

ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS APOIADAS EM FUNDAÇÃO SOB A AÇÃO DE CARGAS MÓVEIS

Luis F. Paullo Muñoz e Paulo B. Gonçalves

*Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio
22453-900 Rio de Janeiro, Brasil, lf_pm21@hotmail.com, paulo@puc-rio.br*

Palavras chave: Análise dinâmica linear, análise dinâmica não-linear, vigas prismáticas, fundação não-linear, séries de Fourier, cargas móveis.

Resumo. A análise de vigas sobre base elástica submetidas a cargas estáticas e dinâmicas tem grande importância na engenharia estrutural e fornece ferramentas úteis para resolver problemas práticos como o projeto de fundações e vias férreas, entre outros. Um caso particularmente importante é o estudo do comportamento dinâmico destes elementos estruturais na presença de cargas móveis. Apresenta-se neste trabalho a análise de vigas prismáticas de comprimento infinito repousando sobre uma fundação elástica do tipo Winkler, submetida à ação de cargas móveis e forças axiais de compressão. Consideram-se cargas concentradas e uniformemente distribuídas em um trecho finito de magnitude constante ou com variação harmônica. A viga é descrita pela teoria linear de Euler-Bernoulli (teoria clássica de vigas) e de Rayleigh (considerando inércia rotacional). A fundação é descrita por uma lei constitutiva não-linear com não-linearidade cúbica. Para o caso linear se obtém uma solução analítica exata usando transformadas duplas de Fourier. Emprega-se também o método de Galerkin para a análise do problema linear e não-linear. Para isto, usam-se séries de Fourier como funções de aproximação, sendo o problema resolvido analiticamente no domínio do tempo no caso linear e mediante integração numérica das equações de movimento, no caso não-linear. Apresenta-se no caso linear uma análise paramétrica, comparando os resultados obtidos pelo método de Galerkin com a solução exata. Para o caso não-linear, estuda-se a influência da não-linearidade da fundação, do raio de giração da seção da viga, da magnitude da força axial compressiva, da velocidade de deslocamento da carga transversal e da variação da amplitude da carga harmônica nos deslocamentos da viga.

1 INTRODUÇÃO

A análise de vigas sobre base elástica é um tópico importante em engenharia civil e tem grande importância na análise de vários problemas práticos, como a análise de vias férreas e outros. Distintos parâmetros influenciam a resposta de vigas apoiadas em base elástica tais como rigidez da fundação, tipo de carregamento e rigidez relativa da viga. Hentéyi (1946) e Vlazov (1960) estudaram a resposta estática de vigas apoiadas sobre fundação elástica.

Um aspecto importante na análise de vigas sobre base elástica é a consideração de cargas móveis, como no caso de estruturas de pontes e vias férreas. Fýbra (1972) apresentou soluções analíticas para vários casos de vigas sob cargas móveis. Na publicação de Graff (1975) realizam-se estudos de cargas móveis agindo sobre cordas e vigas, enquanto Kim (2005) realizou uma análise linear paramétrica de uma viga de comprimento infinito usando transformadas duplas de Fourier. Um tópico de muito interesse é a consideração do comportamento não-linear da fundação elástica. Esta consideração torna mais complexa a formulação e, sobretudo, a resolução do problema, tendo-se que recorrer a métodos aproximados para a sua resolução.

A consideração da não-linearidade da fundação através da adição de um termo cúbico ao modelo de Winkler tem sido muito utilizada em diversos trabalhos. Nos últimos anos, a não-linearidade da fundação tem sido considerada em problemas de vigas submetidas a cargas móveis. Nguyen e Duhamel (2008) apresentaram uma metodologia para a utilização do método dos elementos finitos (MEF) na análise de vigas infinitas sobre fundação elástica não-linear submetida a uma carga concentrada móvel com variação de amplitude harmônica.

No presente trabalho é estudada uma viga prismática de comprimento infinito, repousando sobre uma fundação elástica de tipo Winkler, sob carga móvel pontual e carga móvel uniformemente distribuída numa extensão finita, considerando amplitudes constantes e harmônicas para ambos os casos de carregamento. Além da carga vertical, é levada em conta a atuação de uma força axial centrada constante. Para a formulação da equação diferencial do movimento da viga, usa-se a teoria de Euler-Bernoulli e considera-se tanto a inércia transversal quanto a inércia rotacional. Adota-se uma mudança da coordenada fixa do espaço para uma móvel e usa-se o método da dupla transformada de Fourier, anteriormente usada por Kim (2005), para a obtenção de uma solução analítica do caso Linear. A seguir, obtém-se uma solução aproximada baseada no método dos resíduos ponderados de Galerkin para o caso Linear e Não-linear. Em ambos os casos estuda-se o comportamento simétrico e não-simétrico da resposta.

Para o caso linear, apresenta-se uma análise paramétrica comparando resultados obtidos com a solução analítica e com a solução aproximada a fim de validar o método aproximado. Validada a formulação aproximada para o caso linear, inclui-se na análise a não-linearidade da fundação e estuda-se o efeito desta em simultâneo com a variação de parâmetros importantes como a velocidade de deslocamento da carga, frequência do carregamento, inércia rotacional da seção e força axial compressiva. Todos os cálculos e as rotinas necessárias à obtenção dos resultados apresentados no presente trabalho foram obtidos com a ajuda do software de modelagem e simulação matemática MAPLE na sua versão 11.0.

2 FORMULAÇÃO

2.1 Equação diferencial do problema

Seja a porção de viga infinita de seção transversal constante, apoiada sobre base elástica de tipo Winkler (ver Figura 1), a qual se encontra submetida à ação de uma carga transversal $q(x,t)$ variando arbitrariamente no tempo e no espaço, e submetida também a uma força axial de magnitude constante P .

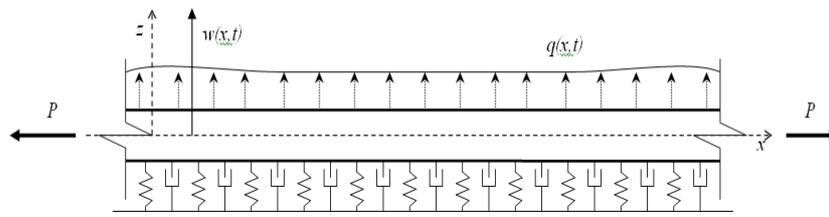


Figura 1: Viga prismática de comprimento infinito, apoiada sobre fundação elástica com amortecimento viscoso, submetida a carregamento transversal e força axial.

A equação diferencial de movimento que governa o problema, em coordenadas fixas, sob a hipótese de viga-coluna de Euler-Bernoulli (considerando somente deformação por flexão), e considerando um de amortecimento de tipo viscoso devido à presença da fundação elástica, é dada pela seguinte expressão:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + kw(x,t) = q(x,t) \quad (1)$$

onde E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia da seção transversal, P é a força axial (considerando força de tração como positiva), k é o coeficiente de rigidez linear da base elástica, C é o coeficiente de amortecimento, m é a massa por unidade de comprimento da viga e $w(x,t)$ é o deslocamento vertical. Na Eq. (1) é considerada apenas a inércia translacional. Se for considerada também a inércia à rotação da seção, conhecida como a hipótese de viga-coluna de Rayleigh, a equação que governa o problema passa a ser dada por:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - mr^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + kw(x,t) = q(x,t) \quad (2)$$

onde r é o raio de giração da seção transversal da viga.

Para representar o comportamento não-linear da fundação é considerado um termo adicional na equação de movimento do tipo cúbico (Andrade, 1993; Serebrenick, 2004; Chien & Chen, 2005), obtendo-se:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - mr^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + kw(x,t) + k_3 (w(x,t))^3 = q(x,t) \quad (3)$$

2.2 Solução analítica para o caso linear

Se considerada uma carga transversal móvel, com velocidade de deslocamento constante V , é possível fazer uma transformação de coordenadas, definindo uma coordenada de móvel para o espaço dada por:

$$\eta = x - Vt \quad (4)$$

Introduzindo a Eq. (4) na Eq. (2), a equação que governa o problema linear pode ser reescrita da seguinte forma:

$$m \left[\frac{\partial^2 w(\eta, t)}{\partial t^2} - 2V \frac{\partial^2 w(\eta, t)}{\partial \eta \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w(\eta, t)}{\partial \eta^2} \right] + mr^2 \left[\frac{\partial^4 w(\eta, t)}{\partial \eta^2 \partial t^2} - 2V \frac{\partial^4 w(\eta, t)}{\partial \eta^3 \partial t} + V^2 \frac{\partial^4 w(\eta, t)}{\partial \eta^4} \right] + C \left[\frac{\partial w(\eta, t)}{\partial t} - V \frac{\partial^2 w(\eta, t)}{\partial \eta} \right] + EI \frac{\partial^4 w(\eta, t)}{\partial \eta^4} - P \frac{\partial^2 w(\eta, t)}{\partial \eta^2} + kw(\eta, t) = q(\eta, t) \quad (5)$$

Para resolver a Eq. (5), emprega-se inicialmente a transformada de Fourier, para isto define-se:

$$W(\xi, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta, t) \cdot e^{-i\xi\eta} e^{-i\Omega t} d\eta dt \quad e$$

$$Q(\xi, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(\eta, t) \cdot e^{-i\xi\eta} e^{-i\Omega t} d\eta dt \quad (6)$$

Usando as Eqs. (5) e (6), pode-se obter a transformada da resposta como:

$$W(\xi, \Omega) = \frac{Q(\xi, \Omega)}{EI\xi^4 + P\xi^2 + k - m(\Omega - V\xi)^2(1 + r^2\xi^2) + iC(\Omega - V\xi)} \quad (7)$$

Finalmente o deslocamento transversal em coordenadas móveis, $w(\eta, t)$, pode ser obtido mediante a dupla transformada inversa de Fourier dada por:

$$w(\eta, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\xi, \Omega)}{EI\xi^4 + P\xi^2 + k - m(\Omega - V\xi)^2(1 + r^2\xi^2) + iC(\Omega - V\xi)} e^{i\xi\eta} e^{i\Omega t} d\xi d\Omega \quad (8)$$

A Eq. (8) fornece a resposta do sistema na fase permanente do movimento. Se a integral dupla expressa na Eq. (8) não tiver solução analítica, pode-se obter sua solução através de integração numérica. No presente trabalho é usada a técnica da transformada discreta rápida de Fourier e a sua correspondente inversa, **FFT** e **IFFT**, algoritmos usados para calcular a **FFT** e a **IFFT** podem ser encontrados em Brigham (1974).

2.3 Solução aproximada linear pelo método de Galerkin considerando simetria na resposta

Supõe-se que a resposta do sistema $w(\eta, t)$, pode ser expressa como um somatório de N funções da seguinte forma:

$$w(\eta, t) = \sum_1^N X_n(\eta) T_n(t) \quad (9)$$

onde $X_n(\eta)$ é uma função de aproximação na coordenada móvel, que cumpre com as condições de contorno do problema e $T_n(t)$ é a amplitude modal, que é função do tempo. Considerando que a resposta da viga é simétrica, é possível trabalhar com a metade de do domínio. Este pode ser aproximado por um comprimento L o suficientemente longo para representar de forma adequada a resposta da viga infinita. Define-se então a função de aproximação genérica dada por:

$$X_n(\eta) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\eta\right) \quad (10)$$

Substituindo a Eq. (9) e a Eq. (10) na Eq.(5), multiplicando ambos os lados das equações por $X_j(\eta)$, e integrando de com respeito à coordenada η , obtêm-se o seguinte sistema desacoplado de equações diferenciais ordinárias dependentes do tempo:

$$M_n \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} + D_n \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} + K_n \cdot T(t) = \int_0^L q(\eta, t) X_n(\eta) d\eta, \quad n=1 \dots N \quad (11)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_n &= \int_0^L m \left(X_n(\eta) - r^2 \frac{\partial^2 X_n(\eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \cdot X_n(\eta) d\eta \\ D_n &= \int_0^L \left[2mV \left(r^2 \frac{\partial^3 X_n(\eta)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial X_n(\eta)}{\partial \eta} \right) + C \cdot X_n(\eta) \right] \cdot X_n(\eta) d\eta \\ K_n &= \int_0^L \left[mV^2 \left(\frac{\partial^2 X_n(\eta)}{\partial \eta^2} - r^2 \frac{\partial^4 X_n(\eta)}{\partial \eta^4} \right) + EI \frac{\partial^4 X_n(\eta)}{\partial \eta^4} - P \frac{\partial^2 X_n(\eta)}{\partial \eta^2} - CV \frac{\partial X_n(\eta)}{\partial \eta} \right] X_n(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (12)$$

Resolvidas as integrais no espaço, resolvem-se as N equações no tempo e encontram-se as amplitudes $T_n(t)$, para se obter finalmente obter a resposta aproximada. Para isto consideram-se condições iniciais nulas, i.e., em $T_n(0)$, e $\frac{\partial T_n(0)}{\partial t}$. Esta aproximação só é válida quando a velocidade da carga móvel for suficientemente pequena de tal modo que o campo de deslocamentos seja simétrico com relação à posição da carga, tal como ocorre em uma viga com carga estática. Para velocidades altas, o campo de deslocamentos perde esta simetria.

2.4 Solução aproximada linear pelo método de Galerkin considerando assimetria na resposta

Quando as condições do problema levam a uma perda de simetria na resposta, mesmo sendo o carregamento simétrico, precisa-se trabalhar com todo o domínio. Neste contexto é necessário adotar funções de aproximação que possam representar uma possível assimetria na deformada da viga. No presente trabalho é usada uma série completa de Fourier com N termos para representar a possível assimetria na resposta do sistema, ou seja:

$$w(\eta, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^N \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L}\eta\right) \cdot T_{2n-1}(t) + \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\eta\right) \cdot T_{2n}(t) \right) \quad (13)$$

onde $T_0(t)$, $T_{2n-1}(t)$ e $T_{2n}(t)$, indicam as $2N+1$ amplitudes dependentes do tempo a serem determinadas.

Usando o mesmo procedimento que para o caso simétrico, substitui-se a Eq. (13) na Eq. (5) e multiplica-se esta pela função de peso $\xi_j(\eta)$, com j variando de zero até $2N$, e integra-se de $-L$ até L . Obtém-se assim um sistema com $2N+1$ equações. As funções de peso $\xi_j(\eta)$ são dadas pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \xi_0(\eta) &= 1 \\ \xi_{2j-1}(\eta) &= \cos\left(\frac{j\pi}{L}\eta\right), \quad j = 1 \dots n \\ \xi_{2j}(\eta) &= \text{sen}\left(\frac{j\pi}{L}\eta\right), \quad j = 1 \dots n \end{aligned} \quad (14)$$

Dado o tipo de funções de aproximação e sendo o intervalo de integração de $-L$ até L , a equação gerada por $\xi_0(\eta)$ é desacoplada, sendo os pares de equações associados às coordenadas $\xi_{2n-1}(\eta)$ e $\xi_{2n}(\eta)$ acopladas entre si. O sistema de equações é determinado a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \int_{-L}^L -q(\eta, t) + m \left(\frac{d^2}{dt^2} T_0(t) \right) + k T_0(t) + C \left(\frac{d}{dt} T_0(t) \right) d\eta \\
 R_{j2-1} &= \left(m \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j-1}(t) \right) + \frac{P \pi^2 j^2 T_{2j-1}(t)}{L^2} + k T_{2j-1}(t) + C \left(\frac{d}{dt} T_{2j-1}(t) \right) \right. \\
 &\quad + \frac{EJ \pi^4 j^4 T_{2j-1}(t)}{L^4} - \frac{m r^2 V^2 \pi^4 j^4 T_{2j-1}(t)}{L^4} - \frac{m V^2 \pi^2 j^2 T_{2j-1}(t)}{L^2} - \frac{C V \pi j T_{2j}(t)}{L} \\
 &\quad \left. + \frac{m r^2 \pi^2 j^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j-1}(t) \right)}{L^2} - \frac{2 m V \pi j \left(\frac{d}{dt} T_{2j}(t) \right)}{L} - \frac{2 m r^2 V \pi^3 j^3 \left(\frac{d}{dt} T_{2j}(t) \right)}{L^3} \right) L + \int_{-L}^L q(\eta, t) \cos\left(\frac{\pi j \eta}{L}\right) d\eta \\
 R_{2j} &= \left(m \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j}(t) \right) + C \left(\frac{d}{dt} T_{2j}(t) \right) + \frac{m r^2 \pi^2 j^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j}(t) \right)}{L^2} + \frac{C V \pi j T_{2j-1}(t)}{L} \right. \\
 &\quad + \frac{P \pi^2 j^2 T_{2j}(t)}{L^2} + k T_{2j}(t) - \frac{m V^2 \pi^2 j^2 T_{2j}(t)}{L^2} + \frac{2 m V \pi j \left(\frac{d}{dt} T_{2j-1}(t) \right)}{L} \\
 &\quad \left. + \frac{EJ \pi^4 j^4 T_{2j}(t)}{L^4} - \frac{m r^2 V^2 \pi^4 j^4 T_{2j}(t)}{L^4} + \frac{2 m r^2 V \pi^3 j^3 \left(\frac{d}{dt} T_{2j-1}(t) \right)}{L^3} \right) L + \int_{-L}^L q(\eta, t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi j \eta}{L}\right) d\eta \quad (15)
 \end{aligned}$$

onde $R_j = 0$, com $j = 1 \dots N$

2.5 Equação de Movimento Não-Linear Adimensional

Com o objetivo de se ter uma sensibilidade da influência das grandezas estudadas na análise paramétrica, adimensionaliza-se a equação de movimento. Para isto define-se a seguinte coordenada adimensional no espaço móvel:

$$\zeta = \frac{\eta}{L} \quad (16)$$

e os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{kL^4}{EI} & \beta_3 &= \frac{k_3 L^6}{EI} & f_1 &= \frac{V}{L} \\
 \rho &= \frac{r}{L} & C_1 &= \frac{C}{m} & P_1 &= \frac{PL^2}{EI^2 \pi^2} \\
 \alpha &= \frac{a}{L}, & T_1 &= \sqrt{\frac{mL}{EI}}, & Q_1 &= \frac{qL^3}{EI} \quad (17)
 \end{aligned}$$

Definindo o campo de deslocamento adimensional com respeito à coordenada do espaço móvel como $w^*(\zeta, t) = w(\eta, t)/L$ e considerando os parâmetros adimensionais da equação Eq. (3), obtém-se a seguinte equação de movimento não-linear adimensional:

$$\begin{aligned} T_1^2 \left[\frac{\partial^2 w^*(\zeta, t)}{\partial t^2} - 2f_1 \frac{\partial^2 w^*(\zeta, t)}{\partial \zeta \partial t} + f_1^2 \frac{\partial^2 w^*(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} \right] - T_1^2 \rho^2 \left[\frac{\partial^4 w^*(\zeta, t)}{\partial \zeta^2 \partial t^2} - 2f_1 \frac{\partial^4 w^*(\zeta, t)}{\partial \zeta^3 \partial t} + f_1^2 \frac{\partial^4 w^*(\zeta, t)}{\partial \zeta^4} \right] + \\ C_1 \left[\frac{\partial w^*(\zeta, t)}{\partial t} - f_1 \frac{\partial w^*(\zeta, t)}{\partial \zeta} \right] + \frac{\partial^4 w^*(\zeta, t)}{\partial \zeta^4} - P_1 \pi^2 \frac{\partial^2 w^*(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + \beta_1 w^*(\zeta, t) \pm \beta_3 (w^*(\zeta, t))^3 = q(\zeta, t) \end{aligned} \quad (18)$$

Para um carregamento distribuído, a correspondente função de carregamento adimensional no espaço móvel é dada por:

$$q(\zeta, t) = Q_1 \left[H\left(\zeta + \frac{\alpha}{2}\right) - H\left(\zeta - \frac{\alpha}{2}\right) \right] f(t) \quad (19)$$

onde $f(t)$, é a função que define a variação da amplitude do carregamento ao longo do tempo.

2.6 Solução para o caso não-linear considerando simetria

Para os casos em que há simetria da resposta, a aproximação pode ser feita usando apenas a metade do domínio discretizado. Como o domínio é adimensional, o intervalo de integração é agora definido na coordenada adimensional ζ . Nesta caso, os limites de integração para minimizar o resíduo situam-se entre 0 e 1.

Supõe-se que a resposta do sistema e a função peso são dadas por:

$$w(\zeta, t) = \sum_{n=1}^N X_n(\zeta) T_n(t) \quad (20)$$

Substituindo a Eq. (20) em Eq. (18) se obtém o resíduo a minimizar, R . Para a montagem do sistema de equações, convém separar o resíduo R em duas partes: uma, a parcela linear R_L , cuja determinação é feita da mesma forma que para a análise linear, e outra a parcela não-linear R_{NL} , que é produto do termo não-linear da fundação, obtendo-se um sistema de equações não-lineares dado por:

$$EqL_j + EqNL_j = 0, \text{ para } j = 1 \dots N. \quad (21)$$

com:

$$EqL_j = \int_0^1 R_L \cdot X_j \cdot d\zeta; \quad EqNL_j = \int_0^1 R_{NL} \cdot X_j \cdot d\zeta \quad (22)$$

Eq. (21) define o sistema de equações diferenciais a resolver, onde EqL_j representa a parte linear da equação e $EqNL_j$ representa a parte não-linear, gerada pelo termo não-linear cúbico da fundação elástica.

Supondo uma resposta simétrica, a função de aproximação é dada por:

$$X_n(\zeta) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \zeta\right) \quad (23)$$

Da mesma forma que para o caso linear, dada a ortogonalidade de $X_n(\eta)$, e considerando a simetria da resposta, a parcela linear do sistema de equações definido em Eq. (21) fica desacoplada, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$EqL_j = EqL_n = Ms_n \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} + Ds_n \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} + Ks_n T_n(t) - \int_0^1 q(\zeta, t) X_n(\zeta) d\zeta, \quad n=1..N \quad (24)$$

onde:

$$\begin{aligned} Ms_n &= \int_0^1 T_1^2 \left(X_n(\zeta) - \rho^2 \frac{\partial^2 X_n(\zeta)}{\partial \zeta^2} \right) X_n(\zeta) d\zeta \\ Ds_n &= \int_0^1 \left[2T_1^2 f_1 \left(\rho^2 \frac{\partial^3 X_n(\zeta)}{\partial \zeta^3} - \frac{\partial X_n(\zeta)}{\partial \zeta} \right) + C_1 X_n(\zeta) \right] X_n(\zeta) d\zeta \\ Ks_n &= \int_0^1 \left[T_1^2 f^2 \left(\frac{\partial^2 X_n(\zeta)}{\partial \zeta^2} - \rho^2 \frac{\partial^4 X_n(\zeta)}{\partial \zeta^4} \right) + \frac{\partial^4 X_n(\zeta)}{\partial \zeta^4} - P_1 \pi^2 \frac{\partial^2 X_n(\zeta)}{\partial \zeta^2} - C_1 f_1 \frac{\partial X_n(\zeta)}{\partial \zeta} + \beta_1 X_n(\zeta) \right] X_n(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (25)$$

A parte não-linear do sistema de equações $EqNL_j$ é definida por:

$$EqNL_j = \pm \beta_3 \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^N X_n(\zeta) T_n(t) \right)^3 X_j(\zeta) d\zeta, \quad j=1..N \quad (26)$$

Neste caso a parcela não-linear do sistema de equações fica acoplada. O sistema final será a soma das parcelas linear e não-linear.

2.7 Solução para o caso não-linear considerando assimetria

Para velocidades muito próximas ou superiores à velocidade crítica, a resposta do sistema perde simetria, mesmo tendo simetria no carregamento. Assim, é necessário usar a formulação que consegue descrever esta assimetria, usando a aproximação por série completa de Fourier. Além disto, é necessário considerar a integração no intervalo de -1 a 1. Neste caso, a resposta adimensional $w(\zeta, t)$, é dada por:

$$w(\zeta, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^N (\cos(n\pi\zeta).T_{2n-1}(t) + \text{sen}(n\pi\zeta).T_{2n}(t)) \quad (27)$$

onde $T_0(t)$, $T_{2n-1}(t)$ e $T_{2n}(t)$ indicam as $2N+1$ amplitudes no tempo a serem determinadas.

Usando o mesmo procedimento que no caso linear, definem-se as funções de ponderação:

$$\begin{aligned} \psi_0(\zeta) &= 1 \\ \psi_{2j-1}(\zeta) &= \cos(j\pi\zeta), \quad j=1..N \\ \psi_{2j}(\zeta) &= \text{sen}(j\pi\zeta), \quad j=1..N \end{aligned} \quad (28)$$

Substituindo Eq.(27) em Eq.(18), obtém-se o resíduo a minimizar, que pode ser separado na soma duas parcelas, como no caso simétrico não-linear: uma parcela linear e outra parcela não-linear. Assim, multiplicando o resíduo pela função de ponderação $\psi_j(\zeta)$ e integrando com respeito ζ , o sistema de equações toma a forma:

$$EqL_j + EqNL_j = 0, \quad \text{para } j=0 \dots 2N. \quad (29)$$

A parte linear EqL_j , análogo ao caso da análise linear, fica desacoplada para $j=0$, e acoplada por pares para $j=1...2N$, a saber:

$$EqL_0 = \int_{-1}^1 C_1 \left(\frac{d}{dt} T_0(t) \right) + T_1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} T_0(t) \right) + \beta_1 T_0(t) - q(\zeta, t) d\eta$$

$$EqL_{j2-1} = \pi^4 j^4 T_{2j-1}(t) + T_1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j-1}(t) \right) + \beta_1 T_{2j-1}(t) + C_1 \left(\frac{d}{dt} T_{2j-1}(t) \right) + P_1 \pi^4 j^2 T_{2j-1}(t) \\ + T_1^2 \rho^2 \pi^2 j^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j-1}(t) \right) - T_1^2 f_1^2 \pi^2 j^2 T_{2j-1}(t) - C_1 f_1 \pi j T_{2j}(t) - 2 T_1^2 f_1 \pi j \left(\frac{d}{dt} T_{2j}(t) \right) \\ - T_1^2 \rho^2 f_1^2 \pi^4 j^4 T_{2j-1}(t) - 2 T_1^2 \rho^2 f_1 \pi^3 j^3 \left(\frac{d}{dt} T_{2j}(t) \right) + \int_{-1}^1 q(\zeta, t) \cos(\pi j \zeta) d\zeta$$

$$EqL_{2j} = T_1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j}(t) \right) + C_1 f_1 \pi j T_{2j-1}(t) + P_1 \pi^4 j^2 T_{2j}(t) + \pi^4 j^4 T_{2j}(t) + C_1 \left(\frac{d}{dt} T_{2j}(t) \right) \\ - T_1^2 f_1^2 \pi^2 j^2 T_{2j}(t) + 2 T_1^2 f_1 \pi j \left(\frac{d}{dt} T_{2j-1}(t) \right) + \beta_1 T_{2j}(t) + T_1^2 \rho^2 \pi^2 j^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j}(t) \right) \\ - T_1^2 \rho^2 f_1^2 \pi^4 j^4 T_{2j}(t) + 2 T_1^2 \rho^2 f_1 \pi^3 j^3 \left(\frac{d}{dt} T_{2j-1}(t) \right) + \int_{-1}^1 q(\zeta, t) \sin(\pi j \zeta) d\zeta \quad (30)$$

As expressões contidas em Eq. (30) compõem a parcela linear do sistema de equações a resolver para a determinação das amplitudes no tempo $T_j(t)$.

A parcela não-linear do sistema de equações é dada por:

$$EqNL_j = \pm \beta_3 \int_0^1 \left(T_0(t) + \sum_{n=1}^N (\cos(n\pi\zeta) T_{2n-1}(t) + \sin(n\pi\zeta) T_{2n}(t)) \right)^3 X_j(\zeta) d\zeta, j = 0..2N \quad (31)$$

Representar a solução quando a resposta do sistema não tem simetria demanda um número maior de funções de aproximação que no caso simétrico, tornando extenso o número de operações contidas em Eq. (31). Portanto, é necessário realizar algumas manipulações algébricas em Eq. (31) de tal forma a diminuir o número de operações. Um exemplo de manuseio algébrico encontra-se no trabalho de Paullo (2010), onde é realizada uma manipulação da parcela não linear reduzindo o número de operações à metade. O sistema final de equações é resolvido numericamente através do método de integração de Runge-Kutta.

3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

3.1 Exemplos da análise linear e validação da formulação aproximada

Na Tabela 1 são apresentados os parâmetros físicos e geométricos da viga infinita a ser utilizada nos exemplos apresentados nesta seção, supondo uma viga de seção constante e de material isotrópico.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Rigidez à flexão	EI	kNm^2	363.35
Massa linear	m	kg	297.5
Rigidez da fundação elástica	k	MN/m^2	77.17
Coefficiente de amortecimento Crítico	Cr	MN/s/m^2	300

Tabela 1: Propriedades físicas e mecânicas do sistema a analisar.

3.1.1 Viga com carga móvel de magnitude constante e distribuída uniformemente em um trecho finito

Considera-se que o carregamento vertical é uniformemente distribuído num trecho finito de comprimento a com intensidade constante q . A carga se desloca com velocidade constante V , como ilustrado na Figura 2. A origem da coordenada móvel encontra-se no centro do carregamento.

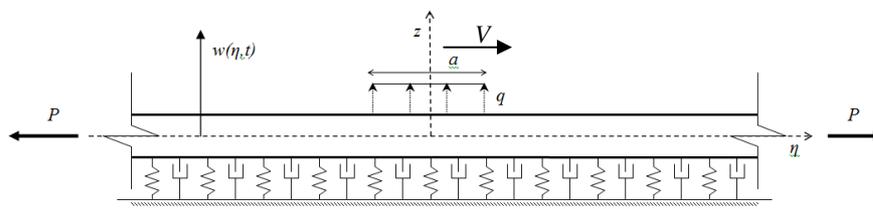


Figura 2: Viga submetida a carregamento móvel uniformemente distribuído

Na Tabela 2, são mostradas as propriedades do carregamento aplicado à viga, usadas no estudo paramétrico apresentado a seguir.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Resultante da Carga	Q	kN	-40.0
Intensidade de carga	q	kN/m	297.5
Comprimento da extensão da carga	a	m	0,1525

Tabela 2: Propriedades do carregamento móvel.

3.1.2 Resposta na fase permanente e influência do raio de giração

A resposta do sistema na fase permanente do movimento tem uma configuração constante na coordenada móvel ao longo do tempo (ver Figura 3), i.e., a forma da deformada permanece constante na coordenada móvel, o que significa que, em coordenadas reais, a deformada se desloca na mesma velocidade que o carregamento.

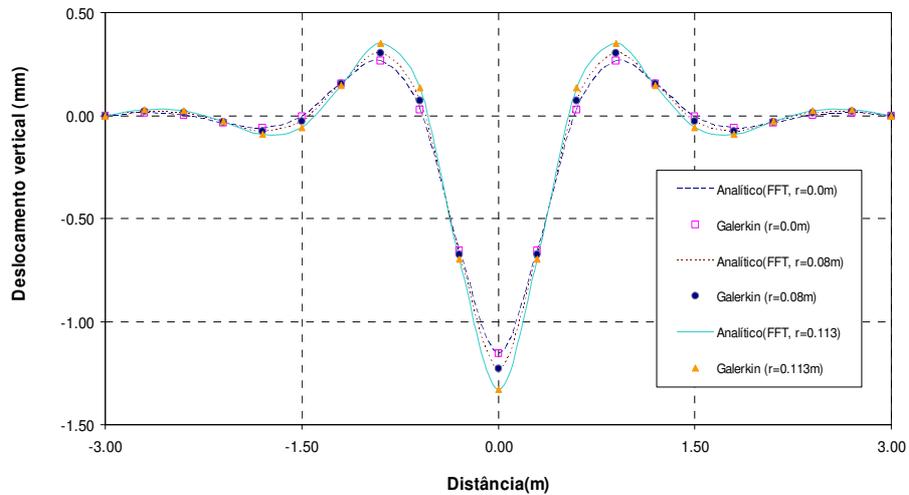


Figura 3: Comparação do deslocamento vertical na fase permanente entre a solução analítica e Galerkin (aproximação simétrica), quando $C=0.01Cr$, $V=130.0$ m/s, $P=-2MN$ $N=15$, $L=3m$.

A Figura 3 mostra também como o aumento do raio de giração da seção da viga, r , se traduz em um aumento no valor dos deslocamentos. Os resultados também mostram que a análise pelo método de Galerkin, com consideração de simetria na resposta, logra reproduzir com precisão as respostas obtidas mediante a solução analítica da viga infinita usando a transformada de Fourier.

3.1.3 Influência da velocidade de deslocamento da carga

Na Figura 4 apresenta-se a variação do valor do deslocamento máximo da viga em função da velocidade do carregamento para dois valores do raio de giração. Apresenta-se tanto a solução analítica quanto a aproximada para o caso de simetria na resposta.

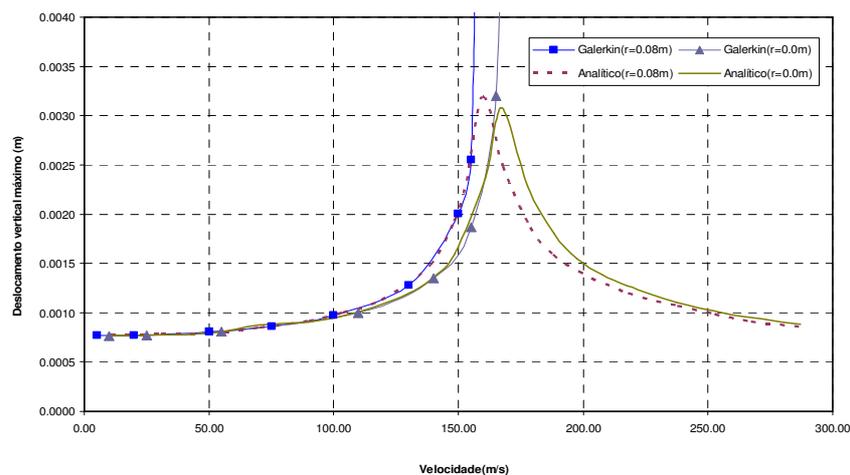


Figura 4: Variação do deslocamento vertical máximo em função da velocidade da carga móvel. $C=0.05Cr$, $P=-2MN$ e $r = 0.08m$. Aproximação simétrica.

Na Figura 4, a solução por Galerkin considerando simetria aproxima de forma adequada a resposta exata para valores de velocidade menores que a velocidade crítica (velocidade onde o deslocamento se torna máximo). No entanto, conforme o valor da velocidade se aproxima do valor crítico, o método de Galerkin considerando simetria se afasta da resposta exata, tendendo a flecha máxima para infinito na vizinhança da velocidade crítica. Isto porque a resposta do sistema perde a simetria quando o valor da velocidade de carregamento se aproxima da velocidade crítica.

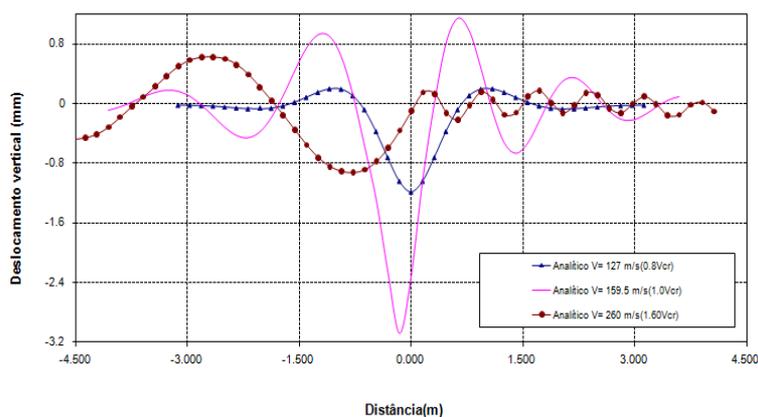


Figura 5: Comportamento da deformada. Solução analítica para distintos valores de velocidade. $C=0.05Cr$, $P=2MN$ e $r = 0.08m$.

Na Figura 5, pode-se observar que a configuração da deformada é simétrica com respeito ao carregamento para uma velocidade igual a 80% da velocidade crítica. Para uma velocidade igual à velocidade crítica o sistema perde simetria, localizando-se o deslocamento máximo à esquerda da origem, i.e., após a passagem do carregamento. Para um valor de velocidade superior à velocidade crítica ($1.6Vcr$), o sistema perde totalmente a simetria. Resposta similar foi encontrada por Frýba (1972). Assim, para analisar sistemas submetidos a altas velocidades, é necessário utilizar funções que consigam representar a assimetria da resposta.

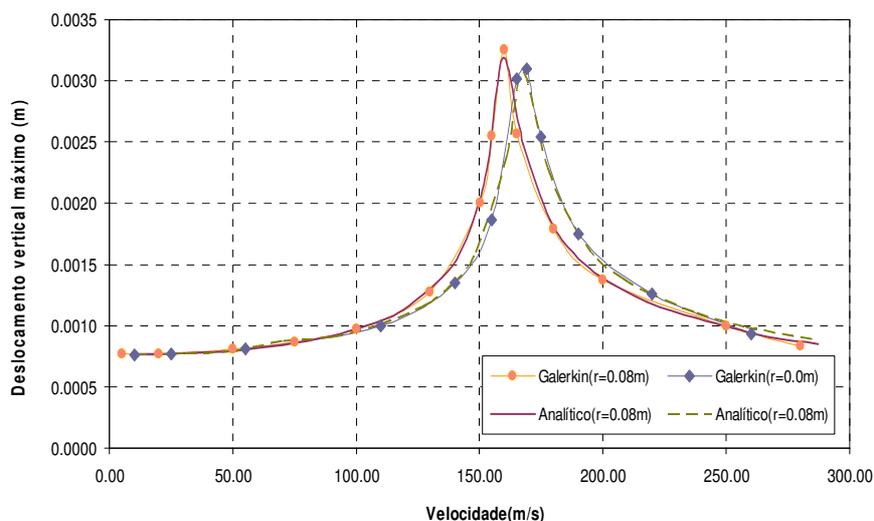


Figura 6: Deslocamentos máximos em função da velocidade para distintos valores de r . $C=0.05Cr$, $P=2MN$, $N=50$, $L=8m$. Aproximação não-simétrica.

Na Figura 6, mostra-se a influência da velocidade no cálculo dos deslocamentos máximos para dois valores distintos de raio de giração, usando a formulação aproximada com séries de Fourier que considera a não-simetria na resposta. Verifica-se que a solução por Galerkin consegue representar com boa precisão os deslocamentos máximos na vizinhança da velocidade crítica e superiores a esta. Também é observado que o valor dos deslocamentos máximos aumenta e que o valor da velocidade crítica diminui com o aumento do raio de giração. Nota-se também que, para velocidades muito baixas ou muito altas, o raio de giração tem pouca influência nos deslocamentos máximos.

3.2 Exemplos da análise não-linear

3.2.1 Influência da Não-linearidade da Fundação para Altas Velocidades e Carga Distribuída de Amplitude Constante

Nesta seção é analisada a influência da não-linearidade da fundação para os casos de assimetria na resposta. Em virtude disso, é necessário adotar um trecho de integração maior para conseguir descrever de forma precisa o comportamento do sistema submetido a altas velocidades da carga móvel. Portanto, nos exemplos analisados nesta seção adota-se um comprimento de discretização de $L = 8m$. Definem-se na Tabela 7-2 os parâmetros adimensionais presentes na Eq.(17) e considerados nos exemplos desta seção.

Parâmetro Adimensional	Símbolo	Valor
Parâmetro de massa	T_1	1.8313
Parâmetro de amortecimento crítico	$C_1 cr$	1018.6166
Parâmetro de rigidez da fundação elástica linear	β_1	869927.9483
Parâmetro de rigidez não-linear da fundação elástica	β_3	-55.67×10^{10}
Parâmetro de intensidade de carga	Q_1	-369.8913
Parâmetro de extensão da carga	α	0.01905

Tabela 3: Parâmetros adimensionais para análise do comportamento assimétrico.

A Figura 7 mostra a diferença no campo de deslocamentos verticais obtidos pela análise linear e não-linear para o caso em que a velocidade da carga móvel é igual e maior que o valor crítico linear. Pode-se observar que no caso de $f_l = f_{lcr}$ a influência da não-linearidade se reflete em um aumento no valor do deslocamento máximo assim como em um ligeiro deslocamento do mesmo para a esquerda. Já para o caso de $f_l = 1.25f_{lcr}$ a não-linearidade adotada tem pouca influência nos deslocamentos.

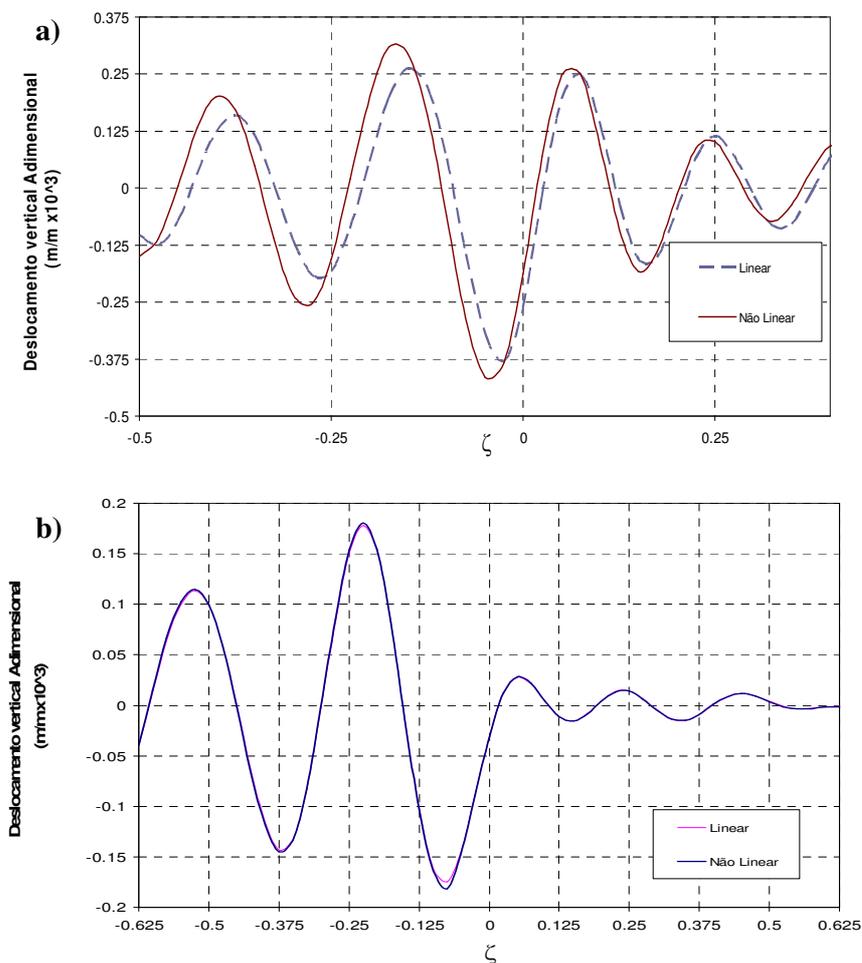


Figura 7: Deslocamento vertical adimensional. $C_l = 0.04C_{lcr}$, $P_l = -35.69$, $N = 15$, $\rho = 0$. a) $f_1 = 25.25 (f_1 = f_{1cr})$, b) $f_1 = 20 (f_1 = 1.25f_{1cr})$.

Na Figura 8 mostra-se a variação do deslocamento máximo em função da variação da velocidade, considerando a presença de força axial compressiva e a influência da inércia rotacional. Observa-se que a influência da não-linearidade é importante na zona próxima à velocidade crítica. Para baixas velocidades e para velocidades muito maiores que a crítica, as respostas lineares e não-lineares são praticamente coincidentes. A diferença entre o deslocamento máximo linear e não-linear, indicada pela curva tracejada, reflete tal comportamento. Isto é esperado já que a não-linearidade torna-se mais importante à medida que os deslocamentos vão aumentando. É importante salientar que estes resultados estão condicionados ao coeficiente de rigidez não-linear da fundação usado neste exemplo.

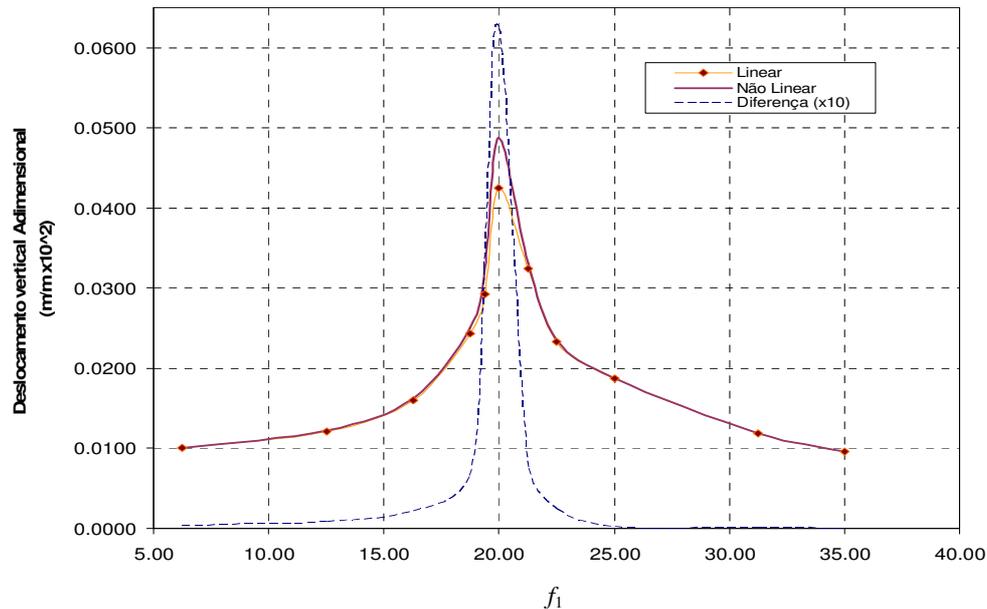


Figura 8: Deslocamento máximo em função da velocidade. $C_1 = 0.04C_{1cr}$, $P_1 = -35.69$, $N = 15$, $\rho = 0.01$.

3.2.2 Análise não-linear com carga uniformemente distribuída com amplitude harmônica estacionária ($f_1 = \theta$).

Para o caso da uma carga harmônica estacionária uniformemente distribuída, a resposta é sempre simétrica. Portanto, podem ser usadas as expressões deduzidas Eq.(24), Eq.(25) e Eq. (26). Para os exemplos desenvolvidos nesta seção, a integração no espaço é feita considerando $L=10m$ e os parâmetros adimensionais apresentados na Tabela 4.

Parâmetro Adimensional	Símbolo	Valor
Parâmetro de Massa	T_1	2.8614
Parâmetro de Amortecimento Crítico	C_{1cr}	1018.6166
Parâmetro de Rigidez linear da fundação elástica	β_1	2123847.53
Parâmetro de Rigidez Não-linear da fundação elástica	β_3	-212.38×10^{10}
Parâmetro de intensidade de carga	Q_1	-722.4439
Parâmetro de extensão da carga	α	0.01524

Tabela 4: Parâmetros adimensionais para análise da viga com carga harmônica.

Analisa-se agora o efeito da não-linearidade da fundação no cálculo dos deslocamentos máximos no sistema quando há variação da frequência de excitação do carregamento harmônico. São considerados dois valores de inércia rotacional.

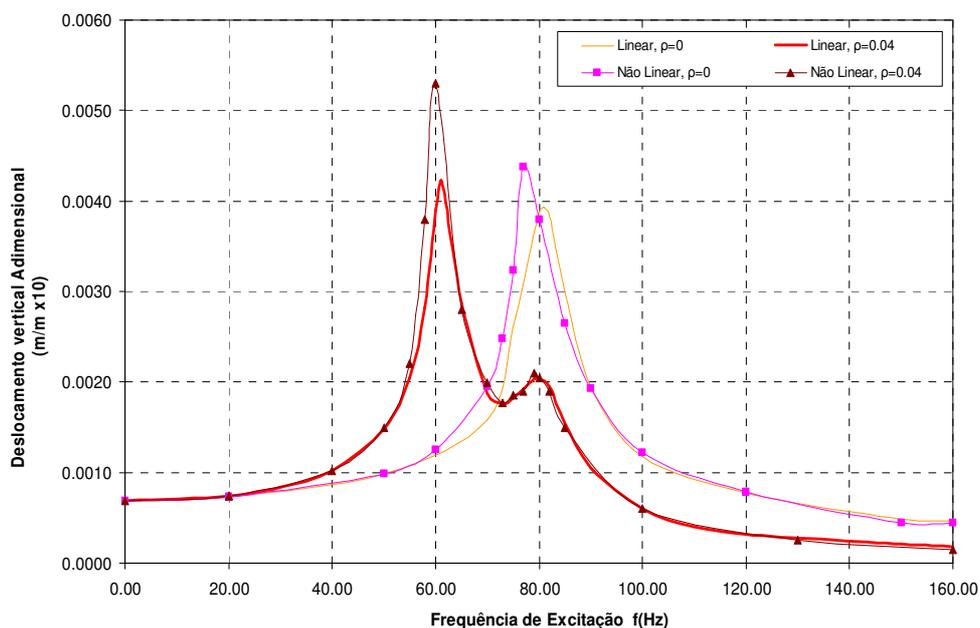


Figura 9: Variação do deslocamento máximo em função de f : $f_I=0$, $P_I=0$, $C_I=0.05C_{Icr}$, $\beta_3=-212.38 \times 10^{10}$.

Na Figura 9 observa-se que, para o caso em que não é considerada a inércia rotacional, i.e., $\rho=0$, à medida que aumenta a frequência da excitação o valor do deslocamento máximo cresce até atingir um máximo correspondente à frequência crítica, que, para o caso linear, é de 81Hz. No caso não-linear o pico sofre um pequeno deslocamento para a esquerda, com o máximo deslocamento ocorrendo para 77Hz.

Observa-se também, ainda na Figura 9, que, quando se considera um raio de giração de $\rho=0.04$, o pico de ressonância se desloca para a esquerda, ocorrendo o valor máximo para 61 Hz no caso linear e 59 Hz no caso não-linear. Além disto, há um aumento no valor do deslocamento máximo com respeito ao sistema sem inércia rotacional. Também é observada a existência de um pico de menor valor localizado à direita do pico de maior valor. Isto mostra que, para o valor de ρ adotado neste exemplo a inércia rotacional torna-se importante dando origem a uma segunda frequência de ressonância. Para altas frequências os deslocamentos máximos do sistema com $\rho=0.04$ são menores que para o sistema sem inércia rotacional.

3.2.3 Análise não-linear com carga uniformemente distribuída com amplitude harmônica móvel ($f_I \neq 0$).

Nesta seção é analisado o caso de carga harmônica com velocidade de deslocamento não-nula. Neste caso, a probabilidade de se ter assimetria nos deslocamentos é maior que no caso de carga de amplitude constante, mesmo para baixas velocidades. Portanto, para os exemplos desenvolvidos nesta seção são usadas as expressões deduzidas em Eq.(29), Eq.(30) e Eq.(31), que correspondem à análise não-linear com assimetria na resposta. A integração no espaço é feita considerando os mesmos parâmetros adimensionais da Tabela 4.

A Figura 10 mostra a relação entre o deslocamento máximo e a velocidade, considerando inércia rotacional e força axial; para uma frequência de excitação de 50 Hz. Nesta figura pode

ser observado que a não linearidade na fundação aumenta os deslocamentos máximos. Em ambos os casos, linear e não linear, destaca-se a presença de dois picos. O maior deles em torno de $f_l = 70$ e outro de menor tamanho para um valor de f_l em torno de 235. Portanto, identificam-se duas velocidades críticas para este caso, isto pela consideração da inércia rotacional. A consideração da não linearidade de sinal negativo traduz-se em um incremento acentuado no valor dos deslocamentos na vizinhança da primeira velocidade crítica.

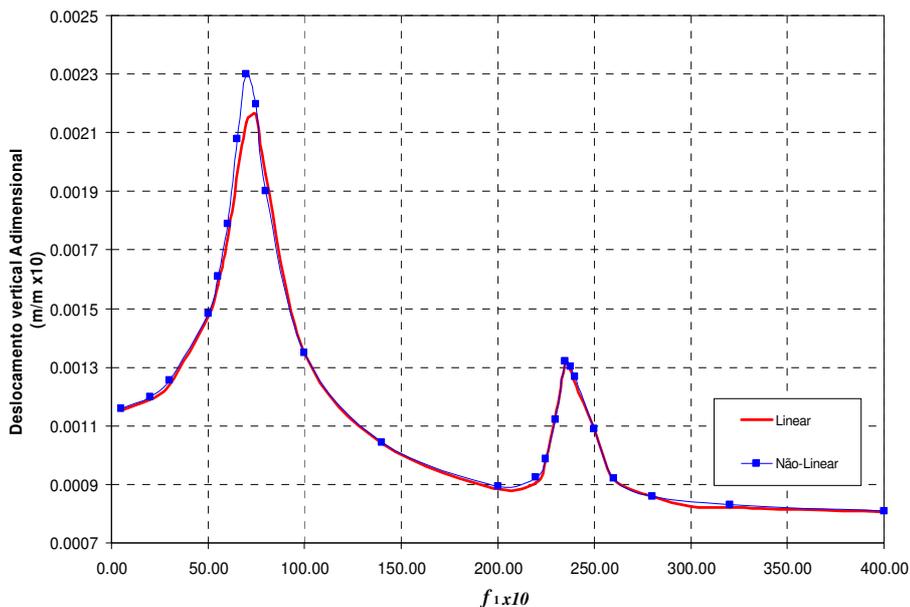


Figura 10: Deslocamento máximo em função da velocidade: $PI = -8.933$, $CI = 0.05CI_{cr}$, $\rho = 0.008$, $f = 50\text{Hz}$.

4 CONCLUSÕES

A formulação aproximada pelo método de Galerkin considerando simetria no campo de deslocamentos mostra-se útil para valores de velocidade menores que a velocidade crítica onde os deslocamentos atingem um valor máximo. Além disto, a formulação simétrica leva a uma menor quantidade de operações, levando a um baixo esforço computacional.

Os resultados da análise linear mostram que, quanto maior o valor do raio de giração, maior é o valor do deslocamento vertical máximo e que o valor da velocidade do carregamento tem grande influência no valor do deslocamento máximo e na configuração deformada da viga. A velocidade crítica diminui quando se considera o efeito da inércia a rotação.

Para velocidades baixas, o campo de deslocamentos é simétrico com relação ao eixo do carregamento e se desloca na mesma velocidade que o carregamento. Quando a velocidade se aproxima ou é superior ao valor crítico o campo de deslocamentos torna-se assimétrico, ocorrendo a amplitude máxima de vibração após a passagem do carregamento. Observa-se que uma formulação usando séries de Fourier completa consegue representar o comportamento assimétrico do sistema.

A formulação aproximada, usando o método de Galerkin e séries de Fourier, apresenta um bom desempenho nos exemplos analisados e, portanto, apresenta condições favoráveis para a sua utilização no estudo de casos que incluam não-linearidade nas equações de movimento.

A consideração da não-linearidade da fundação acrescentando um termo cúbico à equação de movimento se traduz em um incremento ou decremento dos deslocamentos máximos, segundo o sinal do termo não-linear.

Para o caso de uma carga móvel de amplitude constante, a não-linearidade negativa da fundação tem importante influência na fase transiente da vibração modificando a configuração da mesma. Na fase permanente a influência se traduz em um incremento no valor dos deslocamentos. Este incremento é pouco importante para valores de velocidades afastadas da velocidade crítica, mas torna-se importante na vizinhança da velocidade crítica.

Para o caso de uma carga harmônica, observa-se que a não-linearidade modifica de forma importante a fase transiente da vibração. Na fase permanente a influência da não-linearidade se reflete apenas em um incremento no valor da amplitude de vibração. Ao se variar a frequência da excitação, observa-se que o valor dos deslocamentos máximos aumenta quando aumenta o valor da frequência, chegando a um valor máximo quando se atinge a frequência crítica, e diminuindo quando ultrapassado este valor, de forma similar que para a variação da velocidade.

Observa-se também que a não-linearidade diminui o valor da frequência crítica. Além disto, ao se aumentar o raio de giração, aparece uma segunda frequência crítica com um menor pico de ressonância, o que reflete a influência da inércia rotacional na vibração.

Para o caso de uma carga harmônica móvel, a influência da não-linearidade se traduz em um incremento nos deslocamentos, sendo este mais pronunciado quando o valor do carregamento é próximo do valor máximo.

REFERENCES

- Andrade, E. Q., *Instabilidade e vibrações de colunas esbeltas sobre base elástica*. PUC-Rio, 1993.
- Brigham, O., *The fast Fourier transform*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1974.
- Chien, R-D., e Chen, C-S., Nonlinear vibration of laminated plates on a nonlinear elastic foundation, *Composite Structures*, v. 70: 90-99, 2005.
- Fýbra, L., 1972. *Vibrations of solids and structures under moving loads*. Prague: Academy of Sciences Prague, 1972.
- Graff, K. F., *Wave motion in elastic solids*, Oxford University Press, New York: Dover Publications INC., 174-195, 1975.
- Hetényi, M., *Beams on elastic Foundation*, The University of Michigan Press, Michigan: Ann Arbor, 1-33, 1946.
- Kim, S-M., Stability and dynamic response of Rayleigh beam-columns on an elastic foundation under moving loads of constant amplitude and harmonic variation. *Engineering Structures*, 27:869-880, 2005.
- Nguyen, V-H., e Duhamel, D., Finite element procedure for nonlinear structures in moving coordinates. Part II: Infinite beam under moving harmonic loads. *Computers and Structures*, 86:2056-2063, 2008.

- Serebrenick, G., *Análise da estabilidade de colunas esbeltas parcialmente enterradas em uma fundação elástica não-linear*. PUC-Rio, 2004.
- Paullo M., L. F., *Análise Dinâmica de Vigas Apoiadas em Fundação Elástica sob a Ação de Cargas Móveis*, PUC-Rio, 2010.
- Vlasov, V. Z., e Leont'ev, N. N., *Beams, plates and Shells on elastic foudations*, Israel Program for Scientific Translation, 59-65, 1966.