

ESTRATÉGIA DE DESENVOLVIMENTO DE MODELOS VISCOELÁSTICOS COM APLICAÇÃO À ANÁLISE DE PLACAS LAMINADAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Rodrigo R. Paccola^a, Leandro Vanalli^b e Humberto B. Coda^a

^a*Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil, (rpaccola@sc.usp.br, hbcoda@sc.usp.br),
<http://www.set.eesc.usp.br>*

^b*Centro de Tecnologia, Universidade Estadual de Maringá, Umuarama, PR, Brasil, lvanalli@uem.br,
<http://www.uem.br>*

Palavras Chave: Viscoelasticidade, Laminados, Método dos Elementos Finitos, Placas.

Resumo. Em modelagens viscoelásticas, em geral, a viscosidade do material é considerada fazendo-se uso de funções de fluência ou relaxação. Neste trabalho, se apresenta uma estratégia para o desenvolvimento de modelos viscoelásticos que se baseia na imposição do modelo reológico sobre as equações de equilíbrio, resultando em uma equação de movimento semelhante àquelas encontradas em formulações dinâmicas. Com isso as solicitações são aplicadas integralmente e os incrementos são definidos como incrementos de tempo e não incrementos de força, aplicando-se algoritmos de integração temporal adequados para a solução do problema. São obtidas e implementadas expressões para 3 modelos viscoelásticos: Kelvin-Voigt, Boltzmann e Burger. Exemplos são apresentados para validação da estratégia proposta, simulando o comportamento de placas laminadas com cinemática de Reissner-Mindlin através do Método dos Elementos Finitos (MEF).

1 INTRODUÇÃO

O comportamento de vários materiais, como concreto, polímeros e compósitos poliméricos, é, em geral, dependente do tempo, ou seja, exibem um comportamento viscoelástico (Hashin, 1965; Lemaitre e Chaboche, 1998; Mesquita, 2002; Huang et al. 2005; Ye et al. 2009, entre outros). Esse comportamento é, na maioria das vezes, negligenciado nas formulações numéricas devido à complexidade de consideração, ou devido a algumas simplificações adotadas que permitem desconsiderar tais efeitos.

Neste contexto, é interessante que o comportamento ao longo do tempo seja incorporado adequadamente nas formulações numéricas para melhorar a representação de determinados materiais e as análises em determinadas aplicações onde este se torna indispensável.

Vários pesquisadores têm estudado o comportamento temporal desses materiais, buscando sua representação através de métodos numéricos, sendo a maior parte dos trabalhos baseada em funções de forma e relaxação, obtendo-se com isso uma relação constitutiva dependente do tempo (Hashin, 1965; Christensen, 1982; Telles, 1982; Lemaitre e Chaboche, 1998; Munaiar Neto, 1998; Jo et al. 2005; Wang e Birgisson, 2007; Bandyopadhyaya et al. 2008;).

Este trabalho apresenta uma estratégia simples para o desenvolvimento de modelos numéricos viscoelásticos com base na imposição dos modelos reológicos sobre as equações de equilíbrio (Mesquita et al. 2001; Mesquita, 2002; Mesquita e Coda, 2002,2003; Paccola et al. 2004; Huang et al. 2005), apresentando algumas generalidades em relação aos citados trabalhos, com relação às propriedades viscosas adotadas.

Com isso obtém uma equação de movimento semelhante àquelas encontradas em formulações dinâmicas, que é adequadamente integrada com a utilização de algoritmos de integração temporal para a solução do problema. Os incrementos são então incrementos de tempo, sendo a carga aplicada integralmente no modelo, e não em incrementos como nas formulações usuais.

Apresentam-se os desenvolvimentos para os modelos de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Burger, com suas particularidades. As implementações são realizadas em código de elementos finitos para análise de placas laminadas segundo a teoria de Reissner-Mindlin, onde as rotações são desacopladas dos deslocamentos verticais, levando-se, portanto, em consideração o efeito de cisalhamento nas deformações (Paccola 2004).

Ao final do trabalho são apresentados exemplos para validação das formulações apresentadas e conseqüentemente da estratégia de desenvolvimento de tais formulações.

2 MODELOS REOLÓGICOS VISCOELÁSTICOS

Devido à complexidade da representação do real comportamento dos materiais é indispensável a adoção de modelos simplificados que proporcionem soluções suficientemente próximas do comportamento destes. Neste sentido, os chamados modelos reológicos estabelecem a relação existente entre tensão e deformação para alguns materiais específicos, em geral de comportamento simples, e que podem ser associados para a obtenção da representação de materiais com comportamento mais complexo.

A maneira usual adotada para descrever o comportamento viscoelástico de um sólido é a utilização de modelos reológicos definidos no espaço uniaxial, e uma representação simples usada com freqüência para descrever o comportamento viscoelástico de materiais é o modelo de Kelvin-Voigt. Existem outros modelos mais completos e que podem ser derivados do modelo de Kelvin-Voigt associado com outros modelos existentes.

Neste trabalho são abordados os modelos de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Burger, sendo cada um apresentado em item específico na seqüência.

2.1 Modelo de Kelvin-Voigt

Esse modelo é obtido da associação em paralelo de uma mola e de um amortecedor, podendo representar apenas a resposta elástica adiada do modelo, ou seja, ao longo do tempo e sem comportamento instantâneo (Mesquita e Coda, 2002), Figura 1.

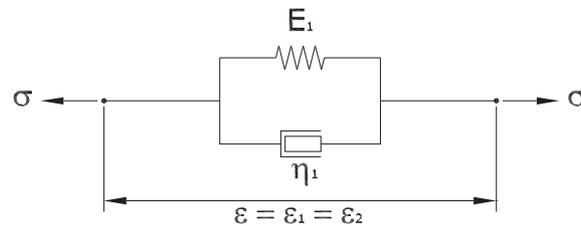


Figura 1: viscoelástico de Kelvin-Voigt

Neste modelo as deformações na mola (ϵ_1), no amortecedor (ϵ_2) e totais (ϵ) são iguais.

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2. \quad (1)$$

A tensão total (σ) no modelo é dada pela soma da tensão atuante na mola (σ_1) com a tensão atuante no amortecedor (σ_2).

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (2)$$

As tensões atuantes na mola e no amortecedor são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_1 : \epsilon_1 = E_1 : \epsilon, \\ \sigma_2 &= \eta_1 : \dot{\epsilon}_2 = \eta_1 : \dot{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3)$$

onde E_1 é a matriz constitutiva elástica e η_1 é a matriz constitutiva viscosa, sendo que esta última pode ser obtida como apresentado em Mesquita e Coda (2002).

Da Eq. (3) nota-se a dependência da tensão viscosa com a velocidade de deformação do amortecedor ($\dot{\epsilon}_2$). Pode-se escrever a velocidade de deformação no modelo como:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2. \quad (4)$$

Reescrevendo-se a Eq. (2) com as Eq. (3) e Eq. (4) têm-se a expressão da relação tensão x deformação do modelo de Kelvin-Voigt dada por:

$$\sigma = E_1 : \epsilon + \eta_1 : \dot{\epsilon}. \quad (5)$$

A Eq. (5) será introduzida posteriormente na equação de equilíbrio para a obtenção da representação integral do método dos elementos finitos.

2.2 Modelo de Boltzmann

O modelo de Boltzmann consiste em uma mola (trecho 1) conectada em série com o modelo de Kelvin-Voigt (trecho 2), onde a mola é usada para representar a resposta elástica instantânea e o modelo de Kelvin-Voigt para representar a resposta elástica adiada (Wang e Birgisson, 2007), Figura 2.

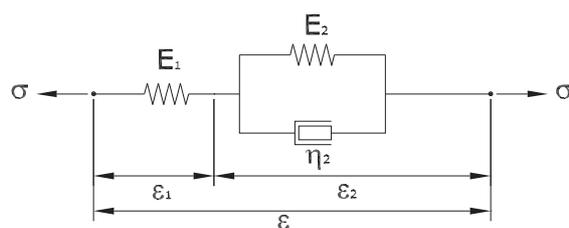


Figura 2: Modelo viscoelástico de Boltzmann

Este modelo fica caracterizado pela igualdade das tensões nos trechos, elástico (σ_1) e viscoelástico (σ_2), sendo estas iguais à tensão total (σ) no modelo.

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2. \quad (6)$$

As tensões em cada trecho são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_1 : \varepsilon_1 = \sigma, \\ \sigma_2 &= E_2 : \varepsilon_2 + \eta_2 : \dot{\varepsilon}_2 = \sigma. \end{aligned} \quad (7)$$

onde, novamente, os E_i são as matrizes constitutiva elástica e η_j é a matriz constitutiva viscosa, das molas e do amortecedor respectivamente.

A deformação total (ε) no modelo é dada pela soma da deformação atuante na mola (ε_1) com a deformação atuante no trecho referente ao modelo de Kelvin-Voigt (ε_2). Sendo assim, a taxa de variação da deformação no tempo, ou velocidade de deformação, também pode ser escrita como a soma das velocidades em cada trecho. Com isso tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Manipulando-se as Eq. (7) e Eq. (8) pode-se escrever a velocidade de deformação para o trecho 2 como:

$$\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} - E_1^{-1} : \dot{\sigma}. \quad (9)$$

Retornando para a Eq. (7) pode-se reescrevê-la em função apenas da deformação e da velocidade de deformação totais no modelo como:

$$\sigma = E_2 : (\varepsilon - E_1^{-1} : \sigma) + \eta_2 : (\dot{\varepsilon} - E_1^{-1} : \dot{\sigma}). \quad (10)$$

Escrevendo-se a expressão para a tensão total no modelo em função das outras variáveis têm-se:

$$\sigma = (I + E_2 : E_1^{-1})^{-1} : (E_2 : \varepsilon + \eta_2 : \dot{\varepsilon} - \eta_2 : E_1^{-1} : \dot{\sigma}). \quad (11)$$

Para a taxa de variação de tensão no tempo adota-se uma aproximação por diferenças finitas, que é dada por:

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma - \sigma_s}{\Delta t}. \quad (12)$$

onde σ_s é a tensão total no modelo calculada no passo de tempo anterior e Δt é o intervalo de tempo adotado na análise. Esta parcela é apresentada de forma diferente da encontrada nos trabalhos de Mesquita (2002) e de Mesquita e Coda (2002), onde por simplificação assume-se

a igualdade para os coeficientes de Poisson para ambos os trechos. Esta simplificação não é aqui adotada e, portanto, as matrizes dos dois trechos podem apresentar comportamentos diferentes, no que diz respeito aos valores de coeficientes de Poisson.

Introduzindo-se a Eq. (12) na Eq. (11) e rearranjando os termos, pode-se reescrever a expressão para a tensão total do modelo no instante atual como:

$$\sigma = \left(I + E_2 : E_1^{-1} + \frac{1}{\Delta t} \eta_2 : E_1^{-1} \right)^{-1} : \left(E_2 : \varepsilon + \eta_2 : \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\Delta t} \eta_2 : E_1^{-1} : \sigma_s \right). \quad (13)$$

Esta Eq. (13) é que será introduzida posteriormente na equação de equilíbrio para a obtenção da representação integral do método dos elementos finitos.

2.3 Modelo de Burger

O modelo de Burger é representado por um arranjo do modelo de Kelvin-Voigt e do modelo de Maxwell conectados em série, **Figura 3**: Modelo viscoelástico de Burger. Comparado ao modelo de Boltzmann, o amortecedor adicionado do modelo de Burger é usado para representar o comportamento de fluência dos materiais viscoelástico (**Wang e Birgisson, 2007**). Portanto, o modelo de Burger é capaz de representar o comportamento instantâneo do material (trecho 1) e a resposta elástica adiada (trecho 2), bem como o acréscimo contínuo de deformação ao longo do tempo (fluência) em virtude do amortecedor em série (trecho 3).

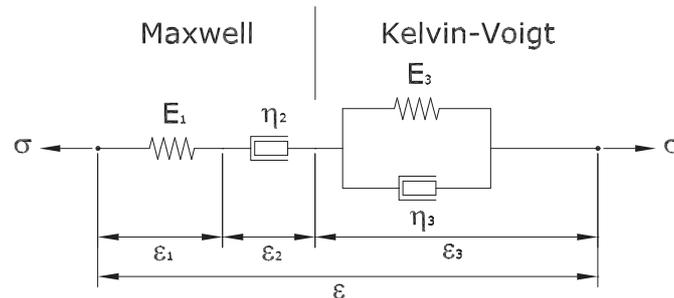


Figura 3: Modelo viscoelástico de Burger

Este modelo fica caracterizado pela igualdade das tensões nos 3 trechos.

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3. \quad (14)$$

As tensões em cada trecho são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \eta_1 : \dot{\varepsilon}_1 = \sigma, \\ \sigma_2 &= E_2 : \varepsilon_2 = \sigma, \\ \sigma_3 &= E_3 : \varepsilon_3 + \eta_3 : \dot{\varepsilon}_3 = \sigma. \end{aligned} \quad (15)$$

Onde, novamente, os E_i são as matrizes constitutivas elásticas e os η_j são as matrizes constitutivas viscosas, das molas e dos amortecedores respectivamente.

A deformação total (ε) no modelo é dada pela soma das deformações atuantes na mola (ε_1), no amortecedor (ε_2) e no trecho referente ao modelo de Kelvin-Voigt (ε_3). Sendo assim, a taxa de variação da deformação no tempo, ou velocidade de deformação, bem como a aceleração da deformação, também podem ser escritas como a soma das velocidades e das acelerações, respectivamente, em cada trecho. Com isso tem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3, \\ \ddot{\varepsilon} &= \ddot{\varepsilon}_1 + \ddot{\varepsilon}_2 + \ddot{\varepsilon}_3.\end{aligned}\tag{16}$$

Manipulando-se as Eq. (15) e Eq. (16), e usando a idéia apresenta na Eq. (9), pode-se escrever a velocidade e a aceleração de deformações para o trecho 3 como:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_3 &= \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon} - \eta_1^{-1} : \sigma - E_2^{-1} : \dot{\sigma}, \\ \ddot{\varepsilon}_3 &= \ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}_1 - \ddot{\varepsilon}_2 = \ddot{\varepsilon} - \eta_1^{-1} : \dot{\sigma} - E_2^{-1} : \ddot{\sigma}.\end{aligned}\tag{17}$$

Retornando para a Eq. (15) pode-se reescrevê-la em função apenas da deformação e das velocidade e aceleração de deformação e tensão totais no modelo como:

$$\dot{\sigma} = E_3 : (\dot{\varepsilon} - \eta_1^{-1} : \sigma - E_2^{-1} : \dot{\sigma}) + \eta_3 : (\ddot{\varepsilon} - \eta_1^{-1} : \dot{\sigma} - E_2^{-1} : \ddot{\sigma}).\tag{18}$$

Isolando-se a tensão total no modelo em função das demais variáveis têm-se:

$$\sigma = (E_3 : \eta_1^{-1})^{-1} : (E_3 : \dot{\varepsilon} - E_3 : E_2^{-1} : \dot{\sigma} + \eta_3 : \ddot{\varepsilon} - \eta_3 : \eta_1^{-1} : \dot{\sigma} - \eta_3 : E_2^{-1} : \ddot{\sigma}).\tag{19}$$

Assumindo-se aproximação por diferenças finitas para a taxa de variação de tensão no tempo e para a taxa de variação da velocidade de tensões no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \frac{\sigma - \sigma_s}{\Delta t}, \\ \ddot{\sigma} &= \frac{\sigma - 2\sigma_s + \sigma_{s-1}}{\Delta t^2}.\end{aligned}\tag{20}$$

onde σ_s é a tensão total no modelo calculada no passo de tempo anterior, σ_{s-1} é a tensão total no modelo calculada no passo anterior ao passo de tempo s e Δt é o intervalo de tempo adotado na análise. Novamente, esta parcela é apresentada de forma diferente da encontrada nos trabalhos de Mesquita (2002) e Mesquita e Coda (2002), onde por simplificação assume-se a igualdade para os coeficientes de Poisson para ambos os trechos, podendo, portanto, tais valores serem assumidos diferentes em cada trecho para o presente trabalho.

Introduzindo-se a Eq. (20) na Eq. (19) e rearranjando os termos, pode-se reescrever a tensão total do modelo no instante atual como:

$$\begin{aligned}\sigma &= \left(E_3 : \eta_1^{-1} + \frac{1}{\Delta t} \left(I + E_3 : E_1^{-1} + \eta_3 : \eta_2^{-1} + \frac{1}{\Delta t} \eta_3 : E_1^{-1} \right) \right)^{-1} : (E_3 : \dot{\varepsilon} + \eta_3 : \ddot{\varepsilon} + \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t} \eta_3 : E_1^{-1} : \sigma_{s-1} + \frac{1}{\Delta t} \left(I + E_3 : E_1^{-1} + \eta_3 : \eta_2^{-1} + \frac{2}{\Delta t} \eta_3 : E_1^{-1} \right) : \sigma_s).\end{aligned}\tag{21}$$

Para simplificação da representação da Eq. (21), adota-se:

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{\Delta t} \left(I + E_3 : E_1^{-1} + \eta_3 : \eta_2^{-1} + \frac{2}{\Delta t} \eta_3 : E_1^{-1} \right) \\ \Xi &= \left(E_3 : \eta_1^{-1} + \frac{1}{\Delta t} \left(I + E_3 : E_1^{-1} + \eta_3 : \eta_2^{-1} + \frac{1}{\Delta t} \eta_3 : E_1^{-1} \right) \right)^{-1}\end{aligned}\tag{22}$$

Portanto, a Eq. (21) por ser reescrita como:

$$\sigma = \Xi : \left(E_3 : \dot{\varepsilon} + \eta_3 : \ddot{\varepsilon} - \frac{1}{\Delta t} \eta_3 : E_1^{-1} : \sigma_{s-1} + \Theta : \sigma_s \right). \quad (23)$$

Esta Eq. (23) é que será introduzida posteriormente na equação de equilíbrio para a obtenção da representação integral do método dos elementos finitos.

3 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA OS MODELOS APRESENTADOS

A representação integral de um corpo em equilíbrio estático via método dos elementos finitos pode ser obtida a partir da equação de equilíbrio estático de uma porção infinitesimal do sólido:

$$\begin{aligned} \text{Div}(\sigma^T) + b &= 0, \\ \sigma^T &= \sigma. \end{aligned} \quad (24)$$

onde b representa as forças de volume. Ponderando o erro produzido pela Eq. (24) quando se adota uma aproximação para a solução exata, utilizando como função ponderadora a função de deslocamento virtual δu e posteriormente integrando-se no domínio:

$$\int_{\Omega} \delta u \cdot (\text{Div}(\sigma) + b) d\Omega = 0. \quad (25)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo da Eq. (25), recai-se em uma parcela de domínio e uma de contorno:

$$\int_{\Omega} \delta u \cdot \text{Div}(\sigma) d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u \cdot \sigma \cdot n d\Omega - \int_{\Omega} \text{grad}(\delta u) : \sigma d\Omega. \quad (26)$$

onde n define o vetor normal à superfície.

Sabendo-se que:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot n &= p, \\ \text{grad}(\delta u) &= \delta \varepsilon. \end{aligned} \quad (27)$$

onde p são as forças de superfície e $\delta \varepsilon$ a deformação virtual, postula-se o princípio dos trabalhos virtuais para o problema estático, sendo este o ponto de partida para a obtenção da representação integral do método dos elementos finitos.

$$\int_{\Gamma} \delta u \cdot p d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega = 0. \quad (28)$$

Portanto, basta impor as relações reológicas combinadas e apresentadas para cada um dos modelos desenvolvidos no item 2 para se obter tais representações.

3.1 Modelo de Kelvin-Voigt

Impondo-se a relação reológica da Eq. (5) na Eq. (28), obtida da ponderação da equação de equilíbrio dada pela Eq. (24), tem-se a representação integral viscoelástica que leva em consideração o modelo de Kelvin-Voigt dada por:

$$\int_{\Gamma} \delta u \cdot p d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon : E_1 : \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \eta_1 : \dot{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega = 0. \quad (29)$$

Nota-se que a única diferença para a representação usual é a terceira integral da Eq. (29), que é a parcela responsável pelo comportamento viscoso.

Para se resolver o problema viscoso deve-se integrar no tempo o sistema de equações que

será gerado da Eq. (29) quando da introdução da aproximação algébrica para os deslocamentos. Para tanto é necessário que se insira a aproximação no tempo para a taxa de variação de deformação existente nesta equação. Assumindo a aproximação por diferenças finitas para tal taxa, assim como foi feito para as taxas de tensão anteriormente:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_s}{\Delta t} \quad (30)$$

onde ε_s é a deformação total no modelo calculada no passo de tempo anterior e Δt é o intervalo de tempo.

Inserindo a Eq. (30) na Eq. (29) tem-se:

$$\int_{\Gamma} \delta u \cdot p d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon : E_1 : \varepsilon d\Omega - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \eta_1 : \varepsilon d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \eta_1 : \varepsilon_s d\Omega + \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega = 0. \quad (31)$$

As segunda e terceira integrais formarão a matriz de rigidez do problema, sendo que as demais deverão contribuir para o vetor de carregamentos.

3.2 Modelo de Boltzmann

Seguindo o mesmo raciocínio para o modelo de Boltzmann, impõe-se a relação reológica da Eq. (13) na Eq. (28), obtendo-se a representação integral viscoelástica para o modelo, inclusive com a aproximação temporal para as deformações, dada por:

$$\int_{\Gamma} \delta u \cdot p d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \left(I + E_2 : E_1^{-1} + \frac{1}{\Delta t} \eta_2 : E_1^{-1} \right)^{-1} : \left(E_2 : \varepsilon + \frac{1}{\Delta t} \eta_2 : (\varepsilon - \varepsilon_s) + \frac{1}{\Delta t} \eta_2 : E_1^{-1} : \sigma_s \right) d\Omega = 0. \quad (32)$$

A parcela referente à matriz de rigidez é dada por:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon : \left(I + E_2 : E_1^{-1} + \frac{1}{\Delta t} \eta_2 : E_1^{-1} \right)^{-1} : \left(E_2 : \varepsilon + \frac{1}{\Delta t} \eta_2 : \varepsilon \right) d\Omega \quad (33)$$

A parcela que contribui no vetor de carregamentos é dada por:

$$\int_{\Gamma} \delta u \cdot p d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \left(I + E_2 : E_1^{-1} + \frac{1}{\Delta t} \eta_2 : E_1^{-1} \right)^{-1} : \left(\frac{1}{\Delta t} \eta_2 : \varepsilon_s - \frac{1}{\Delta t} \eta_2 : E_1^{-1} : \sigma_s \right) d\Omega \quad (34)$$

3.3 Modelo de Burger

Da mesma forma, para o modelo de Burger, impõe-se a relação reológica da Eq. (23) na Eq. (28), obtendo-se a representação integral viscoelástica para este modelo, dada por:

$$\int_{\Gamma} \delta u \cdot p d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \Xi : \left(E_3 : \dot{\varepsilon} + \eta_3 : \ddot{\varepsilon} - \frac{1}{\Delta t} \eta_3 : E_1^{-1} : \sigma_{s-1} + \Theta : \sigma_s \right) d\Omega = 0. \quad (35)$$

Assumindo-se a aproximação por diferenças finitas para a taxa de variação de deformação no tempo e para a taxa de variação da velocidade de deformação no tempo, similar ao adotado para as tensões na Eq. (20), e introduzindo-se tal aproximação na Eq. (35) têm-se:

$$\int_{\Gamma} \delta u \cdot p d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \Xi : \left(E_3 : \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_s}{\Delta t} \right) + \eta_3 : \left(\frac{\varepsilon - 2\varepsilon_s + \varepsilon_{s-1}}{\Delta t^2} \right) - \frac{1}{\Delta t} \eta_3 : E_1^{-1} : \sigma_{s-1} + \Theta : \sigma_s \right) d\Omega = 0. \quad (36)$$

onde ε_s é a deformação total no modelo calculada no passo de tempo anterior, ε_{s-1} é a deformação total no modelo calculada no passo anterior ao passo s e Δt é o intervalo de tempo adotado na análise.

A parcela referente à matriz de rigidez é dada por:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon : \Xi : \left(\frac{1}{\Delta t} E_3 : \varepsilon + \frac{1}{\Delta t^2} \eta_3 : \varepsilon \right) d\Omega \quad (37)$$

A parcela que contribui no vetor de carregamentos é dada por:

$$\int_{\Gamma} \delta u \cdot p d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \Xi : \left(\frac{1}{\Delta t} E_3 : \varepsilon_s + \frac{1}{\Delta t^2} \eta_3 : (2\varepsilon_s - \varepsilon_{s-1}) + \frac{1}{\Delta t} \eta_3 : E_1^{-1} : \sigma_{s-1} - \Theta : \sigma_s \right) d\Omega \quad (38)$$

4 EXEMPLOS

A formulação descrita foi implementada em código de elementos finitos para análise de placas laminadas segundo a teoria de Reissner-Mindlin, onde as rotações são desacopladas dos deslocamentos verticais, levando-se, portanto, em consideração o efeito de cisalhamento nas deformações (Paccola, 2004). São utilizados elementos finitos triangulares com ordem de aproximação cúbica para deslocamentos. A seguir são apresentados exemplos de validação e aplicações gerais para os 3 modelos viscoelásticos.

4.1 Chapa tracionada

O primeiro exemplo é clássico e muito utilizado para verificação do comportamento de modelos viscoelásticos por possuir solução analítica simples e fácil de ser obtida (Mesquita, 2002). Trata-se de uma barra simples tracionada, aqui representada por uma chapa submetida a um carregamento distribuído em sua face livre, para comparação das soluções numérica e analítica. A geometria da estrutura e a discretização do modelo são apresentadas na Figura 4, sendo os valores das propriedades físicas apresentados na Tabela 1. São fornecidos apenas os valores do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson μ para cada trecho dos modelos por se tratar de material isotrópico.

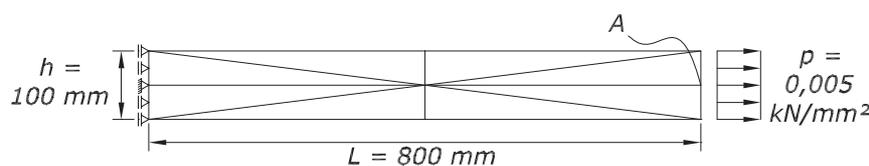


Figura 4: Geometria e condições de contorno para a chapa

Trecho		Kelvin-Voigt	Boltzmann	Burger	
E ₁	E	11	22,58	22,58	22,58
	μ	0	0	0	0
E ₂	E	-	11	-	-
	μ	-	0	-	-
E ₃	E	-	-	11,29	11,29
	μ	-	-	0	0
η_1	E	500	-	-	-
	μ	0	-	-	-
η_2	E	-	500	10261,68	10261,68
	μ	-	0	0	0,2
η_2	E	-	-	512,08	512,08
	μ	-	-	0	0,2

Tabela 1: Propriedades físicas (kN e mm).

A resposta para o deslocamento horizontal do ponto A da Figura 4 é apresentada na Figura 5, para o modelo de Kelvin-Voigt, comparada com a resposta analítica para o problema uniaxial, portanto com coeficiente de Poisson nulo. Observa-se uma excelente concordância entre o resultado numérico e o analítico, comprovando a eficiência da abordagem aqui apresentada.

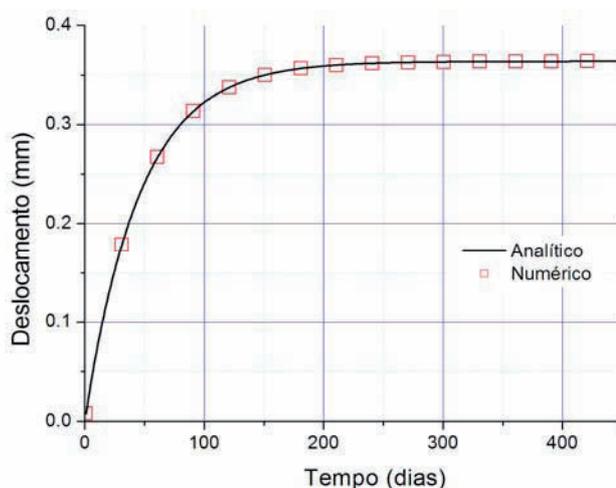


Figura 5: Modelo de Kelvin-Voigt – deslocamento horizontal no ponto A

Analogamente, as Figura 6 e Figura 7 apresentam as comparações entre as respostas analíticas e as numéricas, para o deslocamento horizontal também no ponto A, para os modelos de Boltzmann e Burger respectivamente. Observa-se novamente uma excelente concordância entre o resultado numérico e o analítico, comprovando a eficiência da abordagem aqui apresentada, também para estes modelos.

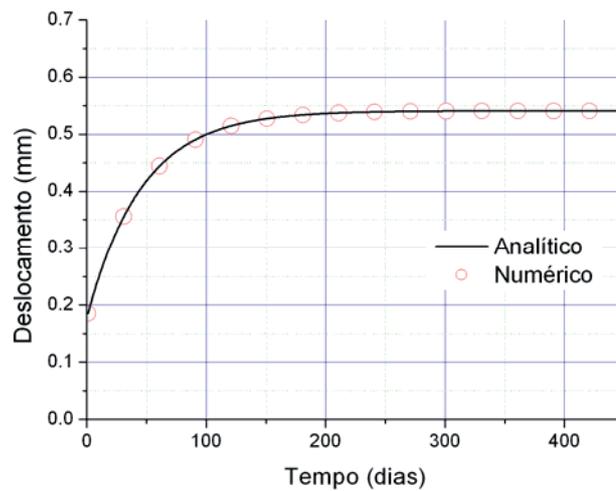


Figura 6: Modelo de Boltzmann – deslocamento horizontal no ponto A

Na Figura 7 pode-se observar também o resultado para o deslocamento horizontal do ponto A para diferentes passos de tempo adotados na análise para o modelo de Burger. Verifica-se que os resultados são estáveis até mesmo para passos de tempo maiores, e que a resposta final elástica é sempre alcançada para qualquer um dos valores adotados de Δt .

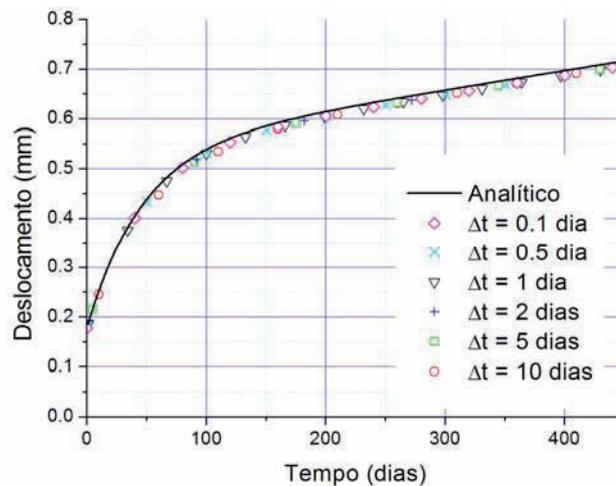


Figura 7: Modelo de Burger – deslocamento horizontal no ponto A – variação de Δt

Na Figura 8 apresenta-se uma comparação entre os valores de deslocamento horizontal do ponto A, para o modelo de Burger, assumindo primeiramente coeficiente de Poisson nulo para todos os trechos do modelo e posteriormente assumindo coeficiente de Poisson igual a 0,2 para os amortecedores.

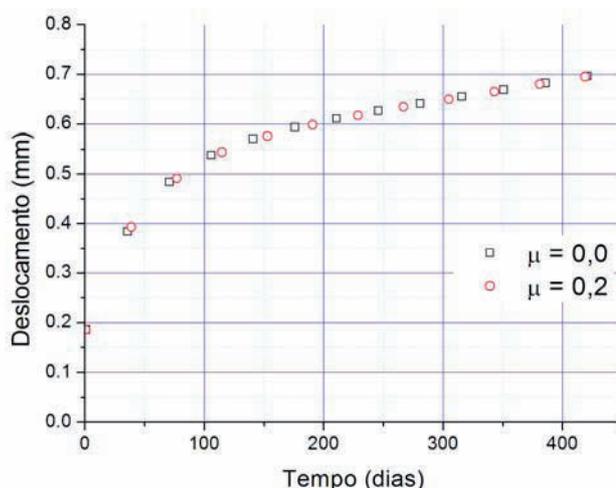


Figura 8: Modelo de Burger – variação do coeficiente de Poisson dos amortecedores

As Figura 9 e Figura 10 apresentam, respectivamente, os valores de deslocamentos horizontais e verticais, comparando-se o comportamento do modelo de Burger para coeficientes de Poisson 0,0 e 0,2.

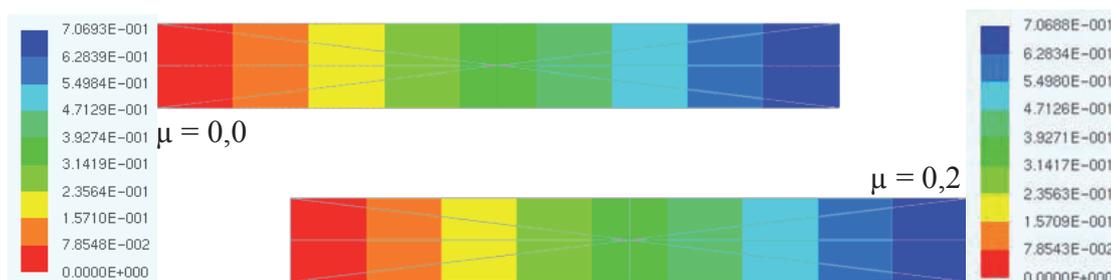


Figura 9: Deslocamento horizontal

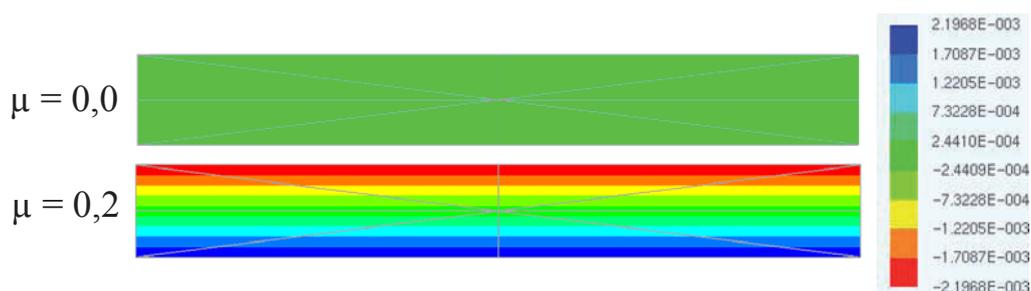


Figura 10: Deslocamento vertical

4.2 Exemplo 02

Este exemplo trata de uma placa simplesmente apoiada, formada por 3 camadas e submetida a um carregamento uniformemente distribuído (Owen e Figueiras, 1983). Aproveitando-se da simetria do problema, $\frac{1}{4}$ da placa é modelado utilizando 10×10 divisões de elementos finitos triangulares. Os resultados de deslocamento vertical no centro da placa são obtidos e apresentados para duas das configurações de geometria de Owen e Figueiras (1983), onde foram utilizados elementos finitos derivados de elementos tridimensionais, assumindo deformação cisalhante constante ao longo da espessura. Para tanto os autores

propuseram uma expressão para determinação do fator de correção para distribuição da tensão de cisalhamento (k), em função das características da seção transversal do laminado, características físicas e geométricas das laminas que compõem o conjunto. Estes fatores de correção foram também utilizados no presente trabalho.

A geometria do problema, bem como as características gerais do material empregado nas camadas da placa podem ser verificadas na [Figura 11](#).

A [Tabela 2](#) exhibe os valores de α_i utilizados para determinação das características dos materiais de cada camada para as configurações de seção transversal adotadas, bem como os valores do fator de correção para a distribuição do cisalhamento e a resposta elástica obtida de [Owen e Figueiras \(1983\)](#). As grandezas físicas utilizadas para as camadas são obtidas em função das grandezas apresentadas na [Figura 11](#), multiplicadas pelos valores de α_i acima referidos. As grandezas e respostas são apresentadas desacompanhadas de unidades como encontradas na referência utilizada para comparação dos resultados.

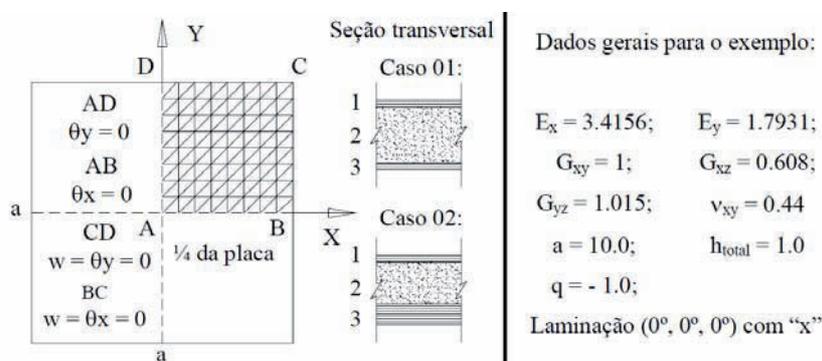


Figura 11: Geometria do problema e propriedades dos materiais

	α_1	α_2	α_3	h_1	h_2	h_3	k	Ref.
Caso 01	50	1	10	0,1	0,8	0,1	0,1473	28,43
Caso 02	10	1	10	0,1	0,6	0,3	0,2449	34,92
Ref. – Owen e Figueiras (1983)								

Tabela 2: Fatores α_i e k .

A [Tabela 3](#) contém os fatores de multiplicação utilizados para determinar os parâmetros de cada trecho dos modelos empregados nas análises, lembrando que cada camada é composta por um material diferente. Foram usados 100 passos de tempo com Δt de 1 dia, totalizando 100 dias de análise.

Trecho	Kelvin-Voigt	Boltzmann	Burger
E_1	1,0	1,0	10,0
E_2	-	1,0	-
E_3	-	-	1,0
N_1	10,0	-	-
N_2	-	15,0	750,0
N_3	-	-	15,0

Tabela 3: Fatores de multiplicação para cada trecho.

O resultado de deslocamento vertical no centro da placa, para os casos 01 e 02 de composição das camadas, é apresentado nas [Figura 12](#), [Figura 13](#) e [Figura 14](#), respectivamente para os modelos de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Burger e estão de acordo com

o esperado para o comportamento do laminado em cada um dos modelos viscoelásticos.

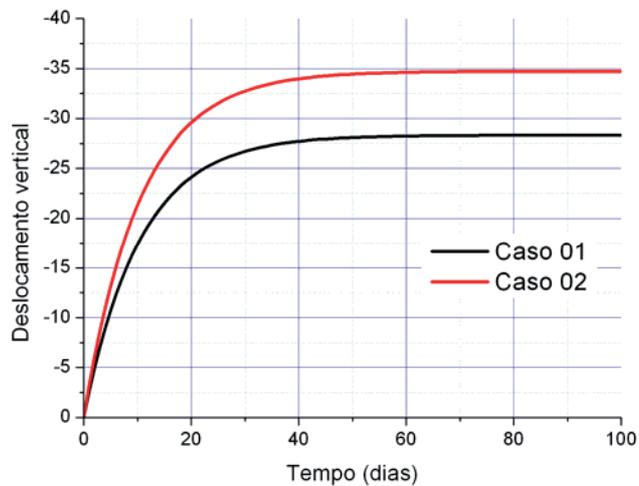


Figura 12: Modelo de Kelvin-Voigt

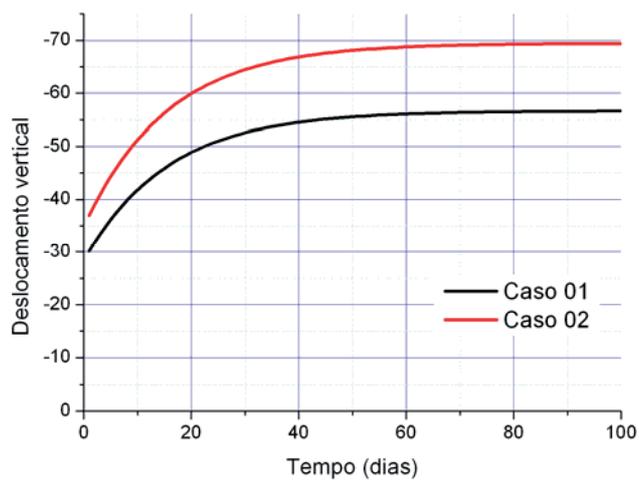


Figura 13: Modelo de Boltzmann

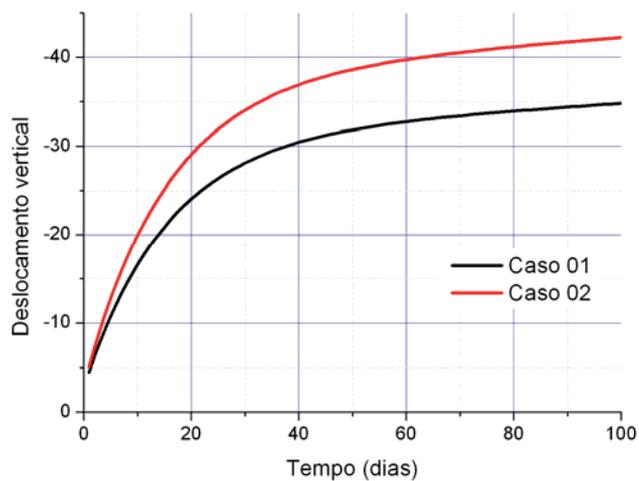


Figura 14: Modelo de Burger

4.3 Exemplo 03

Este exemplo, utilizado como benchmark, apresenta o comportamento viscoelástico de um cilindro de diâmetro igual ao comprimento, submetido a um carregamento concentrado simétrico e diametralmente oposto na posição $L/2$ do eixo do cilindro, como ilustra a [Figura 15](#)

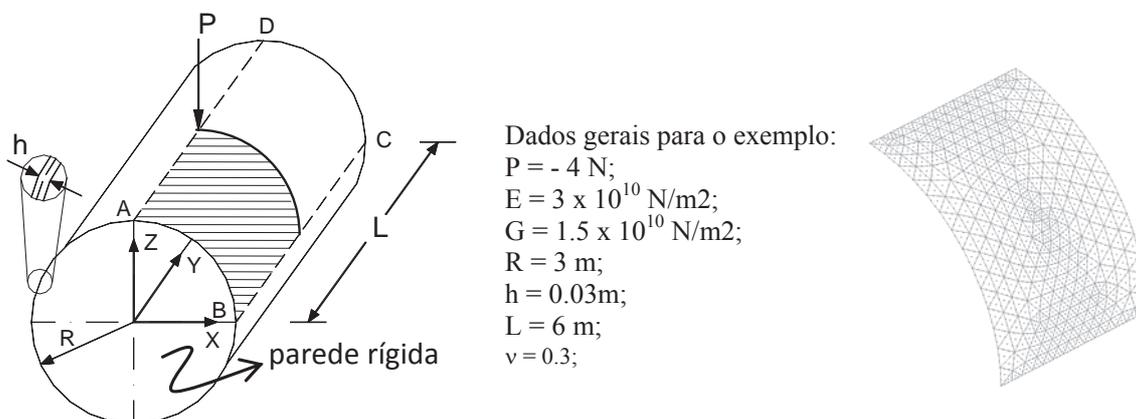


Figura 15: Geometria, condições de contorno, dados gerais e discretização

Os parâmetros de geometria e propriedades físicas gerais, bem como a discretização utilizada na análise são apresentados na [Figura 15](#). A [Tabela 4](#) contém os fatores de multiplicação utilizados para determinar os parâmetros de cada trecho dos modelos empregados nas análises. Foram usados 400 passos de tempo com Δt de 0,5 dias, totalizando 200 dias de análise.

Trecho	Kelvin-Voigt	Boltzmann	Burger
E_1	1,0	2,0	2,0
E_2	-	1,0	-
E_3	-	-	1,0
N_1	15,0	-	-
N_2	-	15,0	300,0
N_3	-	-	15,0

Tabela 4: Fatores de multiplicação para cada trecho.

A malha utilizada para discretização de 1/8 do cilindro, usando-se da simetria do problema, conta com 520 elementos com aproximação cúbica de deslocamento, totalizando 2425 nós, e foi escolhida com base em estudo de convergência realizado em [Paccola \(2004\)](#).

Os resultados de deslocamentos nas direções x, y e z são apresentados na [Figura 16](#).

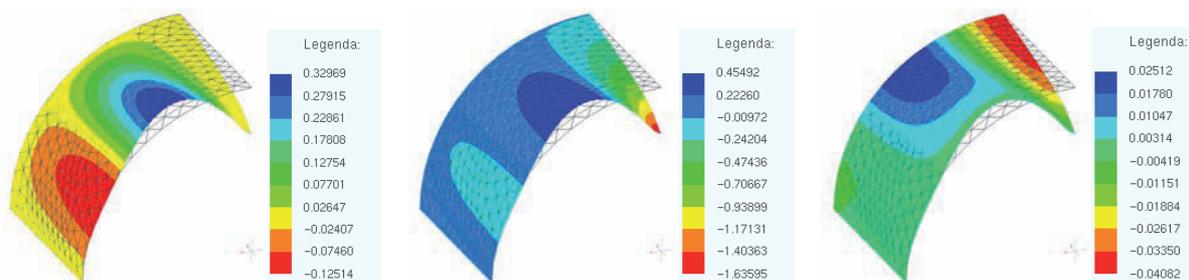


Figura 16: Deslocamento nas direções x, y e z

O comportamento viscoelástico do deslocamento na direção y no ponto de aplicação da carga “P” é apresentado nas [Figura 17](#), [Figura 18](#) e [Figura 19](#), respectivamente para os modelos de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Burger.

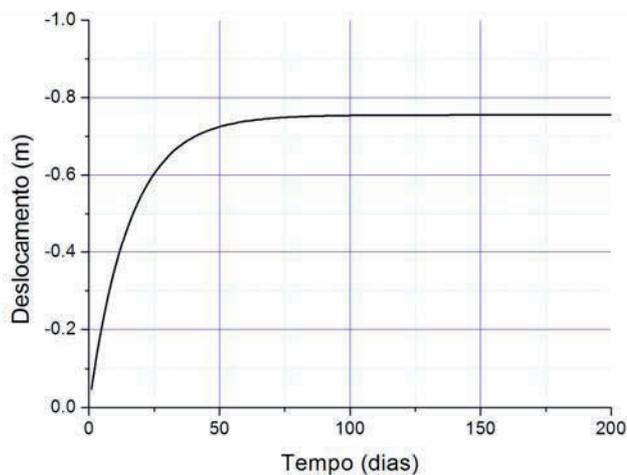


Figura 17: Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga – Modelo de Kelvin-Voigt

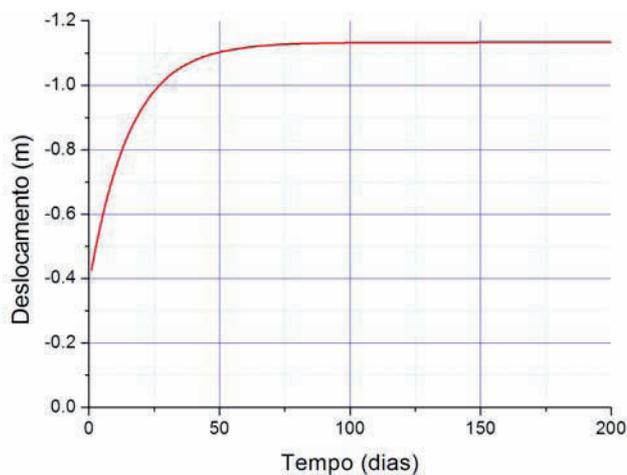


Figura 18: Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga – Modelo de Boltzmann

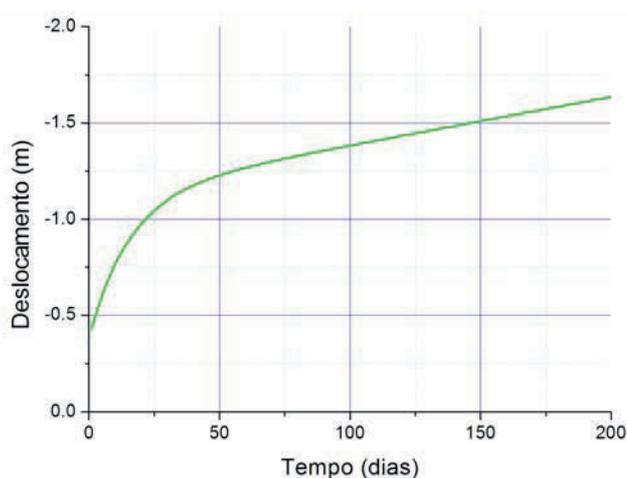


Figura 19: Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga – Modelo de Burger

É fácil observar que resposta elástica analítica é recuperada ao final dos passos de tempo para o modelo de Kelvin-Voigt. Para o modelo de Boltzmann, como era esperado, o deslocamento no ponto de aplicação da carga é igual a 1,5 vezes o valor da resposta analítica, por ter-se adotado o dobro do módulo de elasticidade na parcela de deformação imediata, em relação à parcela viscoelástica (modelo de Kelvin-Voigt). Para o modelo de Burger, verifica-se que a deformação imediata é próxima à obtida para o modelo de Boltzmann, como era esperado, sendo um pouco superior devido à deformação do amortecedor, que diferencia um modelo do outro, responsável pelo comportamento de fluência dos materiais.

5 CONCLUSÕES

Acredita-se que a estratégia para desenvolvimento de modelos viscoelásticos aqui apresentada pode ser considerada simples e eficaz, com base nos resultados obtidos nos exemplos apresentados. Salienta-se que esta é uma abordagem diferente da abordagem que utiliza funções de fluência e relaxação, sendo uma opção para consideração do comportamento viscoso nos modelos numéricos. Os desenvolvimentos aqui apresentados podem ser estendidos para outros modelos viscosos, inclusive com consideração de plasticidade, seguindo a metodologia apresentada.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, pelo apoio financeiro para essa pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Bandyopadhyaya, R., Das, A. and Basu, S., Numerical simulation of mechanical behavior of asphalt mix, *Construction and Building Materials*, 22:1051-1058:2008.
- Christensen, *Theory of Viscoelasticity*, Academic Press, New York, 1982.
- Hashin Z., Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *Journal of Applied Mechanics*, 32:630-635, 1965.
- Huang, Y., Crouch, S. L. and Mogilevskaya, S. G., A time domain direct integral method for viscoelastic plane with circular holes and elastic inclusions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29:725-737, 2005.
- Jo, C., Fu, J. and Naguib, H. E., Constitutive modeling for mechanical behavior of PMMA microcellular foams. *Polymer*, 46:11896–11903, 2005
- Lemaitre, J., and Chaboche, J.L., *Mechanics of Solids*. Cambridge University Press, 1998.
- Mesquita, A.D., Venturini, W. S. and Coda, H.B., Alternative time marching process for BEM and FEM viscoelastic analysis. *International Journal for Numerical Methods Engineering*, 51:501-516, 2001.
- Mesquita, A.D., Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/MEF progressivo. *Ph.D. thesis, University of São Paulo, EESC-USP – São Carlos*, 2002.
- Mesquita, A.D. and Coda, H.B., Alternative Kelvin viscoelastic Model for Finite Elements. *Applied Mathematical Modelling*, 26:501–516, 2002.
- Mesquita, A.D. and Coda, H.B., A simple Kelvin and Boltzmann viscoelastic analysis of three-dimensional solids by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27:885-895, 2003.
- Munaiar Neto, J., Um estudo da formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos para a sua integração numérica. *Ph.D.*

- thesis, University of São Paulo, EESC-USP – São Carlos, 1998.*
- Owen, D.R.J. and Figueiras, J.A., Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:541-566, 1983.
- Paccola, R.R., Vanalli, L. and Coda, H.B., Análise viscoelástica de cascas laminadas ortotrópicas através do MEF, *Proceedings of CMCE*, 2004.
- Paccola, R.R., Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF. *Ph.D. thesis, University of São Paulo, EESC-USP – São Carlos, 2004.*
- Telles, J.C.F, and Brebbia, C.A., Elastic/viscoplastic problems using boundary elements. *International Journal for Mechanical Sciences*, 24:605–618, 1982.
- Ye, Y, Yang, X. and Chen, C., Experimental researches on visco-elastoplastic constitutive model of asphalt mastic, *Construction and Building Materials*, 23:3161-3165, 2009.
- Wang J. and Birgisson, B., A time domain boundary method for modeling the quasi-static viscoelast behavior of asphalt pavements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31:226-240, 2007.