

## ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE GRUPOS DE ESTACAS EM UMA CAMADA FINITA DE SOLO ACOPLANDO ELEMENTOS FINITOS COM ELEMENTOS DE CONTORNO

**Dimas B. Ribeiro<sup>a</sup>, João B. Paiva<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Av. Prof. Almeida Prado, tv. 2, 83, São Paulo, SP, Brasil, [dimas.ribeiro@usp.br](mailto:dimas.ribeiro@usp.br), <http://www.pef.poli.usp.br>*

<sup>b</sup>*Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos, SP, Brasil, [paiva@sc.usp.br](mailto:paiva@sc.usp.br), <http://www.set.eesc.usp.br>*

**Palavras Chave:** Interação estaca-solo, elementos finitos, elementos de contorno.

**Resumo.** O objetivo deste trabalho é analisar numericamente a interação de grupos de estacas com uma camada de solo apoiada em um plano indeslocável. O solo é modelado como um sólido tridimensional utilizando o método dos elementos de contorno com as soluções fundamentais de Kelvin. Para reduzir o número de graus de liberdade da malha sem prejudicar a qualidade dos resultados, são empregados elementos de contorno infinitos para simular o comportamento das variáveis de campo a grandes distâncias. As estacas são modeladas como barras unidimensionais empregando o método dos elementos finitos. São empregadas funções de forma do quarto grau para aproximar os deslocamentos horizontais, funções do terceiro grau para os deslocamentos verticais, funções também do terceiro grau para as tensões horizontais ao longo do fuste e funções do segundo grau para as tensões verticais do fuste. A reação da extremidade inferior da estaca é calculada considerando que a tensão seja constante ao longo da base. A análise é estática, e todos os materiais envolvidos são homogêneos, isotrópicos, elásticos e de comportamento linear.

## 1 INTRODUÇÃO

Diversos problemas práticos de engenharia envolvem a previsão do comportamento de grupos de estacas, havendo, portanto, uma demanda por códigos computacionais capazes de simular tais situações. Como o solo é formado na natureza sem qualquer tipo de controle tecnológico, propriedades complexas como anisotropia, porosidade e descontinuidades podem estar presentes. Uma formulação que inclua todas estas propriedades requer alto custo computacional, problema agravado pela necessidade de modelar-se o solo como um sólido de grandes proporções. O custo é ainda maior caso uma análise tridimensional seja necessária, podendo inclusive inviabilizá-la. Uma forma de contornar este obstáculo é incluir simplificações no desenvolvimento da formulação do solo, reduzindo o tempo de processamento do código resultante. No entanto, quanto mais simplificada for a formulação, mais distante ela se torna do problema real a ser modelado. Neste contexto, um desafio a ser vencido é obter uma ferramenta numérica que seja, ao mesmo tempo, realista e viável. Motivados por este desafio, diversos autores se dedicaram ao desenvolvimento de técnicas numéricas para a simulação de problemas de interação estaca-solo, conforme apresentado abaixo.

Caso seja possível, uma boa opção é empregar métodos analíticos, tal como no trabalho de Randolph and Wroth (1979). Tal abordagem fornece resultados precisos com baixo custo computacional, no entanto as soluções obtidas são válidas somente para problemas específicos. Outra opção é o modelo de Winkler, o qual é empregado no trabalho de Tahghighi and Konagai (2007). Neste modelo o solo é substituído por um sistema de molas equivalente e discreto, sendo sua desvantagem a dificuldade de calcular valores em pontos internos do maciço. Outro modelo que deve ser citado é o método da camada finita, conforme aplicado no trabalho de Ta and Small (1998). Aplicando esta teoria em um problema tridimensional este fica reduzido a apenas duas dimensões, no entanto este método é válido somente em problemas elásticos.

Uma ferramenta numérica poderosa que é utilizada por muitos autores (Ottaviani (1975); Chow and Teh (1991); Comodromos et al. (2005); Said et al. (2009)) é o método dos elementos finitos (MEF). O MEF é, na maioria dos casos, a opção mais eficiente e prática para a análise de estruturas. No entanto, o MEF perde um pouco da sua praticidade quando utilizado para simular o solo como um sólido infinito e tridimensional, pelo grande número de elementos necessários. Uma forma de amenizar este problema é empregando elementos infinitos, tal como realizado por Marques and Owen (1984) e Sadecka (2000).

Uma técnica numérica que pode ser considerada eficiente para este tipo de problema é o método dos elementos de contorno (MEC). Como somente o contorno do domínio do problema é dividido em elementos, a análise fica reduzida em uma dimensão. Isto diminui o custo computacional envolvido na resolução de equações, além de simplificar o armazenamento de dados. Devido a estas vantagens vários autores utilizam o MEC na análise da interação estaca-solo, conforme pode ser observado nos trabalhos citados a seguir.

O modelo de Steinbrenner, o qual considera uma camada de solo indeslocável a uma profundidade prescrita, foi aplicado em Poulos and Davies (1968), considerando uma estaca incompressível imersa no solo. Submetida a uma carga axial, esta estaca é dividida em elementos cilíndricos, cada qual submetido a uma tensão de cisalhamento uniforme. A ponta da estaca é uma base alargada, na qual se considera unicamente a tensão axial. Esta mesma formulação foi empregada em Poulos (1968), considerando então grupos de estacas. O ponto de partida é a interação de duas estacas, a partir da qual é obtido um coeficiente de influência. Para grupos com mais de duas estacas é feita uma superposição de efeitos, tomando as estacas

duas a duas. São analisados diversos grupos de estacas idênticas variando seu número e posicionamento, sendo todas submetidas ao mesmo carregamento.

Em Butterfield and Banerjee (1971) são analisados grupos de estacas ligadas por uma placa rígida. É aplicada uma força concentrada e vertical na placa, determinando então o deslocamento vertical estabelecido no sistema. Em Banerjee (1976) é feito um estudo semelhante considerando então estacas inclinadas e utilizando o método indireto das equações integrais, podendo ser aplicada na placa uma força ou um momento. Outra extensão foi adicionada a esse trabalho em Banerjee (1978), tornando possível simular um solo com módulo de elasticidade linearmente variável com a profundidade.

No trabalho de Chin and Chow (1990) o MEC é empregado na análise de grupos de estacas, porém a solução fundamental utilizada na formulação é obtida a partir de Chan et al. (1974). Esta solução corresponde a uma força concentrada aplicada no interior de um solo composto por duas camadas.

Em Mendonça and Paiva (2000) é apresentada uma formulação do MEC para a análise de grupos de estacas ligadas por uma placa flexível, considerando apenas cargas verticais aplicadas no sistema. O solo é representado como um semi-espço infinito, homogêneo, isotrópico, elástico e de comportamento linear, enquanto que as estacas são simuladas como linhas de carga aplicadas ao meio. Tal formulação foi alterada em Mendonça and Paiva (2003), representando então as estruturas de fundação com o MEF. Para a placa são utilizados elementos finitos bidimensionais, para as estacas emprega-se elementos unidimensionais e o solo é modelado com o MEC. Uma extensão desta formulação foi obtida no trabalho de Filho et al. (2005), permitindo que sejam aplicadas também cargas horizontais, mas considerando a placa rígida.

No trabalho de Almeida and Paiva (2007), estacas são modeladas como sólidos tridimensionais com o MEC e o solo, também modelado com o MEC é considerado estratificado. São empregadas as soluções fundamentais de Kelvin, sendo geradas malhas que se estendem até grandes distâncias para representar a superfície livre e as interfaces entre camadas.

Neste trabalho, é obtida uma formulação para a simulação estática de grupos de estacas imersas em uma camada de solo tridimensional. O solo é modelado com o MEC como um meio homogêneo, isotrópico, elástico e de comportamento linear, empregando as soluções fundamentais de Kelvin. Para reduzir o número de graus de liberdade necessários para a representação da superfície livre e da base da camada, são empregados os elementos de contorno infinitos apresentados no trabalho de Ribeiro and Paiva (2010) para representar o comportamento das variáveis a longas distâncias. As estacas são modeladas com o MEF utilizando elementos unidimensionais, e sua presença é computada no MEC como linhas de carga. As aproximações de deslocamento e tensão são obtidas em função do número de graus de liberdade definidos em cada caso, conforme descrito com mais detalhes nas seções posteriores. Os resultados obtidos apresentam boa concordância com os de outros autores, demonstrando a coerência da formulação proposta.

## 2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O equilíbrio de um sólido pode ser representado por uma equação integral denominada Identidade de Somigliana. Para domínios homogêneos, isotrópicos e elástico-lineares essa equação pode ser escrita como:

$$c_{ij}(y)u_j(y) + \int_S T_{ij}(x,y)u_j(x)dS(x) = \int_S U_{ij}(x,y)t_j(x)dS(x) \quad (1)$$

Esta equação é escrita para um ponto fonte  $y$  no contorno, onde o deslocamento é  $u_j(y)$ . O valor da constante  $c_{ij}$  depende do coeficiente de Poisson e da geometria do contorno em  $y$ . O ponto campo  $x$  percorre todo o contorno  $S$  onde os deslocamentos são representados por  $u_j(x)$  e as tensões por  $t_j(x)$ . Os termos  $U_{ij}(x, y)$  e  $T_{ij}(x, y)$  são as soluções fundamentais tridimensionais de deslocamento e tensão de Kelvin, respectivamente. O termo  $U_{ij}(x, y)$  é de ordem  $1/r$  e o termo  $T_{ij}(x, y)$  é de ordem  $1/r^2$  com  $r = |x - y|$ , portanto as integrais apresentam problemas de singularidade quando  $x$  se aproxima de  $y$ . Desta forma, a integral que envolve a solução fundamental de tensão, por ser de singularidade mais forte, deve ser definida como Valor Principal de Cauchy (VPC).

Para encontrar a solução da Eq. (1) numericamente, o contorno é dividido em parcelas menores nas quais os deslocamentos e tensões são aproximadas por funções de forma conhecidas. Neste trabalho estas parcelas são de dois tipos, elementos de contorno finitos (ECs) e elementos de contorno infinitos (ECIs). Os ECs empregados neste trabalho são triangulares, conforme apresentado na Figura 1.

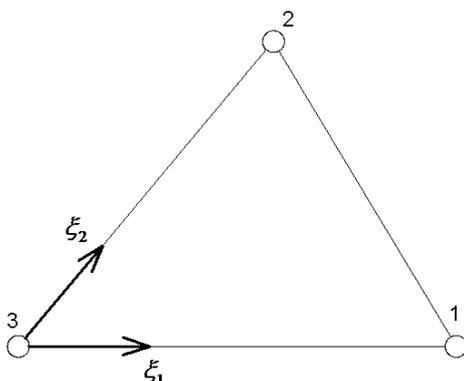


Figura 1: Elemento de Contorno Triangular.

Na Figura 1 está representado o sistema de coordenadas oblíquo local do EC,  $\xi_1 \xi_2$ , e a numeração local dos nós. As aproximações de deslocamento e tensão empregadas para este elemento são:

$$u_j = \sum_{k=1}^3 N^k u_j^k, \quad t_j = \sum_{k=1}^3 N^k t_j^k \quad (2)$$

em que

$$N^1 = \xi_1, \quad N^2 = \xi_2, \quad N^3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 \quad (3)$$

Os ECs possuem três nós e para cada um deles são definidos três deslocamentos  $u_j^k$  e três tensões  $t_j^k$ . As mesmas funções de forma lineares,  $N^k$ , são empregadas para aproximar a sua geometria:

$$x_j = \sum_{k=1}^3 N^k x_j^k \quad (4)$$

em que  $x_j^k$  são as coordenadas nodais. Para os ECIs os deslocamentos e tensões são

aproximadas empregando as mesmas funções de forma, ou seja:

$$u_j = \sum_{k=1}^{Np} N^k u_j^k, \quad t_j = \sum_{k=1}^{Np} N^k t_j^k \quad (5)$$

Cada ECI possui  $Np$  nós e não três como os ECs, apesar de empregar as mesmas funções de forma. A geometria dos ECIs, no entanto, é aproximada de outra forma, conforme será elucidado em mais detalhes na seção 3.

Substituindo a Eq. (2) e a Eq. (5) na Eq. (1), a seguinte expressão é obtida:

$$c(y)u_j(y) + \sum_{e=1}^{N_{EC}} \left\{ \sum_{k=1}^3 [\Delta T_{ij}^{ek} u_j^k] \right\} + \sum_{e=1}^{N_{ECI}} \left\{ \sum_{k=1}^{Np} [\Delta^\infty T_{ij}^{ek} u_j^k] \right\} = \sum_{e=1}^{N_{EC}} \left\{ \sum_{k=1}^3 [\Delta U_{ij}^{ek} u_j^k] \right\} + \sum_{e=1}^{N_{ECI}} \left\{ \sum_{k=1}^{Np} [\Delta^\infty U_{ij}^{ek} u_j^k] \right\} \quad (6)$$

O número de ECs é indicado por  $N_{EC}$ , enquanto o número de ECIs é indicado por  $N_{ECI}$ . Para os ECs:

$$\Delta T_{ij}^{ek} = \int_{\gamma_e} N^k T_{ij} |J| d\gamma_e, \quad \Delta U_{ij}^{ek} = \int_{\gamma_e} N^k U_{ij} |J| d\gamma_e \quad (7)$$

Na Eq. (7), o termo  $\gamma_e$  representa a área do elemento no sistema de coordenadas oblíquo local. Foi feita a transformação do sistema global para o local utilizando o Jacobiano indicado por  $|J|$ . A partir da Eq. (4), calcula-se o Jacobiano como segue:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} = 2A \quad (8)$$

sendo  $A$  a área do EC no sistema de coordenadas global. Considerando agora os ECIs computados na Eq. (6), escreve-se:

$$\Delta^\infty T_{ij}^{ek} = \int_{\gamma_e} N^k T_{ij} |^\infty J| d\gamma_e, \quad \Delta^\infty U_{ij}^{ek} = \int_{\gamma_e} N^k U_{ij} |^\infty J| d\gamma_e \quad (9)$$

O cálculo do Jacobiano  $|^\infty J|$ , que deve ser empregado para os ECIs, deve ser feito empregando funções especiais de mapeamento. Estas funções, bem como o cálculo de  $|^\infty J|$ , são descritos em detalhes na seção 3.

As integrais em (7) e (9) podem ser calculadas empregando técnicas usualmente utilizadas no MEC. As integrais que não são singulares são resolvidas numericamente empregando pontos de integração. As integrais singulares, por sua vez, devem ser tratadas de forma especial. Neste trabalho, estas integrais são calculadas empregando a técnica descrita no trabalho de Guiggiani and Gigante (1990). Por fim, o termo livre  $c_{ij}$  pode ser determinado por movimentos de corpo rígido.

Escrevendo a Eq. (6) para todos os pontos do contorno, como descrito em Beer (2001), é obtido o seguinte sistema de equações:

$$Hu = Gp \tag{10}$$

A matriz  $H$  contém as contribuições do termo livre  $c_{ij}$  e das integrais do lado esquerdo da igualdade da Eq. (6), enquanto que na matriz  $G$  são alocadas as contribuições das integrais do lado direito da igualdade da Eq. (6). Os vetores  $u$  e  $p$  contêm, respectivamente, os deslocamentos e tensões nos pontos do contorno. Este sistema pode ser reorganizado de forma a isolar todas as incógnitas do lado esquerdo da igualdade, obtendo um sistema de equações lineares cuja solução torna conhecidos todos os valores de contorno definidos na malha de ECs/ECIs.

### 3 ELEMENTO DE CONTORNO INFINITO MAPEADO

São considerados três tipos de mapeamento. No primeiro deles somente a direção  $\xi_1$  é mapeada, conforme ilustrado na Figura 2.

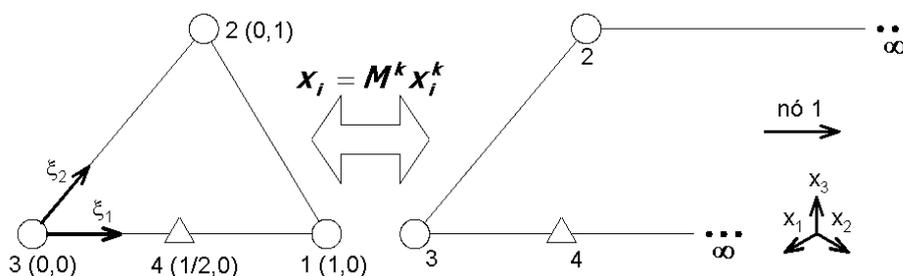


Figura 2: Mapeamento na Direção  $\xi_1$ .

Dada uma direção  $i$  no sistema de coordenadas retangular global, a coordenada  $x_i$  é escrita em função das coordenadas globais do EC de origem,  $x_i^k$ , e das funções de mapeamento  $M^k$ . No lado esquerdo da Figura 2 é indicado o EC de origem, com a numeração local dos nós e suas respectivas coordenadas homogêneas. No lado direito é apresentado o ECI, que é definido no sistema de coordenadas global, sendo que a numeração de cada nó indica o correspondente do EC de origem. Conforme pode ser observado, somente o nó 1 foi mapeado ao infinito. Por este motivo este nó não possui função de mapeamento, além de não possuir função de forma. Para auxiliar o mapeamento é criado um quarto nó, indicado na Figura 2 como nó 4. Convém ressaltar que o nó 4 possui função de mapeamento mas não possui função de forma. Isto significa que somente os nós 2 e 3 contribuem quando este ECI é integrado.

O segundo tipo de mapeamento a ser considerado é quando somente a direção  $\xi_2$  é mapeada. Isto é apresentado na Figura 3.

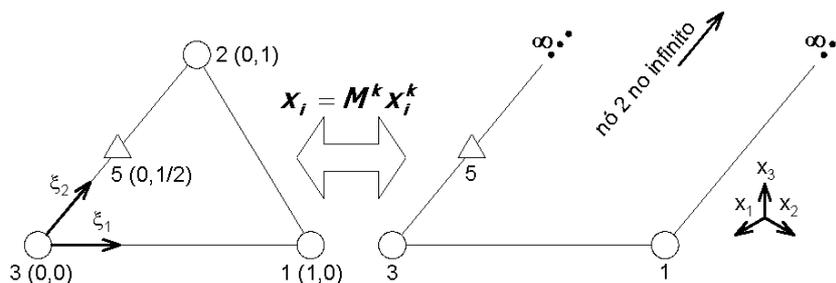


Figura 3: Mapeamento na Direção  $\xi_2$ .

Assim como na Figura 2 são representados, na Figura 3, o EC de origem e o ECI. Neste caso somente o nó 2 foi mapeado ao infinito, portanto este nó não possui função de mapeamento nem função de forma. Torna-se necessária, novamente, a criação de um nó auxiliar para o mapeamento, o qual é indicado na Figura 3 como nó 5. Como o nó auxiliar não possui função de forma, no caso do mapeamento da direção  $\xi_2$  somente os nós 1 e 3 contribuem na integral do elemento.

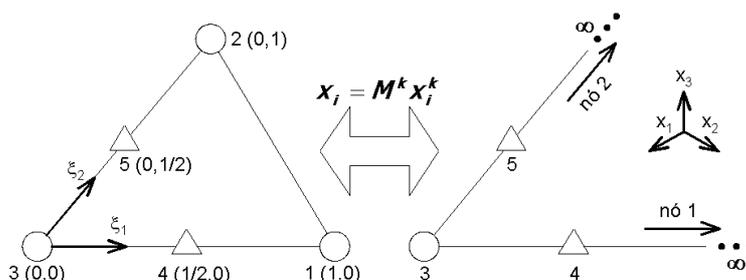


Figura 4: Mapeamento nas Direções  $\xi_1$  e  $\xi_2$ .

No terceiro e último caso as duas direções,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , são mapeadas. A Figura 4 ilustra tal situação. Assim como nas figuras anteriores, na Figura 4 são representados o EC e o ECI. Como neste caso dois nós são mapeados ao infinito, torna-se necessária a criação de dois nós auxiliares. Estes nós são indicados na Figura 4 com os números 4 e 5, e assim como anteriormente eles possuem função de mapeamento mas não possuem função de forma. Portanto, para mapeamento em duas direções, somente o nó 3 contribui na integral do elemento.

O passo seguinte é a definição das funções de mapeamento. Neste trabalho isto é feito empregando a estratégia definida em Ribeiro and Paiva (2010), a qual difere das abordagens usualmente empregadas na literatura, tal como em Moser et al. (2004). Sendo  $\xi_i$  uma direção a ser mapeada, é criada uma coordenada auxiliar  $\bar{\xi}_i(\xi_i)$  com a função de definir este mapeamento. A escolha da função  $\bar{\xi}_i(\xi_i)$  foi fundamentada no trabalho de Davis and Rabinowitz (1975), resultando na seguinte expressão:

$$\bar{\xi}_i = \frac{\xi_i}{1 - \xi_i} \quad (11)$$

Portanto, caso se queira mapear a direção  $\xi_1$ , escreve-se:

$$\bar{\xi}_1(\xi_1) = \frac{\xi_1}{1 - \xi_1} \quad (12)$$

e para mapear a direção  $\xi_2$ :

$$\bar{\xi}_2(\xi_2) = \frac{\xi_2}{1 - \xi_2} \quad (13)$$

Definida a Eq. (12) e a Eq. (13), a estratégia para a obtenção das funções de mapeamento consiste em substituir estas expressões nas funções de forma do EC de origem. Estas funções de forma são:

$$N^1 = \xi_1 \quad (14)$$

$$N^2 = \xi_2 \quad (15)$$

$$N^3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 \quad (16)$$

Desta forma, caso se queira mapear somente a direção  $\xi_1$ , Figura 2, substitui-se somente a Eq. (12) na Eq. (14), na Eq. (15) e na Eq. (16). O resultado é:

$$M_{1\infty}^4 = \bar{\xi}_1(\xi_1) = \frac{\xi_1}{1 - \xi_1}, \quad M_{1\infty}^2 = \xi_2, \quad M_{1\infty}^3 = 1 - \bar{\xi}_1(\xi_1) - \xi_2 = 1 - \frac{\xi_1}{1 - \xi_1} - \xi_2 \quad (17)$$

O símbolo “1 $\infty$ ” subscrito indica que somente a direção  $\xi_1$  foi mapeada. É importante observar que o nó 1 não possui função de mapeamento, sendo substituído pelo nó auxiliar 4. Também deve ser salientado que a função de mapeamento  $M_{1\infty}^2$  é igual à função de forma original. Isto significa que a direção  $\xi_2$  não sofreu influência do mapeamento. É necessário também calcular as derivadas das funções de mapeamento. Portanto:

$$\frac{\partial M_{1\infty}^4}{\partial \xi_1} = \frac{1}{(1 - \xi_1)^2}, \quad \frac{\partial M_{1\infty}^4}{\partial \xi_2} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial M_{1\infty}^2}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial M_{1\infty}^2}{\partial \xi_2} = 1 \quad (19)$$

e

$$\frac{\partial M_{1\infty}^3}{\partial \xi_1} = \frac{-1}{(1 - \xi_1)^2}, \quad \frac{\partial M_{1\infty}^3}{\partial \xi_2} = -1 \quad (20)$$

Para mapear somente a direção  $\xi_2$ , Figura 3, substitui-se somente a Eq. (13) na Eq. (14), na Eq. (15) e na Eq. (16). Ou seja:

$$M_{2\infty}^1 = \xi_1, \quad M_{2\infty}^5 = \bar{\xi}_2(\xi_2) = \frac{\xi_2}{1 - \xi_2}, \quad M_{2\infty}^3 = 1 - \xi_1 - \bar{\xi}_2(\xi_2) = 1 - \xi_1 - \frac{\xi_2}{1 - \xi_2} \quad (21)$$

Empregou-se o símbolo “2 $\infty$ ” subscrito para indicar que somente a direção  $\xi_2$  foi mapeada. Neste caso é o nó 2 que é substituído por um nó auxiliar, o 5, e a função  $M_{2\infty}^2$  é igual à função de forma original. Portanto, a direção  $\xi_1$  não é influenciada pelo mapeamento. As derivadas das funções de mapeamento são neste caso:

$$\frac{\partial M_{2\infty}^1}{\partial \xi_1} = 1, \quad \frac{\partial M_{2\infty}^1}{\partial \xi_2} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial M_{2\infty}^5}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial M_{2\infty}^5}{\partial \xi_2} = \frac{1}{(1 - \xi_2)^2} \quad (23)$$

$$\frac{\partial M_{2\infty}^3}{\partial \xi_1} = -1, \quad \frac{\partial M_{2\infty}^3}{\partial \xi_2} = \frac{-1}{(1-\xi_2)^2} \quad (24)$$

O terceiro e último caso tratado neste trabalho é quando ambas as direções,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , são mapeadas, conforme ilustrado na Figura 4. Deve-se então substituir a Eq. (12) e a Eq. (13) na Eq. (14), na Eq. (15) e na Eq. (16), obtendo:

$$M_{\infty}^4 = \frac{\xi_1}{1-\xi_1}, \quad M_{\infty}^5 = \frac{\xi_2}{1-\xi_2}, \quad M_{\infty}^3 = 1 - \frac{\xi_1}{1-\xi_1} - \frac{\xi_2}{1-\xi_2} \quad (25)$$

Neste terceiro caso indicou-se subscrito simplesmente o símbolo “ $\infty$ ”, pois ambas as direções são mapeadas. Os nós 1 e 2 são substituídos pelos auxiliares 4 e 5, respectivamente, para mapear o elemento. As derivadas das funções de mapeamento para as duas direções mapeadas são:

$$\frac{\partial M_{\infty}^4}{\partial \xi_1} = \frac{1}{(1-\xi_1)^2}, \quad \frac{\partial M_{\infty}^4}{\partial \xi_2} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial M_{\infty}^5}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial M_{\infty}^5}{\partial \xi_2} = \frac{1}{(1-\xi_2)^2} \quad (27)$$

$$\frac{\partial M_{\infty}^3}{\partial \xi_1} = \frac{-1}{(1-\xi_1)^2}, \quad \frac{\partial M_{\infty}^3}{\partial \xi_2} = \frac{-1}{(1-\xi_2)^2} \quad (28)$$

Definidas as funções de mapeamento, elas devem ser utilizadas para relacionar o sistema de coordenadas global ao sistema local do elemento. Assim, para mapeamento somente na direção  $\xi_1$ :

$$x_i = M_{1\infty}^4 x_i^4 + M_{1\infty}^2 x_i^2 + M_{1\infty}^3 x_i^3 \quad (29)$$

Para o cálculo do Jacobiano, é necessário calcular as derivadas da Eq. (29). Portanto:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} = \frac{\partial M_{1\infty}^4}{\partial \xi_1} x_i^4 + \frac{\partial M_{1\infty}^2}{\partial \xi_1} x_i^2 + \frac{\partial M_{1\infty}^3}{\partial \xi_1} x_i^3 \quad (30)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} = \frac{\partial M_{1\infty}^4}{\partial \xi_2} x_i^4 + \frac{\partial M_{1\infty}^2}{\partial \xi_2} x_i^2 + \frac{\partial M_{1\infty}^3}{\partial \xi_2} x_i^3 \quad (31)$$

As derivadas que compõem a Eq. (30) e a Eq. (31) são apresentadas na Eq. (18), na Eq. (19) e na Eq. (20). Para mapeamento na direção  $\xi_2$ , escreve-se:

$$x_i = M_{2\infty}^1 x_i^1 + M_{2\infty}^5 x_i^5 + M_{2\infty}^3 x_i^3 \quad (32)$$

As derivadas desta expressão são:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} = \frac{\partial M_{2\infty}^1}{\partial \xi_1} x_i^1 + \frac{\partial M_{2\infty}^5}{\partial \xi_1} x_i^5 + \frac{\partial M_{2\infty}^3}{\partial \xi_1} x_i^3 \quad (33)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} = \frac{\partial M_{2\infty}^1}{\partial \xi_2} x_i^1 + \frac{\partial M_{2\infty}^5}{\partial \xi_2} x_i^5 + \frac{\partial M_{2\infty}^3}{\partial \xi_2} x_i^3 \quad (34)$$

As derivadas da Eq. (33) e da Eq. (34) são apresentadas na Eq. (22), na Eq. (23) e na Eq. (24). Considerando mapeamento nas duas direções, obtém-se:

$$x_i = M_{\infty}^4 x_i^4 + M_{\infty}^5 x_i^5 + M_{\infty}^3 x_i^3 \quad (35)$$

sendo as derivadas:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} = \frac{\partial M_{\infty}^4}{\partial \xi_1} x_i^1 + \frac{\partial M_{\infty}^5}{\partial \xi_1} x_i^5 + \frac{\partial M_{\infty}^3}{\partial \xi_1} x_i^3 \quad (36)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} = \frac{\partial M_{\infty}^4}{\partial \xi_2} x_i^1 + \frac{\partial M_{\infty}^5}{\partial \xi_2} x_i^5 + \frac{\partial M_{\infty}^3}{\partial \xi_2} x_i^3 \quad (37)$$

As derivadas necessárias na Eq. (36) e na Eq. (37) são apresentadas na Eq. (26), na Eq. (27) e na Eq. (28).

Após relacionar o sistema de coordenadas global ao sistema local, torna-se possível calcular o Jacobiano desta transformação. Desta forma, o Jacobiano é dado por:

$$|{}^{\infty}J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \quad (38)$$

O símbolo “ $\infty$ ” indica que o Jacobiano se refere a um ECI. As derivadas indicadas na Eq. (38) foram apresentadas anteriormente para os três casos de mapeamento. Desta forma, considerando somente a direção  $\xi_1$  mapeada, o Jacobiano é:

$$|{}^{\infty}J_1| = \frac{2A_1}{(1-\xi_1)^2} \quad (39)$$

em que  $A_1$  é a área do triângulo definido pelos nós 2, 3 e 4 do ECI no sistema global (ver Figura 2). Considerando a direção  $\xi_2$  mapeada o Jacobiano se torna:

$$|{}^{\infty}J_2| = \frac{2A_2}{(1-\xi_2)^2} \quad (40)$$

sendo  $A_2$  a área do triângulo definido pelos nós 1, 3 e 5 do ECI no sistema global (ver Figura 3). Por fim, para ambas as direções mapeadas, o Jacobiano é:

$$|{}^{\infty}J_3| = \frac{2A_3}{(1-\xi_1)^2(1-\xi_2)^2} \quad (41)$$

em que  $A_3$  é a área do triângulo definido pelos nós 3, 4, e 5 do ECI no sistema global (ver Figura 4).

#### 4 LINHAS DE CARGA NO MEC

Neste trabalho, as tensões reativas das estacas são aplicadas como linhas de carga no meio tridimensional modelado pelo MEC. A Figura 5 apresenta uma estaca genérica imersa no solo, ilustrando as principais características do modelo numérico a ser utilizado neste trabalho.

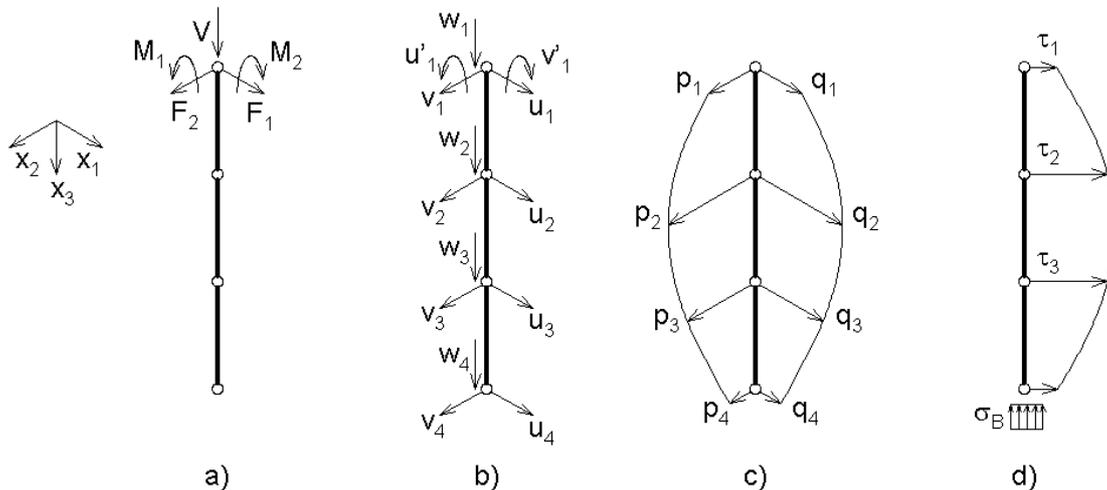


Figura 5: Características do Modelo Numérico.

A figura, que apresenta um elemento de quatro nós igualmente espaçados ao longo de seu comprimento, é dividida em quatro partes. Na Figura 5a são ilustradas as cargas que podem ser aplicadas no nó do topo da estaca, incluindo forças nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do sistema de coordenadas globais e momentos em torno de  $x_1$  e  $x_2$ . Na Figura 5b estão representados quatorze parâmetros nodais de deslocamento do elemento finito, que incluem deslocamentos nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  nos quatro nós mais rotações em torno de  $x_1$  e  $x_2$  no nó do topo. Todas as forças de interação estaca/solo são modeladas como carregamentos distribuídos, assim como ilustrado na Figura 5c para as direções horizontais do fuste e na Figura 5d para as direções verticais do fuste e da base.

A influência das linhas de carga pode ser incluída na Eq. (1) adicionando-se a ela mais um termo, conforme apresentado abaixo:

$$c_{ij}(y)u_j(y) + \int_S T_{ij}(x, y)u_j(x)dS(x) = \int_S U_{ij}(x, y)t_j(x)dS(x) + \sum_{e=1}^{np} I_e \quad (42)$$

Nesta seção será dado foco somente ao termo referente às linhas de carga, pois a forma como lidar com os demais foi apresentada em seções anteriores. Neste termo,  $np$  indica o número de estacas e  $I_e$  é a integral que representa a contribuição de cada estaca. Tal contribuição pode ser escrita como:

$$I_e = \int_{\Gamma_e} U_{ij}(x, y)s_j^e(x)d\Gamma^e(x) \quad (43)$$

A integral é calculada na superfície cilíndrica da estaca, a qual é indicada por  $\Gamma_e$ . O termo  $s_j^e$  indica as tensões de interação da estaca com o solo, as quais são aproximadas, de forma geral, empregando a seguinte relação:

$$s = \{\phi\}^T \{s_i\} \quad (44)$$

O vetor  $\{\phi\}$  contém funções polinomiais. Emprega-se uma variável adimensional  $\xi$  tal que:

$$\xi = \frac{2x_3}{L} - 1 \quad (45)$$

em que  $x_3$  é a coordenada vertical do ponto no sistema global e  $L$  é o comprimento da estaca no sistema global. Para as direções horizontais são utilizados os quatro nós para aproximar as tensões, sendo empregados os seguintes polinômios do terceiro grau:

$$\phi_1 = \frac{1}{16}(-9\xi^3 + 9\xi^2 + \xi - 1) \quad (46)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{16}(27\xi^3 - 9\xi^2 - 27\xi + 9) \quad (47)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{16}(-27\xi^3 - 9\xi^2 + 27\xi + 9) \quad (48)$$

$$\phi_4 = \frac{1}{16}(9\xi^3 + 9\xi^2 - \xi - 1) \quad (49)$$

Para as tensões verticais do fuste três nós são utilizados, sendo então empregados polinômios do segundo grau. Estes polinômios são:

$$\phi_1 = \frac{1}{8}(9\xi^2 - 1) \quad (50)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4}(-9\xi^2 - 6\xi^2 + 3) \quad (51)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{8}(9\xi^2 + 12\xi + 3) \quad (52)$$

Finalmente, a tensão na base da estaca é considerada constante. Empregando estas aproximações, a Eq (43) pode ser reescrita como:

$$I_e = \left( \int_{\Gamma_e} [U^*] \{\Phi\} d\Gamma_e \right) \{s\} \quad (53)$$

em que  $[U^*]$  é uma matriz que contém as componentes da solução fundamental de deslocamento de Kelvin,  $\{\Phi\}$  é um vetor que contém os polinômios de aproximação e  $\{s\}$  é um vetor com as tensões do fuste em cada ponto. A integral pode ser calculada ao longo do fuste numericamente empregando pontos de integração. A integral é singular quando a equação é escrita para o ponto da base de uma estaca e calcula-se a integral nesta mesma base. Para este caso, a integral é calculada analiticamente.

Escrevendo a Eq. (42) para todos os pontos, incluindo os das estacas, é obtido o seguinte sistema de equações:

$$Hu = Gp + Ms \quad (54)$$

Este sistema é análogo ao apresentado na Eq. (10), mas neste caso são incluídas também as contribuições das integrais calculadas ao longo das estacas. Estas contribuições são alocadas na matriz  $M$ , que multiplica o vetor  $s$ , o qual contém as tensões ao longo dos fustes.

## 5 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Cada estaca é modelada como um único elemento finito, cujas características gerais são ilustradas na Figura 5, apresentada na seção anterior. Todos os deslocamentos e carregamentos distribuídos são aproximados empregando funções polinomiais, sendo que o grau dos polinômios é escolhido considerando-se o número de parâmetros definidos em cada situação. Para as direções horizontais são definidos cinco parâmetros nodais de deslocamento, portanto o deslocamento  $u$  na direção  $x_1$  e o deslocamento  $v$  na direção  $x_2$  podem ser escritos como:

$$u = \{\varphi\}^T \{u_i\} = \{\varphi_{D1} \quad \varphi_{\theta 1} \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u'_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

$$v = \{\varphi\}^T \{v_i\} = \{\varphi_{D1} \quad \varphi_{\theta 1} \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (56)$$

Como são cinco parâmetros, o ideal neste caso é empregar polinômios do quarto grau. Utilizando uma variável auxiliar adimensional  $\xi$  tal que  $\xi = x_3/L$ , sendo  $L$  o comprimento do elemento no sistema global, chega-se às seguintes funções de forma:

$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{99}{4}\xi^4 + 45\xi^3 - \frac{85}{4}\xi^2 + 1 \\ -\frac{9}{2}\xi^4 L + 9\xi^3 L - \frac{11}{2}\xi^2 L + \xi L \\ \frac{81}{2}\xi^4 - \frac{135}{2}\xi^3 + 27\xi^2 \\ -\frac{81}{4}\xi^4 + 27\xi^3 - \frac{27}{4}\xi^2 \\ \frac{9}{2}\xi^4 - \frac{9}{2}\xi^3 + \xi^2 \end{Bmatrix} \quad (57)$$

O deslocamento  $w$  na direção  $x_3$ , por sua vez, deve ser definido a partir de quatro parâmetros. Portanto:

$$w = \{\phi\}^T \{w_i\} = \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4\} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Quatro parâmetros implicam na utilização de funções de terceiro grau. Empregando novamente a variável adimensional  $\xi$ , obtém-se:

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \frac{11}{2}\xi + 1 \\ \frac{27}{2}\xi^3 - \frac{45}{2}\xi^2 + 9\xi \\ -\frac{27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \frac{9}{2}\xi \\ \frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi \end{Bmatrix} \quad (59)$$

Os carregamentos horizontais do fuste,  $q$  na direção  $x_1$  e  $p$  na direção  $x_2$ , são também definidos a partir de quatro parâmetros. Portanto pode-se aproximá-los com as mesmas funções empregadas para os deslocamentos verticais  $w$ , ou seja:

$$q = \{\phi\}^T \{q_i\}, \quad p = \{\phi\}^T \{p_i\} \quad (60)$$

O carregamento no fuste  $\tau$  na direção  $x_3$ , por sua vez, é definido a partir de três parâmetros. Portanto:

$$\tau = \{\omega\}^T \{\tau_i\} = \{\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3\} \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{Bmatrix} \quad (61)$$

Para três parâmetros o ideal é empregar funções de segundo grau. Estas funções são:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \frac{9}{2}\xi^2 - \frac{9}{2}\xi + 1 \\ -9\xi^2 + 6\xi \\ \frac{9}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\xi \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Por fim, como a carga na base da estaca é definida a partir de um único parâmetro, adota-se para ela uma aproximação constante. Isto é:

$$\sigma = \{1\} \{\sigma_b\} \quad (63)$$

ou simplesmente

$$\sigma = \{\sigma_b\} \quad (64)$$

Definidas as funções de aproximação o próximo passo é escrever a expressão da energia potencial total do elemento, que é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{EI}{2} \int_0^L u''^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L v''^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L w'^2 dx + \int_0^L uq dx + \int_0^L v p dx + \\ & + \int_0^L w \omega dx - F_1 u_1 - F_2 v_1 - M_1 u'_1 - M_2 v'_1 - V w_1 \end{aligned} \quad (65)$$

Na Eq. (65),  $L$  é o comprimento da estaca,  $E$  é seu módulo de elasticidade,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal e  $A$  é sua área.

Por fim, minimiza-se a expressão da energia potencial total em função dos parâmetros nodais de deslocamento. Isto é feito calculando-se a derivada em relação a cada um dos graus de liberdade e igualando a zero. O resultado é um sistema de equações conforme escrito abaixo:

$$[K]\{u\} = \{f\} - [Q]\{s\} \quad (66)$$

Na Eq. (66),  $K$  é a matriz de rigidez da estaca. Os vetores  $u$ ,  $f$  e  $s$  contém, respectivamente, os deslocamentos nodais, as cargas concentradas nos nós e as cargas distribuídas no elemento. A matriz  $Q$  transforma as cargas distribuídas em cargas nodais concentradas.

## 6 ACOPLAMENTO MEC-MEF

Para que a flexibilidade da estaca possa ser considerada em conjunto com a flexibilidade do solo, é necessário relacionar a Eq. (54) com a Eq. (66). Inicialmente, reescreve-se a Eq. (54) da seguinte forma:

$$Hu = Ty \quad (67)$$

As matrizes e vetores do lado direito da Eq. (54) foram agrupadas na Eq. (67). Desta forma, o vetor  $y$  contém os termos de  $p$  e  $s$ , enquanto que a matriz  $T$  contém os termos das matrizes  $G$  e  $M$ . Como a matriz  $T$  é inversível, é possível escrever:

$$T^{-1}Hu = y \quad (68)$$

$$Bu = y \quad (69)$$

O vetor  $y$  contém forças de superfície, que precisam ser transformadas em cargas concentradas nos nós para que possam relacionadas às cargas do MEF. Para isto, utiliza-se uma matriz de transformação  $Q$ , ou seja:

$$QBu = Qy \quad (70)$$

$$Du = r \quad (71)$$

A matriz  $Q$  é obtida a partir da minimização do funcional da energia potencial das cargas do MEC.

Para que a Eq. (71) seja relacionada à Eq. (66), é necessário aplicar condições de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos nas superfícies de contato entre os domínios modelados por cada método. É importante destacar que nos sistemas de equações da Eq. (66) e da Eq. (71) só estão incluídos os graus de liberdade definidos em cada método, separadamente. Antes de serem relacionados, tais sistemas devem ser expandidos de forma a incluir, em ambos, todos os graus de liberdade definidos no problema acoplado completo. Tal procedimento consiste em incluir mais graus de liberdade nos vetores e expandir as matrizes

com linhas e colunas de zeros de forma a não alterar as equações originalmente definidas. Escreve-se abaixo os sistemas expandidos:

$$[\bar{K}]\{\bar{u}_{MEF}\} = \{\bar{f}\} - \{\bar{r}_{MEF}\} \quad (72)$$

$$[\bar{D}]\{\bar{u}_{MEC}\} = \{\bar{r}_{MEC}\} \quad (73)$$

Na Eq. (72) a contribuição dos carregamentos distribuídos é computada no vetor  $\bar{r}_{MEF}$  diretamente como cargas concentradas nos nós. As condições de equilíbrio e compatibilidade podem ser expressas pelas seguintes igualdades:

$$\{\bar{u}_{MEF}\} = \{\bar{u}_{MEC}\} = \{\bar{u}\} \quad (74)$$

$$\{\bar{r}_{MEF}\} = \{\bar{r}_{MEC}\} \quad (75)$$

A partir das Eq. (72-75), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \{\bar{f}\} - [\bar{D}]\{\bar{u}\} \quad (76)$$

A Eq. (76) representa o acoplamento MEC-MEF, podendo ser trabalhada como segue:

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} + [\bar{D}]\{\bar{u}\} = \{\bar{f}\} \quad (77)$$

$$([\bar{K}] + [\bar{D}])\{\bar{u}\} = \{\bar{f}\} \quad (78)$$

$$[A]\{\bar{u}\} = \{\bar{f}\} \quad (79)$$

A Eq. (79) é a forma final do acoplamento MEC-MEF, consistindo em um sistema de equações cujo número de equações é igual ao de incógnitas. A resolução deste sistema fornece, em uma etapa inicial, todos os deslocamentos incógnitos do problema. Isto torna possível que sejam determinados, posteriormente, outros tipos de resultado tanto no MEC como no MEF. Caso seja necessário, é possível impor restrições de deslocamento diretamente na Eq. (79).

## 7 EXEMPLOS

### 7.1 Estaca isolada imersa em um semi-espaço infinito

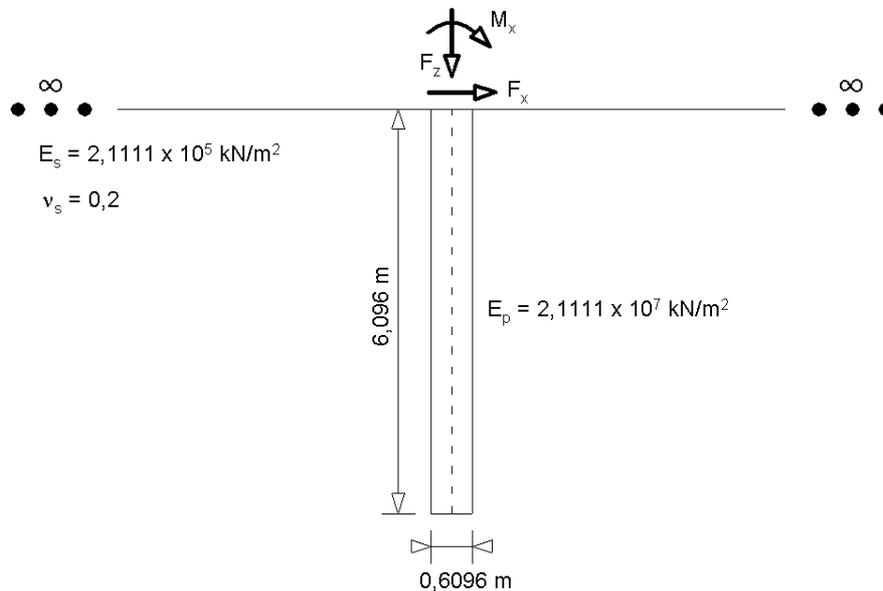


Figura 6: Estaca Imersa no Solo.

Considera-se uma estaca cilíndrica e vertical imersa no solo, conforme ilustrado na Figura 6. O solo é representado por um semi-espaço infinito, homogêneo, isotrópico e elástico-linear, com módulo de elasticidade de  $2,1111 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson de 0,2. A estaca, por sua vez, tem 0,6096 m de diâmetro, 6,096 m de comprimento e módulo de elasticidade igual a  $2,1111 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ .

São considerados três tipos de carregamento, aplicados um por vez no topo da estaca. O primeiro é uma força horizontal de 181,6 kN, a qual é indicada na Figura 6 como  $F_x$ . A segunda é o momento  $M_x$ , o qual está contido no plano da Figura 6 e tem um valor de 95,826 kNm. Por fim, considera-se uma força vertical de 726,4 kN, indicada na Fig 6 como  $F_z$ .

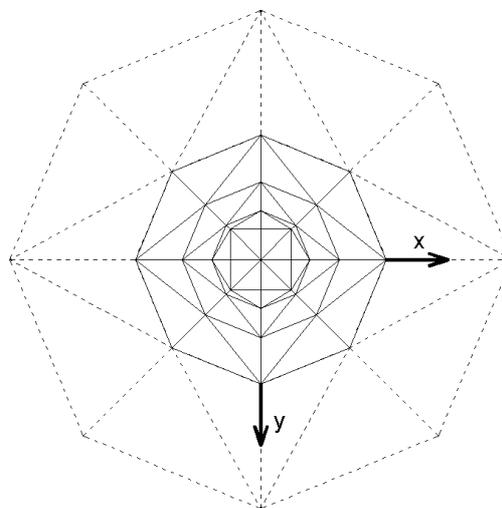


Figura 7: Malha de EC/ECI empregada.

A Figura 7 apresenta a malha de elementos de contorno (EC) e de elementos de contorno infinitos (ECI) empregada para simular a superfície do solo. Esta malha é composta por 56 ECs e 16 ECIs, e em seu centro está a origem do sistema de coordenadas globais. A estaca, por sua vez, é simulada empregando um único elemento finito (EF) com 14 parâmetros nodais. A teoria que define este EF é apresentada na seção 5. O topo da estaca está posicionado na origem do sistema de coordenadas, e seu eixo é perpendicular ao plano da malha do solo.

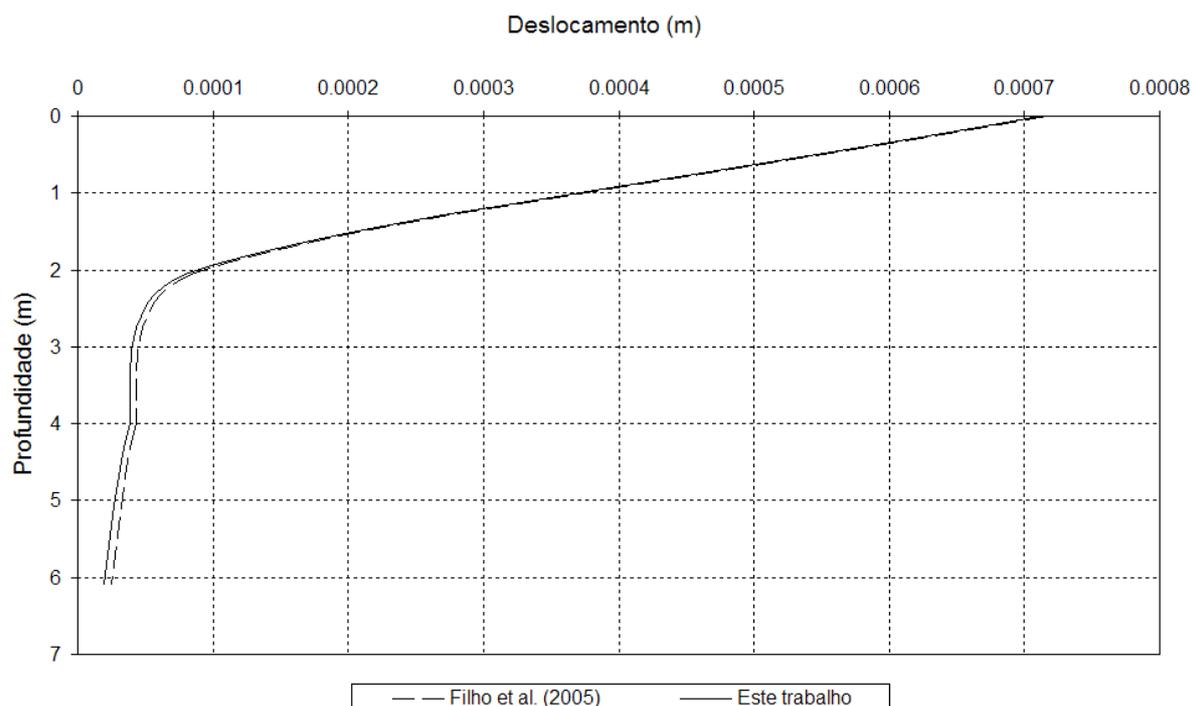


Figura 8: Deslocamento Horizontal Devido à Carga  $F_x$ .

Os deslocamentos calculados ao longo do eixo da estaca foram organizados nos gráficos das Figuras (8-10), nos quais são comparados com os resultados fornecidos pelo trabalho de Filho et al. (2005).

Desta forma, na Figura 8 são apresentados os deslocamentos horizontais do eixo da estaca resultantes da carga horizontal de 181,6 kN aplicada em seu topo. É possível observar que há grande concordância com os valores de Filho et al. (2005), sendo as duas curvas quase coincidentes.

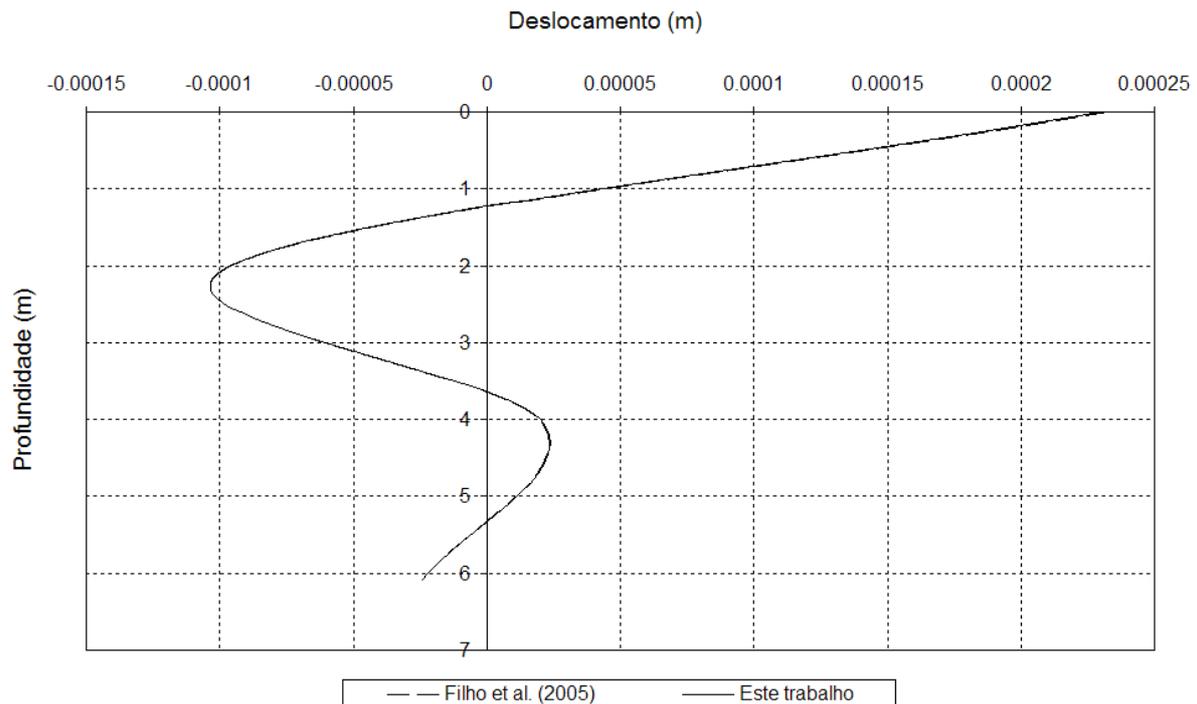


Figura 9: Deslocamento Horizontal devido ao Momento  $M_x$ .

Na Figura 9, por outro lado, são apresentados os deslocamentos horizontais do eixo da estaca resultantes do momento fletor de 95,826 kNm aplicado em seu topo. Observa-se novamente grande concordância com os resultados de Filho et al. (2005), sendo difícil distinguir as duas curvas.

Por fim, na Figura 10 são apresentados os deslocamentos verticais do eixo da estaca resultantes da força vertical de 726,4 kN aplicada no topo. Neste último gráfico foram colocados, além dos valores de Filho et al. (2005) e dos resultados obtidos com a malha de EC/ECI da Figura 7, mais uma curva que foi montada com valores calculados com a mesma malha apresentada na Figura 7 mas sem os ECIs. É possível observar grande concordância com Filho et al. (2005) quando os ECIs são empregados, mas por outro lado os resultados se tornam mais distantes sem os ECIs. Isto demonstra que a utilização dos ECIs tem contribuição positiva na precisão dos resultados.

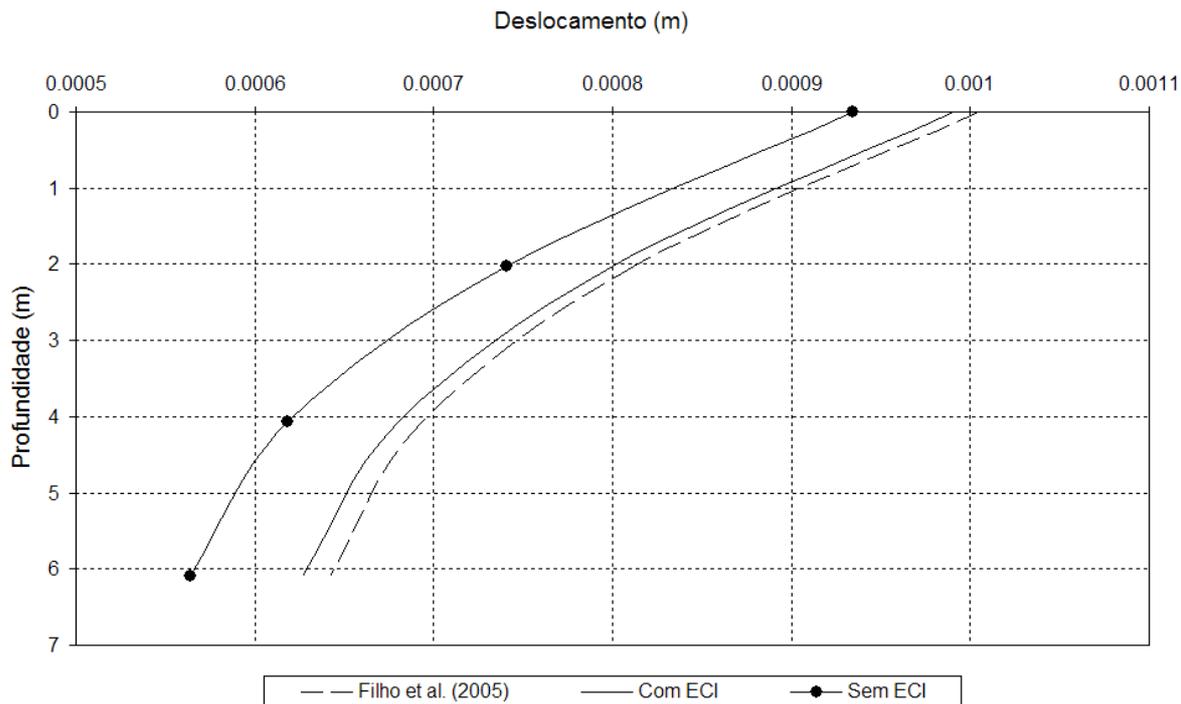


Figura 10: Deslocamento Vertical Devido à carga  $F_z$ .

7.2 Nove estacas imersas em uma camada finita

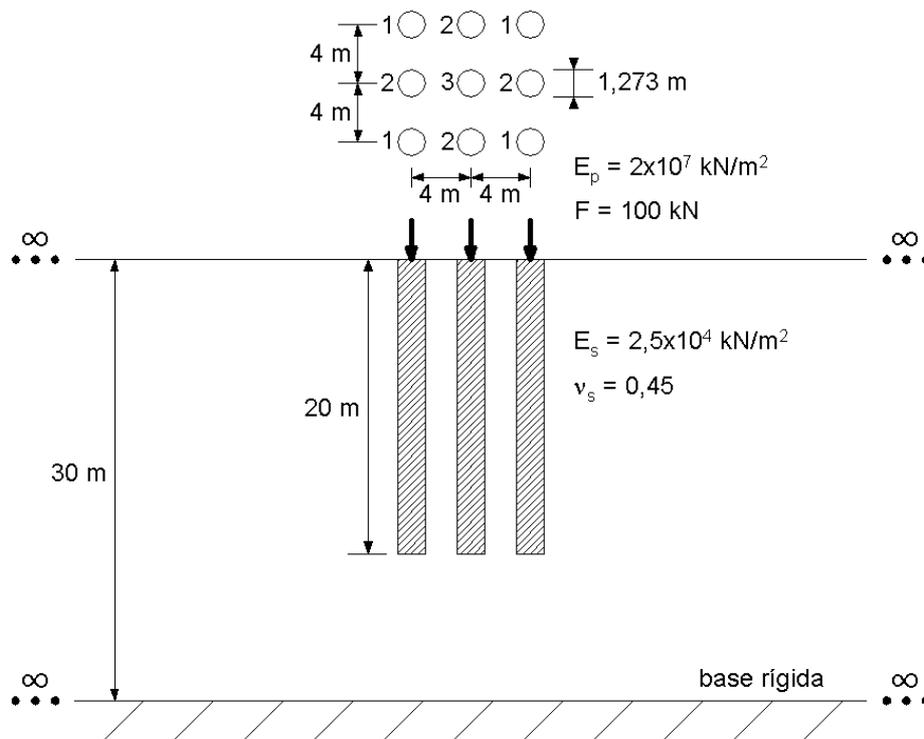


Figura 11: Nove Estacas Imersas na Camada.

É analisada neste exemplo a interação de nove estacas cilíndricas com uma camada finita de solo, conforme ilustrado na Figura 11. As estacas estão espaçadas de 4 m, têm módulo de elasticidade igual a  $2 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup>, diâmetro de 1,273 m e comprimento de 20 m. No topo de cada estaca é aplicada uma força vertical de 100 kN. Devido à simetria do problema esperam-se resultados equivalentes em algumas estacas, desta forma elas foram numeradas de 1 a 3 segundo esta equivalência. A camada de solo é representada como um meio infinito nas direções radiais, com 30 m de espessura, módulo de elasticidade de  $2,5 \times 10^4$  kN/m<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson de 0,45.

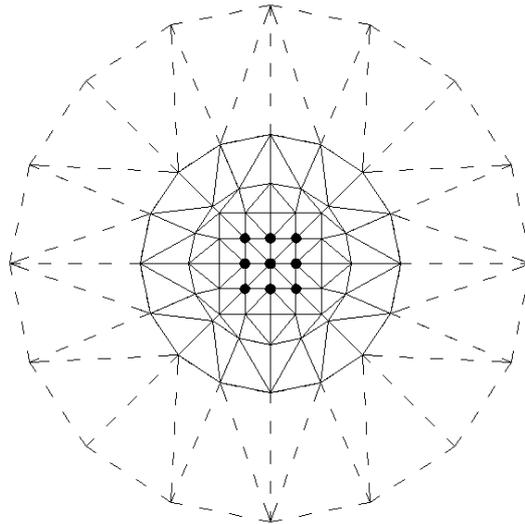


Figura 12: Malha de EC/ECI Empregada.

A Figura 12 apresenta a malha de elementos de contorno (EC) e de elementos de contorno infinitos (ECI) utilizada na superfície livre do solo e na base rígida, totalizando 192 ECs e 64 ECIs. Os círculos destacados na região central da malha indicam a posição do topo das estacas em relação à malha da superfície. As estacas são simuladas com o método dos elementos finitos (MEF), empregando o elemento com 14 parâmetros nodais descrito na seção 5. O eixo das estacas é perpendicular ao plano da malha do solo.

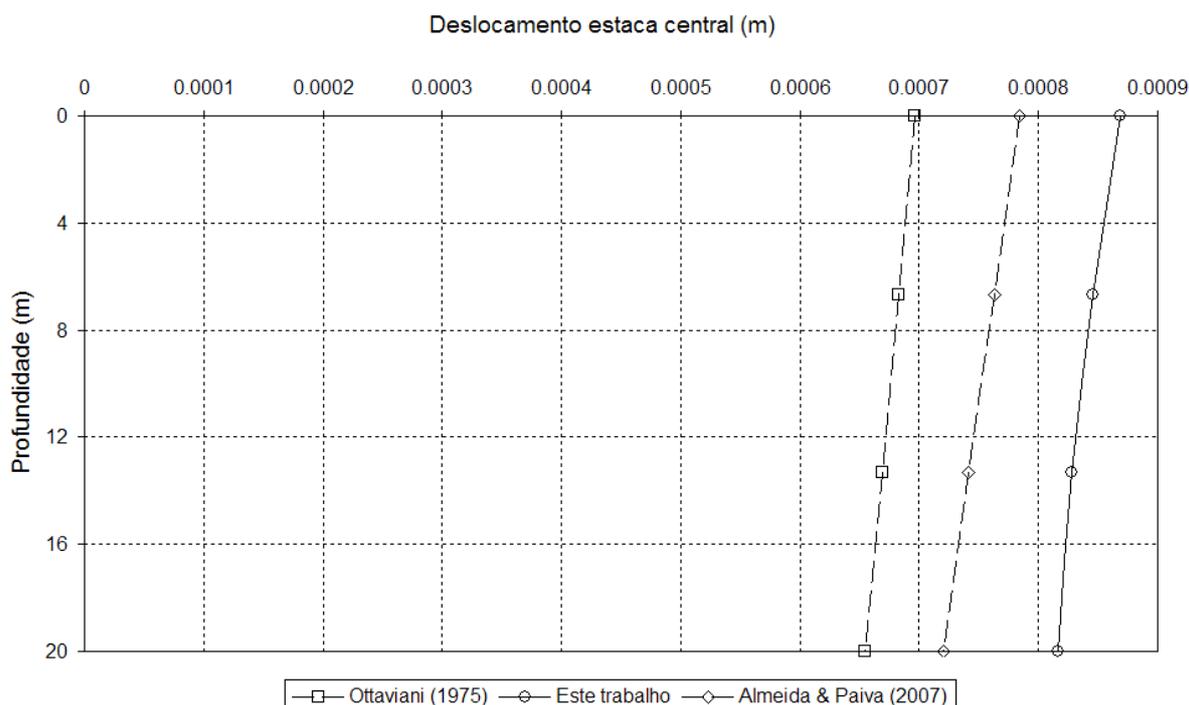


Figura 13: Deslocamento Vertical da Estaca Central.

Na Figura 13 é apresentado o deslocamento vertical da estaca central, juntamente com uma interpolação linear dos resultados obtidos por outros autores para o topo e base das estacas. Em Almeida and Paiva (2007) e Ottaviani (1975) foram adotadas estacas com seção transversal quadrada de 1 m de aresta, sendo a área total de fuste igual à das estacas cilíndricas apresentadas na Figura 11. Segundo Ottaviani (1975) estas duas aproximações produzem resultados adequados para comparação.

Conforme pode ser observado na Figura 13, os deslocamentos obtidos por Ottaviani (1975) foram inferiores aos das demais formulações. Isto ocorre porque Ottaviani (1975) simula o solo empregando uma malha de elementos finitos tridimensionais que é finita nas direções radiais, se estendendo até uma distância de apenas 13 m das estacas numeradas como 1 e estando com os deslocamentos verticais restringidos nestes limites. Desta forma, o resultado no centro recebe uma influência considerável das vinculações impostas nos limites. A formulação de Almeida e Paiva (2007), por outro lado, por empregar elementos de contorno, permite que a malha se estenda até uma distância maior. Desta forma, o resultado obtido por Almeida and Paiva (2007) recebe menor influência dos limites da malha e a solução se aproxima mais da obtida com a formulação deste trabalho, a qual permite simular a camada como um meio de fato infinito nas direções radiais. O resultado de Ottaviani (1975) foi 19,8 % inferior ao deste trabalho tanto para o topo como para a base da estaca, enquanto que o resultado de Almeida and Paiva (2007) foi 9,7 % inferior para o topo e 11, 8 % inferior para a base.

Outro dado interessante de ser avaliado é a influência de uma estaca sobre a outra. Considerando a numeração de 1 a 3 apresentada na Figura 11, verificou-se que o deslocamento vertical do topo da estaca 3 é 25,5 % superior ao das estacas 1 e 13,8 % superior ao das estacas 2. Além disto, foi observada uma significativa inclinação das estacas 1 e 2 na direção da estaca 3, com o topo se tornando mais próximo do centro da malha e a base se tornando mais distante. Desta forma, verificou-se que a distância horizontal entre o topo e base das

estacas 1 resultou igual a 32,1 % do deslocamento vertical de seu topo, enquanto que para as estacas 2 este valor foi de 23,6 %.

## 8 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvida uma ferramenta numérica para a simulação estática de problemas tridimensionais de interação estaca-solo. Com o intuito de reduzir o custo computacional sem prejudicar a precisão dos resultados, neste trabalho são utilizados elementos de contorno infinitos (ECIs) nas bordas da malha de elementos de contorno (ECs) do maciço de solos para modelar o comportamento das variáveis a grandes distâncias.

Na seção 7 são apresentados dois exemplos para demonstrar a eficiência da ferramenta numérica desenvolvida. No primeiro exemplo os resultados obtidos demonstraram grande concordância com os de Filho et al. (2005), chegando a ser difícil de distinguir as curvas obtidas nas Figuras (8-9). Isto pode ser explicado pelo fato de que a formulação aqui empregada é semelhante à de Filho et al. (2005), sendo empregadas as mesmas aproximações no elemento finito. No segundo exemplo são feitas comparações com outros autores, e a concordância dos resultados pode ser considerada satisfatória. Era esperado que o resultado da formulação com ECIs seria o mais flexível, pois os demais autores considerados para comparação restringem as bordas da malha nas direções radiais.

## AGRADECIMENTOS

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica da Escola Politécnica da USP, ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da USP e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

## REFERÊNCIAS

- Almeida, V. S., and Paiva, J. B., Static analysis of soil/pile interaction in layered soil by bem/bem coupling. *Advances in Engineering Software*, 38:835-845, 2007.
- Banerjee, P. K., Analysis of axially and laterally loaded pile groups. In: *Developments in Soil Mechanics - I*, chapter 9, p. 317–343. Applied Science Publishers, U. K., 1978.
- Banerjee, P. K., Integral equation methods for analysis of piece-wise nonhomogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. *International Journal of Mechanical Sciences*, 18:293-303, 1976.
- Bear, G. *Programming the boundary element method*. Wiley, New York, 2001.
- Butterfield, R., and Banerjee, P. K., The problem of pile group-pile cap interaction. *Geotechnique*. 21:135-142, 1971.
- Chan, K. S., Karasudhi, P., and Lee, S. L., Force at a point in the interior of a layered elastic half-space. *International Journal of Solids and Structures*, 10:1179-1199, 1974.
- Chin, J. T., and Chow, Y. K., Numerical analysis of axially loaded vertical piles and pile groups. *Computers and Geotechnics*, 9:273-290, 1990.
- Chow, Y. K., and Teh, C. I., Pile-cap-pile-group interaction in nonhomogeneous soil. *Journal of Geotechnical Engineering*, 117:1655-1668, 1991.
- Comodromos, E. M., and Bareka, S. V., Evaluation of negative skin friction effects in pile foundations using 3D nonlinear analysis. *Computers and Geotechnics*, 32:210–221, 2005.
- Davis, P. J., and Rabinowitz, P., *Methods of numerical integration*. Academic Press, New York, 1975.
- Filho, R. M., Mendonça, A. V., and Paiva, J. B., Static boundary element analysis of piles

- submitted to horizontal and vertical loads. *Engineering analysis with boundary elements*, 29:195-203, 2005.
- Guiggiani, M., and Gigante, A., A general algorithm for multidimensional cauchy principal value integrals in the boundary element method. *Journal of Applied Mechanics*, 57:906-915, 1990.
- Marques, J. M. M. C., and Owen, D. R. J., Infinite elements in quasi-static materially nonlinear problems. *Computers and Structures*. 18:739-751, 1984.
- Mendonça, A. V., and Paiva, J. B., A boundary element method for the static analysis of raft foundations on piles. *Engineering analysis with boundary elements*, 24:237-247, 2000.
- Mendonça, A. V., and Paiva, J. B., A elastostatic fem/bem analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation. *Engineering analysis with boundary elements*, 27:919-933, 2003.
- Moser, W., Duenser, C., and Beer, G., Mapped infinite elements for three-dimensional multi-region boundary element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:317-328, 2004.
- Ottaviani, M., Three-dimensional finite element analysis of vertically loaded pile groups. *Géotechnique*, 25:159-174, 1975.
- Poulos, H. G., Analysis of the settlement of pile groups. *Géotechnique*. 18:449-471, 1968.
- Poulos, H. G., and Davies, H. G., The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers. *Géotechnique*. 18:351-371, 1968.
- Randolph, M. F., and Wroth, C. P., An analysis of the vertical deformation of pile groups. *Géotechnique*, 29:423-439, 1979.
- Ribeiro, D. B., and Paiva, J. B., Analyzing static three-dimensional elastic domains with a new infinite boundary element formulation. *Engineering analysis with boundary elements*, 34:707-713, 2010.
- Sadecka, L., A finite/infinite element analysis of thick plate on a layered foundation. *Computers and Structures*. 76:603-610, 2000.
- Said, I., Gennaro, V., and Frank, R., Axisymmetric finite element analysis of pile loading tests. *Computers and Geotechnics*, 36:6-19, 2009.
- Ta, L. D., and Small, J. C., Analysis and performance of piled raft foundations on layered soils-case studies. *Soil and Foundations*, 38:145-150, 1998.
- Tahghighi, H., and Konagai, K., Numerical analysis of nonlinear soil-pile group interaction under lateral loads. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27:463-474, 2007.