções peso quando definidas como *piecewise*. As **Figura 3a-b**, mostram no domínio unidimensional, definido no intervalo $[-3,5]$, as funções peso definidas conforma a Eq.(13), com regularidades $C_0^0(\Sigma)$ e $C_0^6(\Sigma)$ respectivamente. Na **Figura 3**, ω_e é o domínio dos elementos que compõem o suporte ω das funções peso.

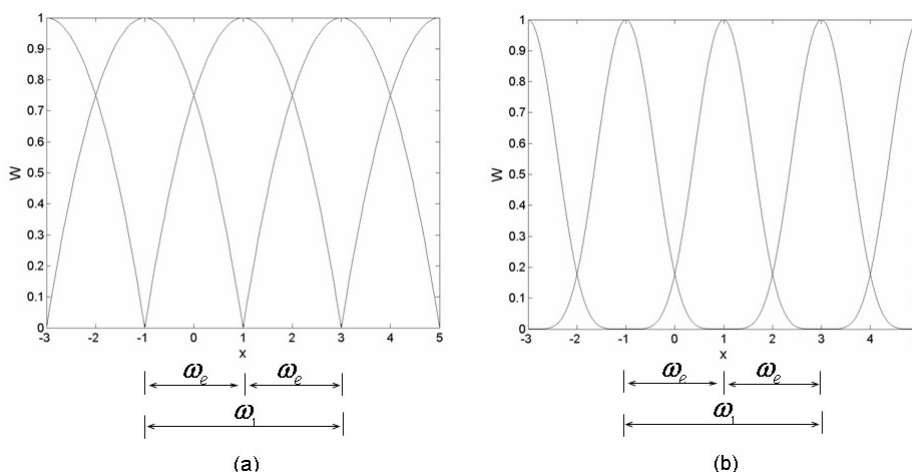


Figura 3: a) Funções peso piecewise, $C_0^0(\Sigma)$; b) Funções peso piecewise, $C_0^6(\Sigma)$.

3.3 Funções da PU definida no domínio natural do elemento

Para o caso específico desta proposta as funções peso são $W_1(\xi)$ e $W_2(\xi)$ são definidas no domínio natural do elemento. Neste caso $M=2$, ou seja, tem no máximo duas funções peso que “cobrem” qualquer ponto no domínio do elemento conforme **Figura 3a-b**. Para as funções peso propostas às propriedades gerais apresentadas nas Eqs.(9)-(12), podem ser resumidas em:

$$W_\beta(\xi) \in C_0^k(\Sigma), \quad k = 0, 2, 4, \dots; \beta = 1, 2, \tag{14}$$

$$W_\beta(\xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in \Omega_e \tag{15}$$

As funções de Shepard associadas ao nó β são:

$$\varphi_\beta(\xi) = \frac{W_\beta(\xi)}{\sum_{\gamma=1}^2 W_\gamma(\xi)}, \tag{16}$$

A partir da Eq.(16), as funções da partição de unidade associadas ao domínio natural do elemento são definidas por:

$$\varphi_1(\xi) = W_1(\xi)_1 / (W_1(\xi) + W_2(\xi)), \tag{17}$$

$$\varphi_2(\xi) = W_2(\xi) / (W_1(\xi) + W_2(\xi)), \quad (18)$$

A forma geral da função peso indicada nas Eqs. (14)-(15) é dada por:

$$W_\beta(\xi) = \left[1 - (1 \pm \xi)^2 / h_\alpha^2 \right]^n, \quad n \in N^*, \beta = 1, 2, \quad (19)$$

Para o caso em que a partição de unidade tem regularidade $C_0^0(\Sigma)$ as funções $W_1(\xi)$ e $W_2(\xi)$ são definidas pelas equações a seguir,

$$W_1(\xi) = 1 - (1 + \xi)^2 / 4, \quad (20)$$

$$W_2(\xi) = 1 - (1 - \xi)^2 / 4, \quad (21)$$

Enquanto que para as funções de partições de unidade com regularidade $C_0^6(\Sigma)$ se tem,

$$W_1(\xi) = \left[1 - (1 + \xi)^2 / 4 \right]^6, \quad (22)$$

$$W_2(\xi) = \left[1 - (1 - \xi)^2 / 4 \right]^6, \quad (23)$$

Nas **Figura 4-Figura 5** são apresentadas no domínio natural do elemento as funções peso definidas pelas Eqs.(20)-(23) e as PU's definidas pelas Eqs.(17)-(18). Na a, nota-se a presença de cúspides das partições de unidade com regularidade $C_0^0(\Sigma)$, indicando que a primeira derivada da função não existe nas fronteiras entre elementos.

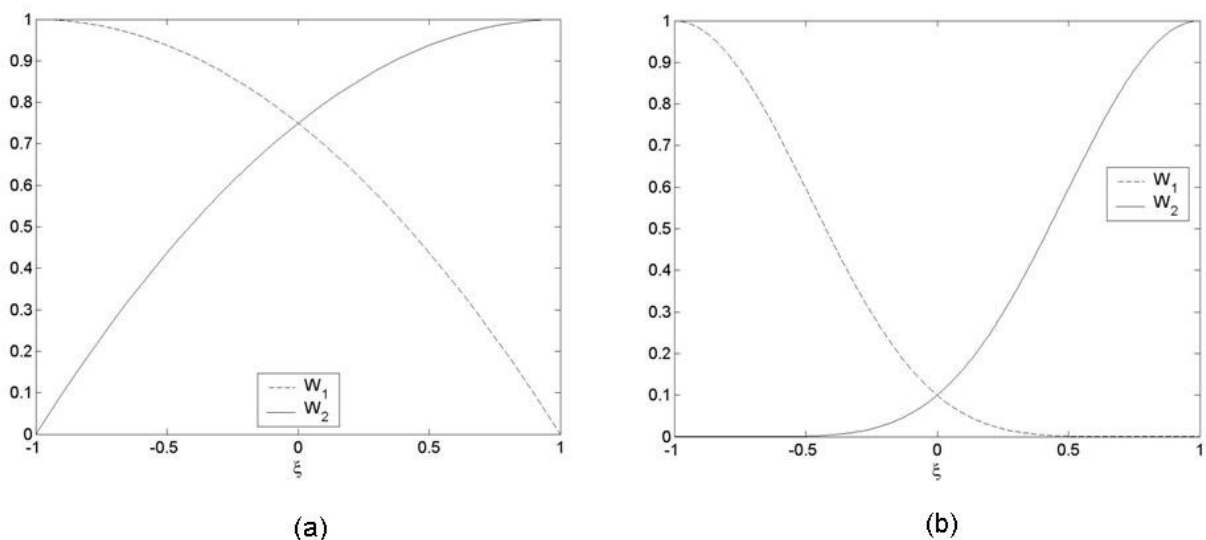


Figura 4: a) Funções W_1 e W_2 com regularidade $C_0^0(\Sigma)$; b) Funções W_1 e W_2 com regularidade $C_0^6(\Sigma)$.

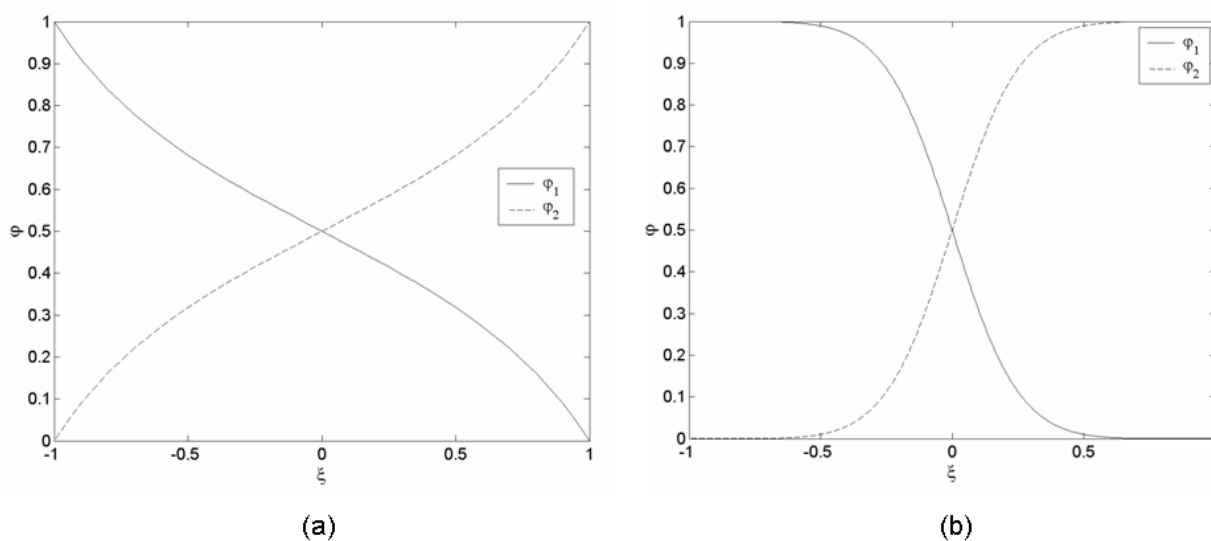


Figura 5: a) PU's com regularidade $C_0^0(\Sigma)$; b) PU's com regularidade $C_0^6(\Sigma)$.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados numéricos serão abordados através de dois estudos de caso: o primeiro consiste na abordagem do problema de vibrações livres em barras de material elástico linear e isotrópico. No segundo estudo de caso é analisado para barra do exemplo anterior o fenômeno de propagação de ondas mecânicas produzidas por uma força impulsiva. Para ambas as situações o objetivo é verificar o desempenho de espaços de aproximação de alta regularidade e alta ordem obtida segundo o MEFG na abordagem dos problemas supracitados. Neste exemplo são comparados os resultados obtidos através de refino “p” para os espaços de aproximação construídos segundo GFEM com aqueles obtidos segundo o FEM de baixa regularidade e com variação da ordem dos elementos.

4.1 Vibrações livres em barras

O problema em questão consiste na captura de frequências naturais em problemas elípticos de autovalores. No problema discretizado obtido pelo FEM como pelo GFEM é utilizada a integração plena da matriz de massa consistente. O exemplo analisado é o de uma barra com condições de contorno propriedades geométricas e mecânicas indicadas na **Figura 6**.

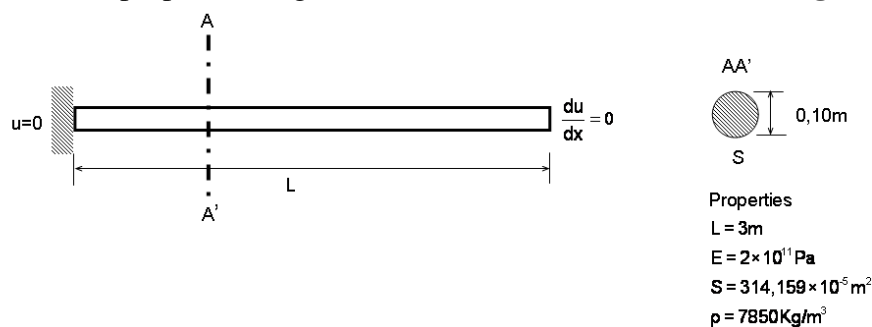


Figura 6: Barra elástica vinculada numa extremidade e livre na outra.

Problema de vibrações livres para a barra

O problema elíptico de autovalores para a barra pode ser expresso como determinar os pares $(\omega_m, u_m(x))$, sendo $u_m(x) \neq 0$ para qualquer valor de $m \in N^*$ que satisfazem o problema de valores no contorno definido pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{\rho}{E} u(x) &= 0, \quad \forall x \in (0, L) \\ \frac{du(x)}{dx} &= 0, \quad x = L \\ u(x) &= 0, \quad x = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

A solução do problema de valor de contorno apresentado na Eq.(24), é dada por um conjunto infinito e contável de pares $(\omega_m, u_m(x))$, $m = 1, 2, \dots, \infty$, de forma que $0 < \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots, < \omega_{i-1}^2 < \omega_i^2 < \omega_{i+1}^2 < \dots$. A solução é tal que

$$\omega_m = \frac{n\pi}{2L\sqrt{\rho/E}}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, 2m-1, \dots; \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty, \tag{25}$$

e

$$u_m(x) = C \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega_m x\right). \tag{26}$$

A formulação fraca para o problema em questão utilizando o método dos resíduos ponderados, Galerkin, é definida como determinar $\tilde{u} \in Kin$ tal que:

$$-\int_0^L E \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \omega^2 \int_0^L \rho \tilde{u} v dx = 0, \quad \forall v \in Var \tag{27}$$

com os conjuntos

$$Kin = \{\tilde{u} \in H^1(\Sigma) / \tilde{u} = \bar{u}, x = 0\} \text{ e} \tag{28}$$

$$Var = \{v \in H^1(\Sigma) / v = 0, x = 0\}. \tag{29}$$

A formulação discretizada resultante da Eq.(27) é dada pela expressão:

$$\int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dx - \omega^2 \int_0^L \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx = 0. \tag{30}$$

Na Eq.(30)

$$\mathbf{N} = [\psi_1^1 \quad \psi_2^1 \quad \psi_3^1 \quad \dots \quad \psi_i^\alpha \quad \dots \quad \psi_p^n]. \tag{31}$$

e

$$\mathbf{B} = \left[\psi_{1,x}^1 \quad \psi_{2,x}^1 \quad \psi_{3,x}^1 \quad \cdots \quad \psi_{i,x}^\alpha \quad \cdots \quad \psi_{p,x}^n \right]. \quad (32)$$

$$\alpha = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, p. \quad (33)$$

Na matriz apresentada na Eq.(31), ψ_i^α representa a função de forma global correspondente de ordem i associada à nuvem. Os resultados a seguir correspondem às estratégias de refino para espaços obtidos segundo o MEF e o MEFG. As curvas apresentadas nas **Figura 7a-b**, correspondem a valores normalizados das freqüências naturais obtidas a partir dos métodos numéricos utilizados com relação à solução analítica indicada na Eq.(25). Estes valores são associados aos valores normalizados da ordem da freqüência analisada com relação a número total de freqüências aproximadas do espectro. As estratégias utilizadas são apresentadas na Tabela 1.

MEFG $C_0^4(\Sigma)$		MEF $C_0^0(\Sigma)$		
p	NGL	Nel.	Elemento	NGL
1	81	81	linear	81
2	122	61	quadrático	122
3	163	54	cúbico	162
4	204	51	Quarta ordem	204

Tabela 1: Estratégias de refino utilizadas

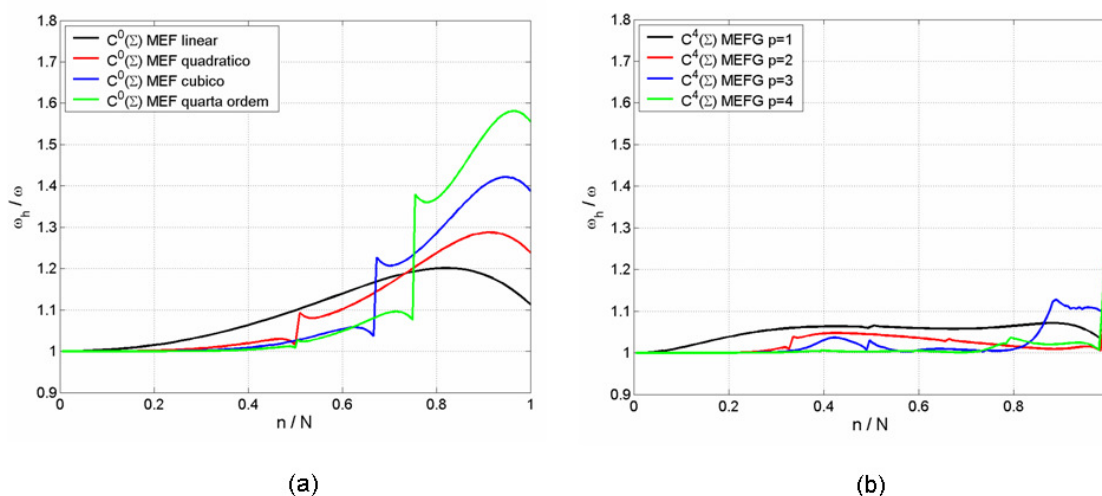


Figura 7: Valores normalizados do espectro de freqüências; (a) resultados da versão “p” do MEF; (b) resultados da versão “p” do MEFG.

Os resultados observados na **Figura 7a** correspondem a espaços de aproximação com regularidade $C_0^0(\Sigma)$ construídos segundo a metodologia do MEF. Neste caso, constata-se um comportamento de baixa precisão, porém, suave para elementos lineares. Entretanto, para elementos de alta ordem, quadráticos, cúbicos e de quarta ordem, ocorre uma perda brusca de precisão a partir de um determinado valor de freqüência denotando o surgimento dos chamados branch’s acústicos e óticos do espectro característicos de espaços de baixa regularidade, e ordem polinomial elevada. Para caso específico do MEF este fenômeno já pode ser evidenciado a partir de elementos quadráticos ficando mais pronunciado à medida que a ordem polinomial aumenta. Estes resultados são previstos pelos estimadores a priori para a versão “h” do MEF (ver: Hughes, 1897 e Dan Givoli, 2008). Os resultados obtidos pela

versão “p” do MEEG (ver: **Figura 7b**), mostram claramente a influência da alta regularidade da solução que neste caso, embora com pequenas oscilações, mostra que ocorre uma melhora significativa da convergência à medida que se aumenta a ordem polinomial do espaço de aproximação.

Embora estes resultados não possam ser analisados a partir da ótica do estimador a priori da versão “h” do MEF, como supracitado, os resultados mostram que existe uma relação entre a regularidade do espaço e a sua ordem para que possa se obter convergência com a versão “p”.

A seguir é apresentado um problema de propagação de ondas numa barra. O fenômeno é produzido por uma força impulsiva, ou seja, a mesma atua num período de tempo inferior ao primeiro período natural da estrutura analisada. Como é sabido, este fenômeno se caracteriza por excitar um número elevado de modos e frequências naturais da estrutura. Neste caso, quanto maior o número de modos que podem ser representados com boa precisão, com relação à solução analítica do problema do problema de vibrações livres (Eq.(25)), maior será o nível de precisão obtida pela solução aproximada para o problema de propagação de ondas mecânicas na barra.

4.2 Propagação de ondas na barra elástica

O fenômeno de propagação para a barra é estudado através da frente de propagação no tempo do campo de deslocamento. O objeto de estudo é uma barra com condições de contorno, propriedades geométricas e mecânicas indicadas na **Figura 8**.

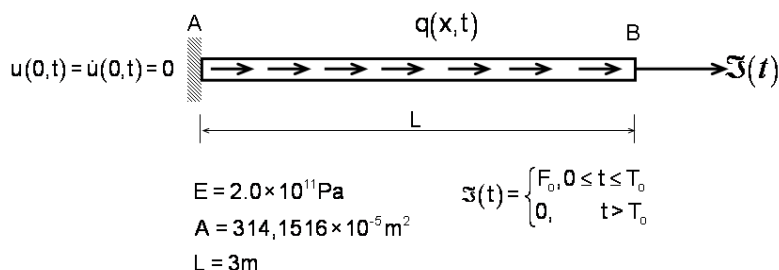


Figura 8: Barra com condições de contorno naturais dependentes do tempo.

Problema de propagação

O problema hiperbólico unidimensional de propagação de ondas mecânicas numa barra é definido pelo seguinte problema de valor de contorno inicial:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q(x,t)}{EA} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \forall x \in (0,L) \times (0,T) \\
 EA \frac{\partial u}{\partial x} &= \zeta(t), \quad x = L \\
 u(x,t) &= 0, \quad x = 0, \quad t \in [0,T] \\
 u(x,0) &= 0, \quad \forall x \in (0,L) \\
 \dot{u}(x,0) &= 0, \quad \forall x \in (0,L)
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Na Eq.(34) $\zeta(t)$ é uma função indicatriz definida por:

$$\mathfrak{S}(t) = \begin{cases} F_o, & 0 \leq t \leq T_o \\ 0, & t > T_o \end{cases} \quad (35)$$

No problema de valores no contorno definido pelo conjunto de equações em Eq.(34), $u(x,t)$ é o campo de deslocamento axial na barra com o tempo, A , E , c e $q(x,t)$ são: a seção da barra, o módulo de elasticidade, a velocidade de propagação da onda e força distribuída no domínio dependente do tempo.

A solução para o problema descrito pela Eq.(34) é dada pela Eq.(36) para um intervalo de tempo maior do que T_o que corresponde ao tempo de aplicação da força externa. A expressão (36) é obtida considerando nula a força distribuída da Eq.(34)a (ver: Clough e Penzien, 2003).

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sin(k_j x) \right) \frac{2F_o \sin(k_j L)}{\mu \omega_j^2 L} \left[\cos(\omega_j(t - T_o)) - \cos(\omega_j t) \right], \quad \forall t > T_o \quad (36)$$

Na Eq.(36), ω_j é a frequência natural de ordem “j”, $k_j = (2j-1)\pi/2L$ e μ é a densidade linear do material que compõe a barra.

A formulação fraca é obtida através do método de resíduos ponderados (Galerkin). O problema agora consiste em determinar $\tilde{u}(x,t) \in Kin_t$, tal que:

$$EA \int_0^L \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{EA}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} v dx = \int_0^L q v dx + \mathfrak{S}(t)v, \quad \forall v \in Var_t \quad (37)$$

Os conjuntos Kin_t e Var_t são definidos por:

$$Kin_t = \{ \tilde{u} \in H^1(\Sigma) / \tilde{u} = 0, x = 0, t \in [0, T] \} \quad (38)$$

$$Var_t = \{ v \in H^1(\Sigma) / v = 0, x = 0, t \in [0, T] \} \quad (39)$$

A formulação semi-discretizada para o problema definido pelas Eqs.(37)-(39) é obtida a partir das expressões:

$$u_h(x,t) = N(x) \mathbf{u}(t) \quad (40)$$

$$v_h(x,t) = N(x) \mathbf{v}(t) \quad (41)$$

Nas Eqs. (40)-(41), $N(x)$ é a matriz de funções de aproximação indicada na Eq.(31), que depende da variável “x” e $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são os vetores de parâmetros de deslocamento dependentes do tempo definidos pelas equações a seguir

$$\mathbf{u}^T(t) = [u_1^1(t) \quad u_2^1(t) \quad \cdots \quad u_i^\alpha(t) \quad \cdots \quad u_p^n(t)] \quad (42)$$

$$\mathbf{v}^T(t) = [v_1^1(t) \quad v_2^1(t) \quad \cdots \quad v_i^\alpha(t) \quad \cdots \quad v_p^n(t)] \quad (43)$$

com

$$\alpha = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, p. \quad (44)$$

A matriz de deformações utilizadas no problema de propagação está indicada na Eq.(32). E a forma semi-discretizada correspondente à Eq.(37), é dada pela Eq.(45), como segue:

$$\int_0^L \mathbf{B}^T E \mathbf{A} \mathbf{B} dx u(t) + \int_0^L \mu \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \ddot{u}(t) = \mathbf{N}^T \mathfrak{S}(t) + \int_0^L \mathbf{N}^T q(t) dx \quad (45)$$

A Eq.(45) pode ser escrita na forma matricial como

$$\mathbf{K} \mathbf{u}(t) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (46)$$

onde

$$\mathbf{K} = \int_0^L \mathbf{B}^T E \mathbf{A} \mathbf{B} dx, \quad (47)$$

$$\mathbf{M} = \int_0^L \mu \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \quad (48)$$

e

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{N}^T \mathfrak{S}(t) + \int_0^L \mathbf{N}^T q(t) dx. \quad (49)$$

Resultados para o problema de propagação

Os resultados numéricos são obtidos para uma barra com propriedades geométricas de mecânicas indicadas na **Figura 8**. O estudo de caso em questão tem por objetivo verificar a eficiência de espaços aproximação de alta ordem e regularidade obtidos segundo a filosofia do MEFG, na representação do fenômeno de propagação de uma onda mecânica produzida por força impulsiva. A força impulsiva é aplicada na extremidade livre da barra e atua durante um intervalo de tempo significativamente menor do que o primeiro período natural da estrutura, excitando um número elevado de modos naturais da estrutura. Os resultados numéricos são obtidos pelo método de superposição modal associado ao método implícito de integração direta de Newmark. Os resultados serão analisados por meio do comportamento das curvas de propagação da onda mecânica e das taxas de convergência para o erro relativo do campo de deslocamento em norma $L^2(\Sigma)$ dado por

$$\|e_u\| = \frac{\|u - u_h\|_{L^2(\Sigma)}}{\|u\|_{L^2(\Sigma)}} \quad (50)$$

Na Eq.(50), $u(x,t)$ é o campo de deslocamento analítico definido na Eq.(36)

Os resultados foram obtidos para $F_o = 10^7 N$, correspondente à função indicatriz definida na Eq.(35). Neste exemplo o tempo de aplicação da força impulsiva é de $T_o = 500\Delta t$, onde $\Delta t = 3,448 \times 10^{-8} s$ é o intervalo de tempo utilizada no processo explícito de Newmark de integração direta no tempo da Eq.(51). Os resultados do erro indicado na Eq.(50), são obtidos por refino “p” homogêneo para o MEFG e com elementos de alta ordem para o MEF

conforme indicado na Tabela 2. Os espaços construídos segundo o MEFG foram obtidos a partir da discretização do domínio com quarenta e uma nuvens e funções de aproximação obtidas pelo enriquecimento de uma PU de regularidade $C_0^4(\Sigma)$ com uma seqüência de bases polinomiais indicadas na Tabela 2. Os resultados apresentados na Tabela 2, e na **Figura 9**, correspondem ao erro indicado na Eq.(50), para o instante $T = 10^4 \Delta t$.

Como resultados complementares são mostradas, nas **Figura 10a-b**, as curvas de comportamento da frente de onda para no instante supracitado correspondentes a solução analítica da Eq.(36) e as soluções numéricas obtidas pelo MEFG e pelo MEF. As soluções numéricas mostradas nas curvas correspondem aos espaços de aproximação de quarta ordem para ambas as metodologias utilizadas.

MEFG			MEF			
p	NGL	$\ e_u\ $	n	Elemento	NGL	$\ e_u\ $
1	81	0,1189	81	linear	81	0,0832
2	122	0,0275	61	quadrático	122	0,0208
3	163	0,0086	54	Cúbico	162	0,0089
4	204	0,0043	51	Quarta ordem	204	0,0070

Tabela 2: Erro relativo de deslocamento em norma $L^2(\Sigma)$

Os resultados indicados na **Figura 9**, mostram um desempenho ligeiramente melhor, com relação à taxa de convergência, bem como da precisão, dos espaços de aproximação obtidos com a versão “p” do MEFG com relação aos espaços de interpolação obtidos a partir dos elementos de alta ordem com o MEF.

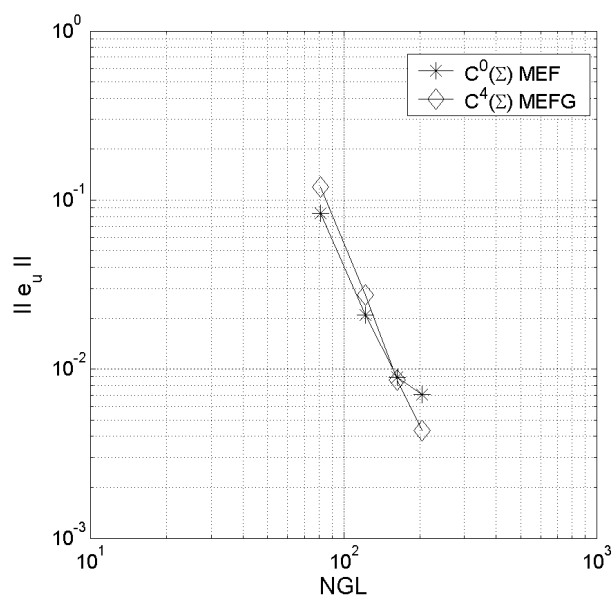


Figura 9: Erro relativo $\|e_u\|$ para o MEFG e o MEF para as estratégias indicadas na Tab.1.

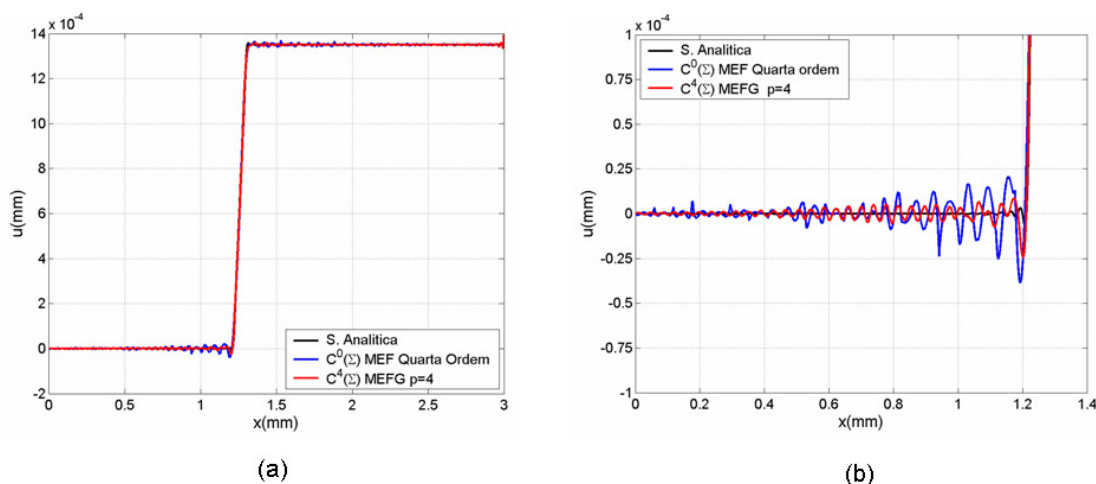


Figura 10: a) Curva de deslocamento no instante $T = 10^4 \Delta t$; b) detalhe da curva de comportamento para as estratégias implementadas.

Neste sentido como o número de frequências naturais que podem ser obtidos com boa precisão pelo MEFG é maior que os órbitos pelo MEF (ver: **Figura 7a**, **Figura 7b**), o número de modos também o será. Da análise da **Figura 7a**, constata-se que os resultados normalizados do espectro de frequências naturais obtidos para o MEF apresentam perda significativa de precisão próximo de oitenta por cento das frequências aproximadas numericamente o que não ocorre nos resultados obtidos pelo MEFG (ver: **Figura 7b**). Neste caso é de se supor que os modos excitados acima de oitenta por cento do total de modos aproximados pelo MEF não sejam precisos produzindo a perda de precisão constatada com relação aos resultados obtidos pelo MEFG.

5 CONCLUSÕES

Os resultados observados no problema de frequências naturais, assim como, no problema de propagação mostram um desempenho melhor dos espaços de aproximação de alta regularidade construídos segundo ao MEFG do que aqueles obtidos com MEF convencional.

Os resultados observados no MEFG similarmente ao k -method (ver: Cottrel et al., 2007b), mostram uma vantagem na abordagem de problemas dinâmicos com relação ao MEF convencional. Neste caso independentemente das metodologias utilizadas (MEFG, k -method), a influência dos espaços de alta regularidade utilizados em ambas as situações produz uma melhora significativa do ponto de vista qualitativo e quantitativo das respostas nos problemas dinâmicos de barras elásticas com relação aos espaços de aproximação com baixa regularidade do MEF. A utilização de espaços de aproximação obtidos a partir de polinomiais racionais apresentou um bom desempenho em problemas unidimensionais no que se refere aos aspectos de convergência, embora, com um custo computacional maior por conta da integração numérica.

REFERÊNCIAS

- Babuska, I. and Melenk, J.M., Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM): Basic theory and applications, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139:289-314, 1996.
- Clough R.W. and Penzien, J., *Dynamic of Structures*, Computer and Structures, third edition, 2003.

- Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Reali, A. and Sangalli, G., Isogeometric discretizations in structural dynamics and wave propagation, ECOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Crete, Greece, 13-16, 2007a.
- Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Reali, A., Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196:4160-4183, 2007b.
- Duarte, C.A. and Oden J. T., An h-p adaptative method using clouds, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139:237-262, 1996.
- Duarte, C.A, Babuska, I. and Oden, J.T., Generalized finite element method for three-dimensional structures mechanics problems, *Computer and Structures*, 77: 215-232, 2000.
- Ferreira, A.J.M., Roque, C.M.C. and Jorge, R.M.N, Natural frequencies of FSDT cross-ply composite shells by multiquadrics, *Composite Structures*, 77:296-305, 2007.
- Liu, G., A mesh-free method for static and free vibration analyses of thin plates of complicated shape, *Journal of Sound and Vibration*, 241:839-855, 2003.
- Garcia, O.A. and Proença, S.P.B., Linear analysis of axis-symmetric plates and shells by Generalized Finite Element Method, *Latin American Journal of Solid and Structures*, 4:121-148, 2007.
- Givoli, D., On the number of reliable finite-element eigenmodes, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24:1967-1977, 2007.
- Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, 1987.
- Liew, K.M., Ng, T.Y., Zhao, X. and Reddy, J.N., Harmonic Reproducing Kernel Particle Method for free vibration analysis of rotating cylindrical shell, *Computer Method and Applied Mechanics in Engineering*, 19:4141-4157, 2002.
- Liu, W.K., Jun, S., Li, S., Adee, J. and Belytschko, T., Reproducing Kernel Particle Method for structural dynamics, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 38:1655-1679, 1995.
- Lu, Y.Y., Belytschko, T. and Tabbara, M., Element-Free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 126:131-153, 1995.
- Oden, J.T., Duarte, C.A., and Zienkiewicz, O.C., A new cloud-based hp finite element method, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 153:117-126, 1998.