

## PROJETO DE ESTRUTURAS EM REGIME NÃO-LINEAR GEOMÉTRICO UTILIZANDO O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Ricardo D. Lahuerta<sup>a</sup>, Pablo A. M. Rojas<sup>b</sup>, Emílio C. Nelli Silva<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos,  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, SP, Brasil*

<sup>b</sup>*Departamento de Engenharia Mecânica, UDESC  
Campus Universitário Avelino Marcante, Joinville, SC, Brasil*

**Palavras-Chaves:** Não-Linearidade Geométrica, Otimização Topológica, Grandes Deslocamentos, Formulação Lagrangiana, Método das Assíntotas Móveis, Método de Elementos Finitos.

**Resumo:** Neste trabalho, o problema do projeto de estruturas submetidas a grandes deslocamento utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT) é investigada. A função "End Compliance" ou "Flexibilidade no Ponto de Aplicação do Carregamento" é utilizada como função objetivo sujeito a restrição de volume no domínio de projeto. A sensibilidade da função objetivo foi obtida através do método adjunto baseado na equação de equilíbrio do sistema. O modelo de material utilizado foi "Solid Isotropic Microstructure with Penalization" (SIMP). O comportamento não-linear geométrico de estruturas é modelado utilizando a formulação Lagrangiana total para o método de elementos finitos e o equilíbrio é encontrado através de uma rotina iterativa de Newton-Raphson. O problema de otimização topológica é resolvido utilizando o método da Assíntotas Móveis (MAM), a função de projeção é utilizada para eliminar o problema de tabuleiro de xadrez e independência de malha e uma abordagem do método da continuação é aplicado para melhorar a convergência dos resultados.

## 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho é referente a dois tópicos distintos, porém relacionados neste trabalho: o Método de Otimização Topológica (MOT) e Análise Não-Linear de Estruturas em Regime Não-Linear Geométrico.

O Método de Otimização Topológica (MOT) é um método computacional capaz de sintetizar estruturas mecânicas através da distribuição de material num domínio de projeto fixo. Para isto utiliza uma combinação entre métodos de otimização (por exemplo o Método das Assíntotas Móveis) e o Método de Elementos Finitos (MEF). Assim, inicialmente uma região do espaço é discretizado em elementos finitos para que se possa analisar seu comportamento mecânico e, então, é distribuído material de forma racionalizada, por meio de algoritmos de otimização (Bendsøe & Sigmund, 2003), utilizando a sensibilidade da função objetivo e restrições de projeto.

Na literatura o MOT tem sido aplicado a diversos problemas, como por exemplo no projeto de estruturas com máxima rigidez (Bendsøe, 1995), projeto de mecanismos flexíveis (Silva, Fonseca, & Kikuchi, 1998) e o projeto de estruturas para absorção de impacto (Pedersen, 2004) entre outras aplicações. Mas somente um pequeno número de trabalhos e artigos têm sido relacionados com a modelagem e otimização topológica de estruturas submetidas a grandes deslocamentos, justamente pela dificuldade da implementação do método de elementos finitos não-linear de forma robusta (BENDSØE 1995, MAUTE 1998, SWAN & KOSAKA 1997, BRUNS & TORTORELLI 1998 e 2002, BUHL & SIGMUND 2000, OHSAKI & NISHIWAKI 2005).

Exemplos de artigos que tratam de otimização topológica com modelo de material não-linear são aqueles descritos por (Bendsøe, 1995), (Maute, Schwarz, & Ramm, 1998) e (Swan & Kosaka, 1997). O número de trabalhos que tratam com a não-linearidade geométrica é um pouco maior. Do nosso conhecimento apenas cinco trabalhos foram publicados (Jog, 1996), (Bruns & Tortorelli, 2001), (Bruns, Sigmund, & Tortorelli, 2002), (Buhl, Pedersen, & Sigmund, 1999), (Gea & Luo, 2001) relacionados com otimização topológica de estruturas com grandes deslocamentos e mais o de Ohsaki e Nishiwaki (Ohsaki & Nishiwaki, 2005) que estudaram o efeito de inversão ou "snap-through" em mecanismos flexíveis utilizando grandes deslocamentos.

Os trabalhos de (Jog, 1996), (Bruns, Sigmund, & Tortorelli, 2002) mencionados acima não demonstraram diferenças significativas na topologia ótima ou valores da função objetivo para estruturas utilizadas para pequenos ou grandes deslocamentos, já os trabalhos publicados por T. Buhl & Sigmund (1999) e Gea & Luo (2001) mostraram resultados muito interessantes que demonstram a verdadeira importância de se considerar o efeito da não-linearidade geométrica na otimização topológica de

estruturas mecânicas onde o efeito de inversão ou "*snap-through*" é importante e deve ser considerado durante a fase de projeto. No entanto, ambas publicações se limitaram a utilizar o método de Newton-Raphson para a solução do MEF não-linear utilizando a formulação do elemento tipo Q4 simplificada (Bathe, 1996).

## 2. RESPOSTA NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE UMA ESTRUTURA

É considerada a condição cinemática de grandes deslocamentos de um sólido no espaço sujeito a um carregamento externo  $p^e$  e em sua superfície  $p^s$  e é assumido que todos os carregamentos e condições de contorno são aplicados simultaneamente. A formulação Lagrangiana é adotada na formulação do problema de não-linearidade geométrica, utilizando a aproximação Lagrangiana Total (implementação numérica).

O equilíbrio de um corpo pode ser expresso utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, que é expresso a partir da seguinte equação (1):

$$\underbrace{\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV}_{\text{Trabalho Interno}} - \underbrace{\int_V p^e \delta u dV + \int_A p^s \delta u^s dA}_{\text{Trabalho Externo}} = 0 \quad (1)$$

onde  $\sigma_{ij}$  refere-se as componentes cartesianas do tensor de tensões do trabalho virtual,  $\delta \varepsilon_{ij}$  refere-se as componentes do tensor de deformação do trabalho virtual correspondente aos deslocamentos virtuais  $\delta u$ ,  $\delta u^s$  refere-se os deslocamentos virtuais avaliados na superfície "s" onde se encontra aplicado o carregamento externo  $p^s$ . A variável  $V$  é referente ao volume do sólido na configuração inicial.

O tensor das deformação virtuais é definido baseado nas coordenadas iniciais do sólido a partir da seguinte equação (2):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

A relação constitutiva entre o tensor das deformações virtuais e o tensor das tensões virtuais (3) é dada por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

onde  $C_{ijkl}$  são os componentes do tensor das constantes elástica do material (Bathe, 1996).

As equações (1)-(3) são as equações básicas para o cálculo da resposta de uma análise não-linear geométrica de uma estrutura. Porém o cálculo do equilíbrio não pode ser resolvido diretamente devido ao alto grau de não-linearidade do sistema. Para resolver o sistema é necessário utilizar métodos de solução não-linear, como por exemplo o método de Newton-Raphson, que será descrito a seguir.

Utilizando o método de elementos finitos para a análise não-linear geométrica, assume-se que os deslocamentos totais do modelo de elementos finitos não são infinitesimais e as propriedades de material tem o comportamento linear elástico, além de considerar que as condições de contorno do problema se mantêm constante durante a aplicação do carregamento externo. Com estes pressupostos, a equação de equilíbrio do modelo de elementos finitos pode ser definida por (4):

$$\{P\}^e - \{F_{int}\} = 0 \quad (4)$$

A equação (4) corresponde ao comportamento não-linear estático de um problema estrutural, onde a resposta do equilíbrio não é uma função linear do carregamento externo aplicado  $\{P\}^e$  em relação ao deslocamento da estrutura  $\{U\}$ . Quando esta relação entre deslocamento e carregamento externo não corresponde a uma relação linear, então para resolver o sistema temos que resolver uma análise não-linear iterativa.

As não-linearidades podem ser causadas por grandes deformações, grandes deslocamentos e rotações. Estas mudanças de configurações podem ser tratadas definindo uma medida de tensão e deformação auxiliar que leve em consideração o movimento de um corpo e defina medidas cinemáticas do seu movimento no espaço. Para isto precisamos definir o gradiente de deformação ( $[F]$ ) (5) que descreve o alongamento e rotações que as fibras do material no espaço:

$$[F] = \{\nabla\}^T \{x\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Mas para compor a matriz jacobiana do gradiente de deformação é necessário as derivadas parciais das funções de forma do elemento Q4 no estado plano das deformações (EPD) em relação as suas respectivas coordenadas locais (Bathe, 1996) e dos seus respectivos deslocamentos nodais  $u_i^k$  (onde  $k$  é referente ao número de nós do elemento e  $i$  referente ao respectivo número do graus de liberdade) conforme (6).

$$\begin{aligned}
 h_{1,1} &= \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 - \eta) & h_{1,2} &= \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi) \\
 h_{2,1} &= \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta) & h_{2,2} &= \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi) \\
 h_{3,1} &= \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta) & h_{3,2} &= \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi) \\
 h_{4,1} &= \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta) & h_{4,2} &= \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi)
 \end{aligned} \tag{6}$$

As variáveis  $\xi$  e  $\eta$  referem-se as componentes das coordenadas locais do elemento isoparamétrico Q4, conforme Figura 1.

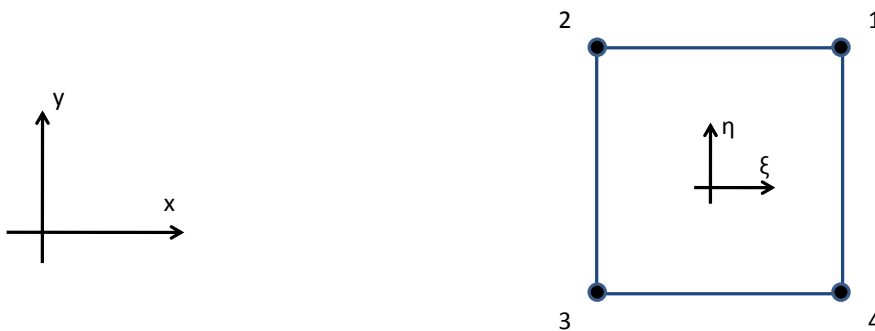


Figura 1 - Configuração do elemento de 4 nos Q4.

Cada termo da matriz jacobiana do gradiente de deformação é composta por uma somatória das derivadas parciais da função de forma do elemento (6) que resulta na seguinte equação para elemento Q4:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^4 h_{k,1} u_i^k \qquad \frac{\partial x_i}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^4 h_{k,2} u_i^k \tag{7}$$

São assumidos grandes deslocamentos, o que significa que os termos de segunda ordem devem ser considerados durante o cálculo das deformações, no entanto, é considerado o comportamento do material linear, ou seja sem alteração nas propriedades físicas do material, como o módulo de elasticidade.

Para o cálculo do equilíbrio a cada iteração do processo de análise não-linear é necessário saber a deformação do elemento, levando em conta o estiramento das fibras e o seu movimento no espaço, para isto, utilizou-se o tensor de deformação de Green-Lagrange que leva em conta estes efeitos, como mostrado a seguir (8):

$$[\epsilon_{ij}] = \frac{1}{2}([F]^T [F] - [I]) \quad (8)$$

O tensor constitutivo homogêneo elástico do EPD (Estado Plano das Deformações) que relaciona tensão e deformação é dado por (9) (BATHE, 1996):

$$[C^e]_{EPD} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Assim, com o tensor das deformações de Green-Lagrange e com o tensor constitutivo homogêneo elástico (13) é possível deduzir o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff baseado na relação constitutiva da equação (3), conforme apresentado a seguir (10):

$$\{s_{ij}\} = \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{12} \end{Bmatrix} = [C^e]\{\epsilon_{gl}\} \quad (10)$$

Para compor a matriz  $[B_L]$ , durante a solução incremental, precisamos da matriz  $[B_{L0}]$  que relaciona os deslocamentos nodais com o campo de deformação no interior do elemento. Essa matriz é composta pelas derivadas parciais das funções de forma do elemento (10) (BATHE, 1996).

$$[B_{L0}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (11)$$

A segunda parcela linear da matriz  $[B_{L1}]$  para a formulação Lagrangiana pode ser escrita da seguinte forma (12):

$$[B_{L1}] = \begin{bmatrix} l_{11} h_{1,1} & l_{21} h_{1,1} & l_{11} h_{2,1} & l_{21} h_{2,1} & \dots \\ l_{12} h_{1,2} & l_{22} h_{1,2} & l_{12} h_{2,2} & l_{22} h_{2,2} & \dots \\ (l_{11} h_{1,2} + l_{12} h_{1,1})(l_{21} h_{1,2} + l_{22} h_{1,1})(l_{11} h_{2,2} + l_{12} h_{2,1})(l_{11} h_{2,2} + l_{12} h_{2,1}) \dots \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{cccc} \cdots & l_{11} h_{3,1} & l_{21} h_{3,1} & l_{11} h_{4,1} & l_{21} h_{4,1} \\ \cdots & l_{12} h_{3,2} & l_{22} h_{3,2} & l_{12} h_{4,2} & l_{22} h_{4,2} \\ \cdots & (l_{11} h_{3,2} + l_{12} h_{3,1}) & (l_{21} h_{3,2} + l_{22} h_{3,1}) & (l_{11} h_{4,2} + l_{12} h_{4,1}) & (l_{21} h_{4,2} + l_{22} h_{4,1}) \end{array} \right\}$$

onde  $N$  é referente ao número de nós do elemento e  $l_{11} = \sum_{k=1}^N h_{k,1} u_1^k$ ,  $l_{22} = \sum_{k=1}^N h_{k,2} u_2^k$ ,  $l_{21} = \sum_{k=1}^N h_{k,1} u_2^k$  e  $l_{12} = \sum_{k=1}^N h_{k,2} u_1^k$ .

Esta parcela da matriz  $[B_{L1}]$  (12) leva em consideração somente os deslocamentos finais da estrutura em sua composição.

A somatória de ambas as parcelas da matriz  $[B]$  linear ( $[B_{L0}]$  e  $[B_{L1}]$ ) geram a matriz  $[B_L]$  linear Lagrangiana (13):

$$[B_L] = [B_{L0}] + [B_{L1}] \tag{13}$$

A partir da matriz  $[B_L]$  e com tensor constitutivo homogêneo elástico é possível integrar em relação ao volume e calcular a matriz rigidez linear  $[K_L]$  (14):

$$[K_L] = \int_{\xi} \int_{\eta} [B_L]^T [C^e] [B_L] d\xi d\eta \tag{14}$$

A parcela não-linear da matriz  $[B]$  ( $[B_{LN}]$ ) não-linear, é composta pelas as derivadas parciais das funções de forma e pode ser escrita da seguinte forma (15):

$$[B_{LN}] = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & h_{2,1} & 0 & h_{3,1} & 0 & h_{4,1} & 0 \\ h_{1,2} & 0 & h_{2,2} & 0 & h_{3,2} & 0 & h_{4,2} & 0 \\ 0 & h_{1,1} & 0 & h_{2,1} & 0 & h_{3,1} & 0 & h_{4,1} \\ 0 & h_{1,2} & 0 & h_{2,2} & 0 & h_{3,2} & 0 & h_{4,2} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Para obter a parcela não-linear da matriz rigidez ( $[K_{LN}]$ ), é necessário integrar seus componentes em relação ao volume da seguinte forma (10):

$$[K_{LN}] = \int_{Vol} [B_{LN}]^T [s_{ij}] [B_{LN}] dV \tag{16}$$

A soma da matriz rigidez linear com a matriz rigidez não-linear gera a matriz rigidez tangente (17):

$$[K_T] = [K_L] + [K_{LN}] \quad (17)$$

O cálculo das forças internas, é o produto da integral no volume da matriz  $[B]$  linear ( $[B_L]$ ) com o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, que é dada por (18):

$$\{F_{int}\} = \int_{Vol} [B_L]^T \{s_{ij}\} dV \quad (18)$$

Com o vetor de forças externas  $\{P\}^e$  e forças interna  $\{F_{int}\}$ , podemos definir a equação de equilíbrio do sistema não-linear (19) e definir o vetor do resíduo  $\{R\}$ . A equação do equilíbrio quando solucionada tem um valor de resíduo próximo de zero. Geralmente é utilizado para o resíduo normalizado um valor próximo de  $10^{-8}$ , o que garante na maioria dos casos consistência nos resultados obtidos.

$$\{P\}^e - \{F_{int}\} = \{R\} \cong 0 \quad (19)$$

Para resolver o sistema não-linear de equações e encontrar as suas respectivas raízes (ver equação (19)), foi utilizado o método de Newton-Raphson que tem como objetivo estimar as raízes de uma função  $f(x)$ . A partir da descrição feita podemos escrever a função do método de Newton-Raphson da seguinte forma (20):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (20)$$

Para o sistema de equações de MEF, baseado na equação (20), definimos a função de solução das raízes pelo método de Newton-Raphson da seguinte forma (21):

$$\{U_{i+1}\} = \{U_i\} + [K_T]_i^{-1} \{R\}_i$$

onde, (21)

$$[K_T]_i^{-1} \{R\}_i = \{\Delta u_i\}$$

Analisando o método de Newton-Raphson o vetor  $\{P\}^e$  representa o vetor das forças externas,  $[K_T]$  é a matriz tangente do elemento (atualizada para cada iteração



$i$ ) e  $\{R\}$  o vetor do resíduo. O vetor do incremento dos deslocamento é representado por  $\{\Delta u_i\}$ .

### 3. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

No Método de Otimização Topológica (MOT), o domínio de projeto é discretizado utilizando uma malha de elementos finitos, e neste trabalho, cada elemento do domínio fixo de projeto pode variar de zero material (não há presença de material) até total presença de material (sólido) podendo assumir densidades intermediárias entre zero material e total presença de material de acordo com um modelo de material definido (Bendsøe & Sigmund, 2003).

A variável de projeto utilizada no modelo de material, é denominada pseudo-densidade ( $\rho_e(x)$ ) e representa as propriedades de um dado material isotrópico (Bendsøe, 1989). Esta aproximação baseada em modelos de materiais artificiais é denominada pela sigla SIMP ("Solid Isotropic Material with Penalization"). Esta aproximação permite relaxar o problema discreto, pois o problema discreto com pseudo-densidade com valores de 0 ou 1 é mal-posto e não apresenta solução única devido aos múltiplos mínimos locais. A relaxação no SIMP (ver equação (22)) permite que a propriedade efetiva do material num determinado ponto do domínio de projeto assumam valores intermediários, através da variação contínua das pseudo-densidades com valores entre 0 e 1. Isso torna o problema bem-posto, possibilitando a solução do problema de otimização no meio contínuo.

$$E(x) = \rho_e^p(x)E_0 \quad (22)$$

A equação (22) define que, a partir da propriedade  $E_0$  (módulo de elasticidade) do material base isotrópico, é possível definir propriedades intermediárias de acordo com o valor da pseudo-densidade  $\rho(x)$  ( $0 \leq \rho(x) \leq 1$ ) e a variável  $p$  refere-se a penalização do material para evitar o problema de escala de cinza. Matematicamente têm-se materiais com propriedades efetivas ( $E(x)$ ) intermediárias, neste caso variando linearmente de 0 até o valor  $E_0$ , constituindo um modelo artificial de material.

A escolha natural da função objetivo para a otimização topológica de estruturas em regime não-linear geométrico é a minimização da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento ou denominada também em inglês de "end-compliance" (Buhl, Pedersen, & Sigmund, 1999), pois esta não necessita de vários incrementos de carga para obter o valor da sua função total, minimizando o custo computacional se for utilizado poucos incrementos.

O cálculo da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento é simples pois requer apenas uma verificação do equilíbrio, no caso a equação de equilíbrio (19).

Definimos a letra "C" para descrever a função de flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento de uma estrutura em sua configuração de equilíbrio, esta função pode ser escrita como (23):

$$f_0(\{\rho_e\}) = C = \{P\}^T \{U\} \quad (23)$$

A restrição utilizada no MOT é a limitação da fração de volume no domínio de projeto. A fração de volume controla a porcentagem de volume de material que se deseja obter ao final da otimização, em relação ao volume total do domínio estendido de projeto inicial.

A definição da restrição de volume utilizada é dada pela equação (23) :

$$\int_{\Omega} \rho_e d\Omega \leq V_{final} \quad (24)$$

$$0 \leq \rho_e \leq 1$$

onde  $\rho_e$  representa a função de valores das pseudo-densidades em cada ponto do domínio  $\Omega$  e  $V_{final}$  o volume final que se deseja atingir na otimização.

A rotina computacional do MOT foi implementada utilizando a rotina de otimização numérica do MAM (método das Assíntotas Móveis) (Svanberg, 1987) para resolver o problema de distribuição ótima de material ao longo do domínio de projeto, para tanto o problema de otimização foi posto da seguinte forma para trabalhar com o MAM (25):

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f_0(\{\rho_e\}) = C = \{P\}^T \{U\} \\ & \{\rho_e\} \\ \text{Sujeito à:} \quad & f_1(\{\rho_e\}) = \frac{v(x)}{v_0} - \bar{v} \leq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

O procedimento do MOT começa especificando o domínio de projeto inicial e as definições das condições de contorno do modelo 2D a ser otimizado. O domínio de projeto é discretizado de forma que os resultados do MOT possam ser interpretados posteriormente e não gerem um custo computacional excessivo da análise MEF não-linear que é realizada a cada iteração da OT (Otimização Topológica).

A rotina de OT calcula o valor da função objetivo em cada iteração e na seqüência é realizada uma análise de sensibilidade da função objetivo com base no cálculo dos gradientes da função baseado nos valores variáveis de projeto na iteração  $i$ . O algoritmo de otimização usa os resultados desta análise de sensibilidade como orientação para recalculer a distribuição de material ao longo do domínio de projeto (dados para o MAM), e atualiza as informações até que uma topologia ótima seja obtida. Na Figura 2, é descrito o procedimento típico MOT adotado neste trabalho.

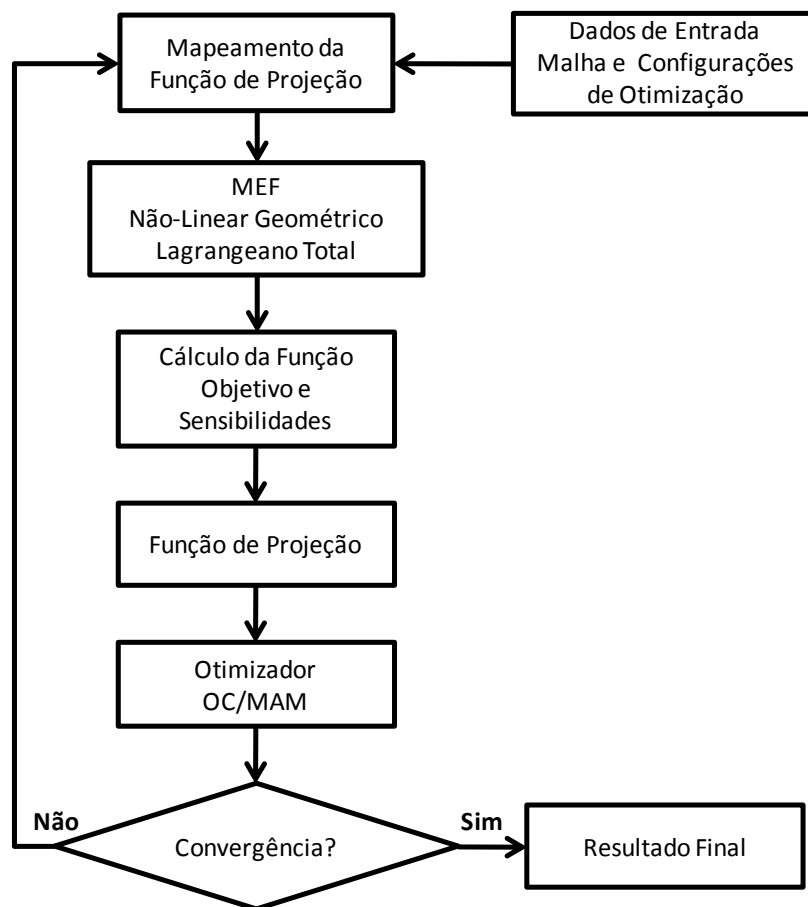


Figura 2 - Fluxograma de implementação da rotina de OT para o regime Não-Linear Geométrico.

A análise de sensibilidade é realizada através do cálculo dos gradientes da função  $C$ , equação (23) em relação às variáveis de projeto  $\rho_e$  utilizando o método adjunto que será descrito no item 4.

A técnica de projeção proposta por Guest et al. (2004) é empregada neste trabalho como técnica de filtragem a fim de evitar a dependência de malha e

problema de tabuleiro de xadrez, freqüentemente encontrados na OT (Bendsøe & Sigmund, 2003).

#### 4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Assumindo que as variáveis de projeto  $\rho_e$  não dependam do carregamento externo, podemos definir a derivada da função objetivo (23) da seguinte forma (26):

$$\frac{df_0}{d\rho_e} = \{P\}^T \frac{d\{U\}}{d\rho_e} \quad (26)$$

Para determinar a sensibilidade do deslocamento em relação a variável de projeto  $\frac{d\{U\}}{d\rho_e}$ , é necessário utilizar o método adjunto. Para isto é necessário introduzir uma variável a mais, um vetor dos multiplicadores de Lagrange  $\{\lambda\}$ . Assumindo que o equilíbrio do sistema já foi determinado (ver equação (19)), temos que  $\{\lambda\}^T \{R\}$  é igual a zero (pois  $\{R\} = 0$ ) e portanto pode ser adicionado junto a função objetivo (23), sem nenhuma mudança (27):

$$f_0(\{\rho\}) = C = \{P\}^T \{U\} + \{\lambda\}^T \{R\} \quad (27)$$

Com a introdução de um vetor dos multiplicadores de Lagrange na função objetivo, temos a nova equação para a sensibilidade (28):

$$\frac{df_0}{d\rho_e} = \{P\}^T \frac{d\{U\}}{d\rho_e} + \{\lambda\}^T \left( \frac{\partial\{R\}}{\partial\{U\}} \frac{d\{U\}}{d\rho_e} + \frac{\partial\{R\}}{\partial\rho_e} \right) \quad (28)$$

onde  $\frac{\partial\{R\}}{\partial\{U\}}$  é igual a matriz de rigidez tangente  $[K_T]$  e é assumido que o vetor do resíduo  $\{R\} = 0$  e o vetor dos multiplicadores de Lagrange  $\{\lambda\}$  pode assumir qualquer valor ( $\{\lambda\} \in R^n$ ). Para eliminar o termo  $\frac{d\{U\}}{d\rho_e}$  da equação (28), o valor de  $\{\lambda\}$  deve ser escolhido respeitando a seguinte equação (29):

$$(\{P\}^T - \{\lambda\}^T) \frac{d\{U\}}{d\rho_e} = 0 \quad (29)$$

o que corresponde a resolver um sistema linear de equações para obter o valor de  $\{\lambda\}$  (30):

$$[K_T] \{\lambda\} = \{P\} \quad (30)$$

Inserindo os valores de  $\{\lambda\}$ , obtidos na equação anterior (30), na equação (29), temos a função da sensibilidade da função objetivo (31):

$$\frac{df_0}{d\rho_e} = \{\lambda\}^T \frac{\partial\{R\}}{\partial\rho_e} \quad (31)$$

Como o vetor do resíduo é igual a zero, mas não a sua derivada parcial em relação as variáveis de projeto  $\frac{\partial\{R\}}{\partial\rho_e}$ , temos que determinar a sua equação para determinar o seu valor, para isto, temos que derivar a função de equilíbrio (19) em relação as variáveis de projeto com a variável de penalização, então primeiramente temos a relação de equilíbrio penalizada (32):

$$\{P\} - \{F_{int}\} = \{P\} - \int_{Vol} [B_L]^T \rho_e^p \{s_{ij}\} dV = \{R\} \cong 0 \quad (32)$$

onde sendo  $\frac{\partial\{P\}}{\partial\rho_e} = 0$  (pois  $\{P\}$  não depende de  $\rho_e$ ), portanto a derivada parcial de  $\frac{\partial\{R\}}{\partial\rho_e}$ , pode ser escrita da seguinte forma (33):

$$\frac{\partial\{R\}}{\partial\rho_e} = - \int_{Vol} [B_L]^T p \rho_e^{p-1} \{s_{ij}\} dV \quad (33)$$

substituindo a equação (33) na equação (31) temos a sensibilidade flexibilidade em relação flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento:

$$\frac{df_0}{d\rho_e} = -\{\lambda\}^T \int_{Vol} [B_L]^T p \rho_e^{p-1} \{s_{ij}\} dV \quad (34)$$

## 5. RESULTADOS

Este item demonstra alguns resultados preliminares da OT implementada, para inicialmente verificar os resultados e comparar com os resultados obtidos por Buhl & Sigmund (1999). O exemplo comparado até o presente momento foi da viga engastada, considerando a formulação dos elementos no EPD (Estado Plano de Deformação), e como função objetivo, a minimização da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento, com diferentes cargas. Utilizou-se como método de solução do sistema não-linear o método de Newton-Raphson.

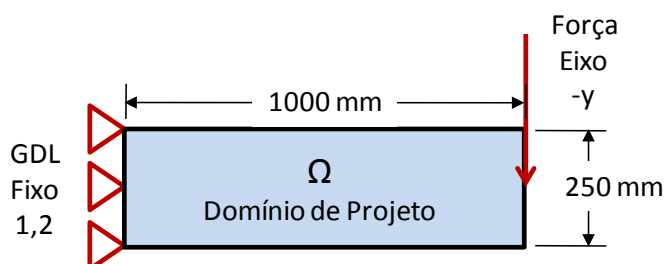


Figura 3 - Domínio fixo de projeto e condições de contorno da viga engastada

Na Figura 3 é apresentada a configuração e condição de contorno da viga engastada utilizada. O modelo de uma viga engastado otimizado, considera linearidade e não-linearidade geométrica e utiliza as seguintes características dimensionais e de material (Buhl, Pedersen, & Sigmund, 1999):

- Espessura: 100,00 milímetros.
- Modulo de Elasticidade ( $E$ ): 3,00 GPa.
- Coeficiente de Poisson: 0,40.
- Número de Elementos no Domínio Fixo de Projeto: 2500 elementos.

Força [kN] Eixo Y	Resultado de topologia ótima para estruturas sujeitas a pequenos deslocamentos	Resultado de topologia ótima para estruturas sujeitas a grandes deslocamentos
6	 $C_{linear} = 0,047kJ$	 $C_{não-linear} = 0,047kJ$
12	 $C_{linear} = 0,169kJ$	 $C_{não-linear} = 0,159kJ$
60	 $C_{linear} = 4,239kJ$	 $C_{não-linear} = 4,226kJ$
96	 $C_{linear} = 10,851kJ$	 $C_{não-linear} = 10,821kJ$

Na Tabela 1 - Comparação dos resultados ótimos obtidos para as análises linear e não-linear geométrica conforme variação do carregamento aplicado.

Na Tabela 1 são apresentados os resultados preliminares da OT em regime não-linear geométrico.

## 6. CONCLUSÕES

Analisando os resultados preliminares mostrados anteriormente na Na Tabela 1, é possível verificar uma não-simetria da topologia ótima obtida para a viga engastada. Isto se deve ao fato de que conforme o aumento do carregamento, a resposta do deslocamento da viga pelo carregamento externo aplicado começa a ficar não-linear, conseqüentemente produzindo valores de sensibilidades diferentes ao da análise linear. Comparando os resultados obtidos, com os resultados da literatura (Buhl, Pedersen, & Sigmund, 1999), os resultados obtidos não ficaram muito próximos, possivelmente por causa de mínimos locais causado pelo filtro utilizado por Buhl & Sigmund (1999) e também pela não correção da variação do volume de cada ponto Gauss, o que interfere diretamente nos valores no campo de tensões do segundo tensor de Piola-Kirchhoff e conseqüentemente interferindo nos valores de rigidez da matriz tangente, na convergência e sensibilidade da OT. Outro aspecto do trabalho de Buhl & Sigmund (1999) é o não relato do tratamento do efeito de flambagem local. O autor diz que alguns elementos sofreram uma deformação excessiva e que estes foram retirados do domínio fixo. Do ponto de vista de OT, este tipo de procedimento não é recomendando, pois deixa o problema descontínuo, já que cada elemento do domínio tem a liberdade de ter ou não a presença de material dependendo da convergência da OT. Estas incoerências relatadas e apresentada na literatura, podem explicar as diferenças de resultados obtidos até o presente momento, tanto de topologia como de valores de "end-compliance" obtidos.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bathe, K. J. (1996). *Finite Elements Procedures*. New Jersey: Prentice Hall.

BATHE, K. J. (1996). *Finite Elements Procedures*. New Jersey: Prentice Hall.

Bendsøe, M. P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, pp. 193–202.

Bendsøe, M. P. (1995). *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*. Berlin: Springer.

- Bendsøe, M. P., & Sigmund, O. (2003). *"Topology Optimization", Theory, Methods and Applications*. Berlin: Springer.
- Bruns, T. E., & Tortorelli, D. (2001). Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , pp. 3443–3459.
- Bruns, T. E., Sigmund, O., & Tortorelli, D. A. (2002). Numerical methods for the topology optimization of structures that exhibit snap-through. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , pp. 1215–1237.
- Buhl, T., Pedersen, C., & Sigmund, O. (03 de Noviembre de 1999). Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. *Structural Multidisciplinary Optimization* , pp. 93-104.
- Gea, H., & Luo, J. (2001). Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities. *Computers & Structures* , pp. 1977–1985.
- Guest, J. K., Prévost, J. H., & Belytschko, T. (2004). Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International Journal For Numerical Methods In Engineering* , pp. 238–254.
- Jog, C. (1996). Distributed-parameter optimization and topology design for nonlinear thermoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , pp. 117-134.
- Maute, K., Schwarz, S., & Ramm, E. (1998). Adaptive topology optimization of elastoplastic structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization* , pp. 81-91.
- Ohsaki, M., & Nishiwaki, S. (2005). Shape design of pin-jointed multistable compliant mechanisms using snapthrough behavior. *Structural and Multidisciplinary Optimization* , pp. 327-334.
- Pedersen, C. B. (2004). Crashworthiness design of transient frame structures using topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , pp. 653-678.
- Silva, E. C., Fonseca, J. S., & Kikuchi, N. (1998). Optimal design of periodic piezocomposites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , pp. 49-77.



Svanberg, K. (1987). The method of moving asymptotes - A new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , pp. 359–373.

Swan, C. C., & Kosaka, I. (1997). Voigt–Reuss topology optimization for structures with nonlinear material behaviors. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , pp. 3785–3814.