

ESTUDO DE PÓRTICOS PLANOS UTILIZANDO UM ELEMENTO FINITO DE VIGA UNIFICADO EM UM PROGRAMA DE ANÁLISE LINEAR

Sebastião S. Silva; Silva, William T. M. Silva.

Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília-UnB, Campus Darcy Ribeiro, 70910900, Brasília-DF, Brasil, sebastiao_simao@yahoo.com.br, Taylor@unb.br, <http://www.unb.br/>.

Palavras chave: teoria unificada de viga, elementos finitos de viga, análise de pórticos planos.

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um modelo de elemento finito de viga unificado proposto por Reddy, que não apresenta bloqueio por deformação a corte, e que engloba as teorias de vigas de Euler-Bernoulli, Timoshenko e de terceira ordem de Reddy. Implementa-se a matriz de rigidez unificada desses elementos em um programa de elementos finitos para a análise linear de pórticos planos. Mostra-se os resultados de exemplos numéricos nos quais se constata a inexistência de travamento a cisalhamento.

1. INTRODUÇÃO

Vigas são elementos estruturais com grande aplicação na engenharia, e para as quais existem diversos modelos de análise. Na Figura 1.1, a cinemática das teorias de Euler-Bernoulli (TEB), Timoshenko (TT) e de terceira ordem Reddy (TR) é mostrada. A teoria mais simples e a mais comumente usada é a de Euler-Bernoulli a qual adota um campo de deslocamento que implica nas hipóteses de que uma linha reta e normal a superfície neutra antes da deformação da peça, permanecerá reta e normal após a deformação desta, implicando ainda no negligenciamento dos efeitos normais e cisalhantes sobre a estrutura.

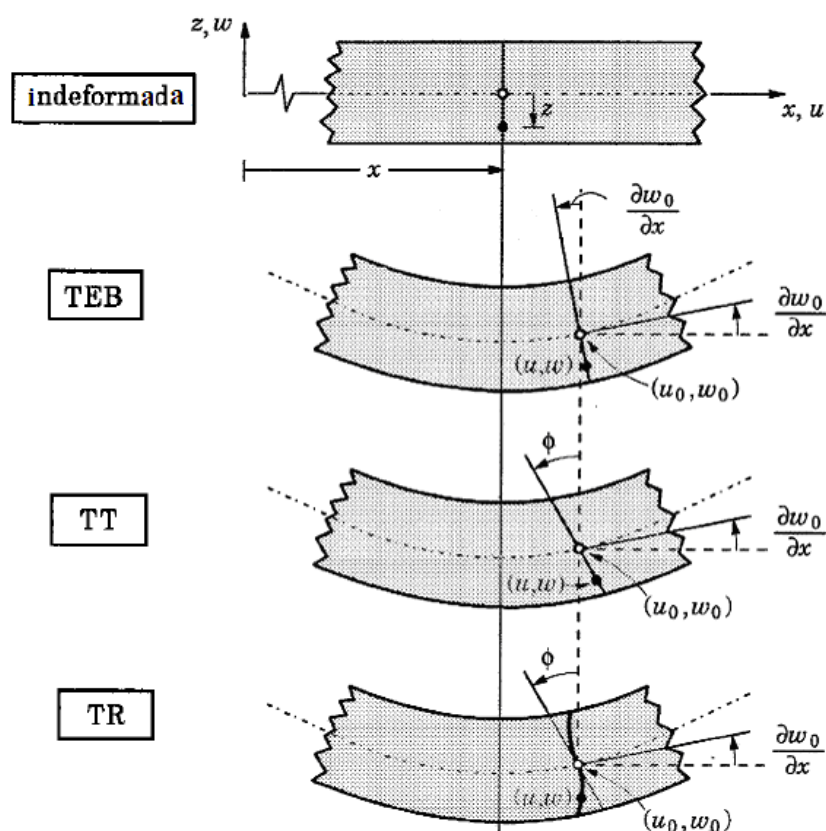


Figura 1.1: Cinemática das teorias de Euler-Bernoulli, Timoshenko e Terceira ordem. Reddy (1997)

A teoria de viga de Timoshenko considera que as seções planas antes da estrutura se deformar se mantêm planas após a deformação. Contudo, supõe-se que uma seção normal ao eixo da viga não mantém essa característica após a deformação. Ainda é levada em consideração os efeitos das forças cisalhantes pela introdução de uma constante de correção na coordenada orientada sobre a altura da estrutura. Uma variedade de elementos finitos de viga de Timoshenko surgem na literatura, diferindo uns dos outros na escolha da função de interpolação usadas para a deflexão transversal w_0 e rotação ϕ , ou na forma fraca utilizada para desenvolver o modelo de elementos finitos.

A fim de representar de forma verdadeira a distribuição das tensões de cisalhamento sobre a altura da viga, Reddy *et al* desenvolveram teorias de terceira ordem. Nestas, uma linha reta e normal a linha neutra antes da deformação da peça, não se encontrará mais reta e normal após a deformação da mesma. Semelhantemente a TEB, nestes modelos também se computa o

estado de deformação ao cisalhamento transversal na seção da peça, mas não se necessita da introdução de um coeficiente para levar em consideração estes efeitos.

Neste trabalho implementa-se a matriz de rigidez de um modelo de elemento finito de viga unificado proposto por Reddy que engloba as teorias de viga de Euler-Bernoulli, Timoshenko e terceira ordem de Reddy em um programa de elementos finitos linear para análise de pórticos escrito com a linguagem FORTRAN por Taylor (2003). Com este investigou-se a cinemática de exemplos numéricos de estruturas levando-se em consideração vários tipos de carregamentos.

2. REVISÃO DAS TEORIAS DE VIGAS E SEUS ELEMENTOS FINITOS

As equações seguintes foram extraídas de Reddy (1997). Elas exprimem em síntese as teorias das vigas de Euler-Bernoulli, Timoshenko, terceira ordem, a relação entre as mesmas, e o modelo unificado de Reddy que abrange as formulações antes mencionadas.

2.1 Teoria de viga de Euler-Bernoulli (TEB)

Nesta teoria o carregamento externo e o momento fletor sobre o elemento são dados respectivamente por

$$\frac{d^2 M_{xx}^E}{dx^2} = -q(x) \quad (1)$$

$$M_{xx}^E = -D_{xx} \frac{d^2 w_0^E}{dx^2} \quad (2)$$

2.2 Teoria de viga de Timoshenko (TT)

Na teoria de viga desenvolvida por Timoshenko, as expressões que contabilizam o carregamento externo e o momento fletor são definidas como

$$\frac{dM_{xx}^T}{dx} = Q_x^T, \quad \frac{dQ_x^T}{dx} = -q(x) \quad (3)$$

$$M_{xx}^T = -D_{xx} \frac{d\phi^T}{dx}, \quad Q_x^T = A_{xz} K_s \left(\phi^T + \frac{dw_0}{dx} \right) \quad (4)$$

Onde K_s denota o fator de correção ao cisalhamento.

2.3 Teoria de viga de terceira ordem refinada (TR)

As equações que governam o equilíbrio do elemento de viga neste modelo são:

$$\frac{dM_{xx}^R}{dx} = Q_x^R + \alpha \frac{dP_{xx}}{dx} - \beta R_x \quad (5)$$

$$\frac{dQ_x^R}{dx} = -q(x) + \beta \frac{dR_x}{dx} - \alpha \frac{d^2 P_{xx}}{dx^2} \quad (6)$$

$$M_{xx}^R = D_{xx} \frac{d\phi^R}{dx} - \alpha F_{xx} \left(\frac{d\phi^R}{dx} + \frac{d^2 w_0^R}{dx^2} \right) \quad (7)$$

$$Q_x^R = \bar{A}_{xz} \left(\phi^R + \frac{dw_0^R}{dx} \right) \quad (8)$$

$$P_{xx} = F_{xx} \frac{d\phi^R}{dx} - \alpha H_{xx} \left(\frac{d\phi^R}{dx} + \frac{d^2 w_0^R}{dx^2} \right) \quad (9)$$

$$R_x = \bar{D}_{xz} \left(\phi^R + \frac{dw_0^R}{dx} \right) \quad (10)$$

Na TR, P_{xx} e R_x denotam as resultantes de tensão de ordem superiores; D_{xx} a rigidez a flexão; A_{xz} a rigidez ao cisalhamento.

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \int_A E_x z^2 dA = E_x I_{yy}^{(2)} & F_{xx} &= \int_A E_x z^4 dA = E_x I_{yy}^{(4)} \\ H_{xx} &= \int_A E_x z^6 dA = E_x I_{yy}^{(6)} & A_{xz} &= \int_A G_{xz} dA = G_{xz} A \\ D_{xz} &= \int_A G_{xz} z^2 dA = G_{xz} I_{yy}^{(2)} & F_{xz} &= \int_A G_{xz} z^4 dA = G_{xz} I_{yy}^{(4)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{xx} &= D_{xx} - \alpha F_{xx} & \bar{F}_{xx} &= F_{xx} - \alpha H_{xx} \\ \bar{A}_{xz} &= A_{xz} - \beta D_{xz} & \bar{D}_{xz} &= D_{xz} - \beta F_{xz} \\ \hat{D}_{xx} &= \bar{D}_{xx} - \alpha \bar{F}_{xx} & \hat{A}_{xz} &= \bar{A}_{xz} - \beta \bar{D}_{xz} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{4}{3h^2}, \quad \beta = 3\alpha = \frac{4}{h^2} \quad (13)$$

$$I_{yy}^{(i)} = \int_A (z)^i dA \quad (14)$$

Onde: i - i -ésimo momento de inércia de área sobre o eixo- y ; A - Área da seção transversal

Nas três teorias antes mencionadas, existem variáveis primárias e secundárias. As primeiras constituem uma condição de contorno geométrica, enquanto que a segunda estabelece uma condição de contorno de força. Deve-se notar que a teoria de terceira ordem requer as especificações de ϕ e dw_0/dx , e a força de cisalhamento é V_x .

▷ Euler-Bernoulli - TEB

$$\text{Primárias: } w_0, \frac{dw_0}{dx} \quad (15)$$

$$\text{Secundárias: } Q_x, M_{xx}$$

▷ Timoshenko - TT

$$\text{Primárias: } w_0, \phi \quad (16)$$

$$\text{Secundárias: } V_x, P_{xx}, M_{xx} - \alpha P_{xx}$$

▷ Reddy refinada - TR

$$\text{Primárias: } w_0, \phi \quad (17)$$

$$\text{Secundárias: } V_x, P_{xx}, M_{xx} - \alpha P_{xx},$$

$$\text{sendo } V_x \equiv Q_x - \beta R_x + \alpha \frac{dP_{xx}}{dx} \quad (18)$$

2.4 Relações entre as teorias

2.4.1 Relações entre as soluções TEB e TT

A deflexão, o momento fletor e a força cisalhante da teoria de viga de Timoshenko podem ser expressas em termos de quantidades correspondentes da teoria de viga de Euler-Bernoulli. Estas relações são resumidas por:

$$D_{xx}w_0^T(x) = D_{xx}w_0^E(x) + \frac{D_{xx}}{A_{xz}K_s}M_{xx}^E(x) + C_1\left(\frac{D_{xx}}{A_{xz}K_s}x - \frac{x^3}{6}\right) - C_2\frac{x^2}{2} - C_3x - C_4 \quad (19)$$

$$D_{xx}\phi^T(x) = -D_{xx}\frac{dw_0^E}{dx} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \quad (20)$$

$$M_{xx}^T(x) = M_{xx}^E(x) + C_1x + C_2 \quad (21)$$

$$Q_x^T(x) = Q_x^E(x) + C_1 \quad (22)$$

Onde C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são constantes de integração. Estas são determinadas pelas condições de contorno da estrutura em particular.

2.4.2 Relações entre as soluções TEB e TR

Ao contrário da teoria de viga de Timoshenko, a teoria de terceira ordem requer a solução de uma equação de segunda ordem adicional que pode ser dada em termos de Q_x^R , M_{xx}^R , ϕ^R ou w_0 . No caso de vigas sob carga transversal uniformemente distribuída q_0 , a equação de segunda ordem em termos de Q_x^R é dada por,

$$\frac{d^2Q_x^R}{dx^2} - \lambda^2Q_x^R = \mu\left[\frac{q_0}{2}(L-2x) + C_1\right] \quad (23)$$

onde

$$\lambda^2 = \frac{\hat{A}_{xz}D_{xx}}{\alpha(F_{xx}\bar{D}_{xx} - \bar{F}_{xx}D_{xx})} \text{ e } \mu = \frac{\bar{A}_{xz}\bar{D}_{xx}}{\alpha(F_{xx}\bar{D}_{xx} - \bar{F}_{xx}D_{xx})} \quad (24)$$

A solução desta equação diferencial é

$$Q_x^R(x) = C_5\sinh\lambda x + C_6\cosh\lambda x + \frac{\mu}{\lambda^2}(Q_x^E + C_1) \quad (25)$$

As equações para força e momentos resultantes, rotação e deflexão da TR em termos das soluções de TEB são dadas por

$$V_x^R(x) = Q_x^R - \beta R_x + \alpha\frac{dP_{xx}}{dx} = \frac{dM_{xx}^R}{dx} = Q_x^E(x) + C_1 \quad (26)$$

$$M_{xx}^R(x) = M_{xx}^E(x) + C_1x + C_2 \quad (27)$$

$$D_{xx}\phi^R(x) = -D_{xx}\frac{dw_0^E}{dx} + \alpha\left(\frac{F_{xx}}{A_{xz}}\right)Q_x^R + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \quad (28)$$

$$D_{xx}w_0^R(x) = D_{xx}w_0^E(x) + \left(\frac{\bar{D}_{xx}}{A_{xz}}\right)\left(\int Q_x^R(\eta)d\eta\right) - C_1\frac{x^3}{6} - C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4 \quad (29)$$

As seis constantes de integração ($C_1 - C_6$) são determinadas usando as seis condições de contorno calculadas na teoria de terceira ordem. As condições de contorno para vários tipos de suporte são abaixo definidas, de acordo com as variáveis primárias e secundárias da TR:

Livre (L):

$$\begin{aligned} Q_x^R - \beta R_x + \alpha \frac{dP_{xx}}{dx} &= 0 \\ M_{xx}^R - \alpha P_{xx} &= 0 \\ P_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Simples (S):

$$\begin{aligned} w_0^R &= 0 \\ M_{xx}^R - \alpha P_{xx} &= 0 \\ P_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Engaste (E):

$$\begin{aligned} w_0^R &= 0 \\ \phi^R &= 0 \\ \frac{dw_0^R}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

3 MODELO DE ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO DE REDDY

Reddy (1997) desenvolveu um elemento que incorpora a cinemática das três teorias antes apresentadas. A dedução utiliza as relações entre as soluções das três teorias. Para evitar resolver a equação de segunda ordem, simplificou-se a teoria de terceira ordem através da redução de ordem da teoria de sexta para quarta. Isto se faz duplicando-se o termo de segunda derivada na equação diferencial adicional para w_0 . Enquanto esta é uma aproximação da teoria original de terceira ordem é tão simples e preciso quanto a teoria de viga de Timoshenko, além de não requerer o fator de correção ao cisalhamento.

3.1 TR simplificado

Inicialmente deriva-se a equação de segunda ordem em termos de w_0 . Substituindo (7) em (27) obtemos

$$\bar{D}_{xx} \frac{d\phi^R}{dx} - \alpha F_{xx} \frac{d^2 w_0^R}{dx^2} = -D_{xx} \frac{d^2 w_0^E}{dx^2} + C_1 x + C_2 \quad (33)$$

Integrando, a equação acima torna-se

$$\bar{D}_{xx} \phi^R - \alpha F_{xx} \frac{dw_0^R}{dx} = -D_{xx} \frac{dw_0^E}{dx} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (34)$$

De (5), (8) e (10), temos que

$$\frac{d\bar{M}_{xx}^R}{dx} \equiv \frac{d\bar{M}_{xx}^R}{dx} - \alpha \frac{dP_{xx}}{dx} = \hat{A}_{xz} \left(\phi^R + \frac{dw_0^R}{dx} \right) \quad (35)$$

De modo que

$$\phi^R = \frac{1}{\hat{A}_{xz}} \frac{d\bar{M}_{xx}^R}{dx} - \frac{dw_0^R}{dx} \quad (36)$$

Substituindo (36) em (33), obtemos

$$\left(\frac{\bar{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} \right) \frac{d\bar{M}_{xx}^R}{dx} - D_{xx} \frac{dw_0^R}{dx} = -D_{xx} \frac{dw_0^E}{dx} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (37)$$

Que integrada produz

$$D_{xx} w_0^R(x) = \left(\frac{\bar{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} \right) \bar{M}_{xx}^R + D_{xx} w_0^E(x) - C_1 \frac{x^3}{6} - C_2 \frac{x^2}{2} - C_3 x - C_4 \quad (38)$$

De (7) temos

$$M_{xx}^R = \bar{D}_{xx} \frac{d\phi^R}{dx} - \alpha F_{xx} \frac{d^2 w_0^R}{dx^2} \quad (39)$$

$$\bar{M}_{xx}^R \equiv M_{xx}^R - \alpha P_{xx} = \hat{D}_{xx} \frac{d\phi^R}{dx} - \bar{F}_{xx} \frac{d^2 w_0^R}{dx^2} \quad (40)$$

Eliminando $d\phi^R/dx$ de (39) e (40), obtemos

$$\hat{D}_{xx} M_{xx}^R - \bar{D}_{xx} \bar{M}_{xx}^R = \alpha (F_{xx} \hat{D}_{xx} + \bar{F}_{xx} \bar{D}_{xx}) \frac{d^2 w_0^R}{dx^2} \quad (41)$$

E usando (27), podemos escrever

$$\bar{M}_{xx}^R = \frac{\hat{D}_{xx}}{\bar{D}_{xx}} (M_{xx}^E + C_1 x + C_2) + \frac{\alpha}{\bar{D}_{xx}} (F_{xx} \hat{D}_{xx} - \bar{F}_{xx} \bar{D}_{xx}) \frac{d^2 w_0^R}{dx^2} \quad (42)$$

Finalmente substituindo (42) em (38), obtemos

$$D_{xx} w_0^R(x) - \frac{\alpha}{\hat{A}_{xz}} (F_{xx} \hat{D}_{xx} - \bar{F}_{xx} \bar{D}_{xx}) \frac{d^2 w_0^R}{dx^2} = D_{xx} w_0^E(x) + \left(\frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} \right) M_{xx}^E - \left[\frac{x^3}{6} - \left(\frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} \right) \right] C_2 - C_3 x - C_4 \quad (43)$$

Simplifica-se a TR pelo negligenciamento dos termos de segunda derivada em (43), o que significa transformar a ordem da teoria de sexta para quarta. Obtemos assim,

$$D_{xx} w_0^R(x) = D_{xx} w_0^E(x) + \left(\frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} \right) M_{xx}^E - \left[\frac{x^3}{6} - \left(\frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} \right) \right] C_1 - C_3 x - C_4 \quad (44)$$

3.2 Resumo das relações entre TEB, TT e TR simplificada

As relações entre TEB, TT e TR simplificada pode ser expressa agora em termos de um conjunto de coeficientes introduzidos (A e B).

$$V_x^R(x) = Q_x^E(x) + C_1 \quad (45)$$

$$M_{xx}^R(x) = M_{xx}^E(x) + C_1 x + C_2 \quad (46)$$

$$D_{xx}\theta^R(x) = -D_{xx}\frac{dw_0^E}{dx} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (47)$$

$$D_{xx}w_0^R(x) = D_{xx}w_0^E(x) + AM_{xx}^E(x) - C_1\left(\frac{x^3}{6} - Ax\right) - C_2\left(\frac{x^2}{2} - B\right) + C_3 x + C_4 \quad (48)$$

onde

$$A = \begin{cases} 0 \rightarrow TEB \\ \frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xx}} \rightarrow TT \\ \frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} \rightarrow TR - simplificado \end{cases} \quad B = \begin{cases} 0 \rightarrow TEB \\ 0 \rightarrow TT \\ \frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} \rightarrow TR - simplificado \end{cases} \quad (49)$$

e θ^R é a inclinação equivalente

$$D_{xx}\theta^R(x) = -\bar{D}_{xx}\phi^R(x) - \alpha F_{xx}\frac{dw_0^R}{dx} \quad (50)$$

3.3 Dedução da matriz de rigidez

Considere um elemento de viga (hermitiano cúbico), de comprimento h e de propriedades geométricas e materiais constantes. Permitindo deslocamentos generalizados nos nós 1 e 2, de um elemento típico de alguma das três teorias de vigas definidas como ilustrado na Figura 3.1 por

$$\begin{aligned} w_0(0) &= \Delta_1, \quad \theta(0) \equiv \Delta_2 \\ w_0(h) &= \Delta_3, \quad \theta(h) \equiv \Delta_4 \end{aligned} \quad (51)$$

$\theta(\bar{x})$ denota a inclinação (sentido horário adotado como positivo), que tem diferente significado para as diversas teorias, como definido abaixo

$$\theta(\bar{x}) = \begin{cases} -\frac{dw_0}{dx} \rightarrow TEB \\ \theta^T(\bar{x}) \rightarrow TT \\ \theta^T(\bar{x}) \rightarrow TR - simplificado \end{cases} \quad (52)$$

Onde \bar{x} denota a coordenada do elemento, cuja origem está localizada no nó 1 do elemento. Q_1 e Q_3 representam as forças de cisalhamento (isto é, valores de V_x) nos nós 1 e 2, respectivamente. Igualmente Q_2 e Q_4 denotam os momentos fletores (isto é, valores de M_{xx}^R) nos nós 1 e 2, respectivamente. A Figura 3.1 mostra a convenção de sinal usada para os deslocamentos e forças generalizadas.

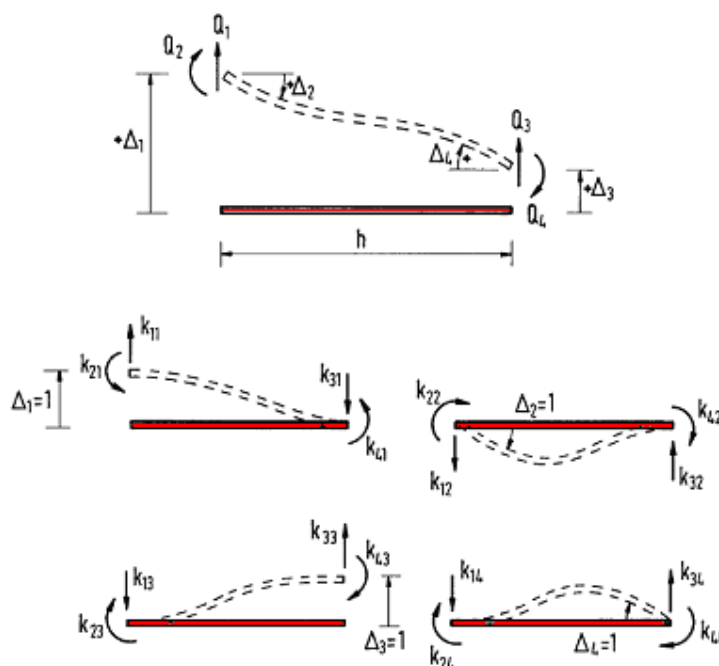


Figura 3.1: Convenção de sinal e geométrica para deslocamentos e forças generalizadas de um elemento de viga: (a) forças generalizadas e deslocamentos generalizados; (b) interpretação dos coeficientes de rigidez como forças requeridas para produzir deslocamentos unitários generalizados (Reddy, 1997).

A matriz de rigidez para o elemento unificado é deduzido usando o método tradicional para calcular a rigidez na análise estrutural que envolve impor um deslocamento unitário generalizado, enquanto todos os outros deslocamentos generalizados são zero, e determinando as forças requeridas para obter o equilíbrio na viga. A formulação utiliza as relações entre TEB, e TT e TR. Isto equivale a usar interpolação cúbica de Hermite para a deflexão transversal e interpolação dependente para a inclinação.

Para obter a primeira coluna da matriz de rigidez do elemento, estabelecemos que:

▷ em $\bar{x} = 0$:

$$w_0^E = w_0^T = w_0^R \equiv \Delta_1, \quad \frac{dw_0^E}{dx} = \theta^T = \theta^R = 0 \quad (53)$$

▷ em $\bar{x} = h$:

$$w_0^E = w_0^T = w_0^R = 0, \quad \frac{dw_0^E}{dx} = \theta^T = \theta^R = 0 \quad (54)$$

e assim determinamos as constantes $C_1 - C_4$ de (45) a (48). Obtemos então:

$$C_1 = \frac{12D_{xx}}{h^3} \left(\frac{A}{\frac{h^2}{12} + A} \right) \Delta_1, \quad C_2 = -\frac{h}{2} C_1 \quad (55)$$

$$C_3 = 0, \quad C_4 = \left(\frac{6D_{xx}}{h^2} A \right) \Delta_1 + BC_2$$

Com a substituição das constantes calculadas acima nas equações (45)-(48) produz-se,

$$\begin{aligned}
Q_1 &\equiv -V_x^R(0) = \mu \left(\frac{12D_{xx}}{h^3} \right) \Delta_1 \\
Q_2 &\equiv -M_{xx}^R(0) = -\mu \left(\frac{6D_{xx}}{h^2} \right) \Delta_1 \\
Q_3 &\equiv -V_x^R(h) = -\mu \left(\frac{12D_{xx}}{h^3} \right) \Delta_1 \\
Q_4 &\equiv -M_{xx}^R(h) = -\mu \left(\frac{6D_{xx}}{h^2} \right) \Delta_1
\end{aligned} \tag{56}$$

onde

$$\mu = \frac{1}{1+12\Omega}, \quad \Omega = \frac{A}{h^2} \tag{57}$$

O mesmo procedimento pode ser repetido, com um conjunto de deslocamentos unitários generalizados diferentes para obter os coeficientes de rigidez restantes. O modelo de elemento finito completo é dado por

$$\mu \begin{bmatrix} \frac{12D_{xx}}{h^3} & -\frac{6D_{xx}}{h^2} & -\frac{12D_{xx}}{h^3} & -\frac{6D_{xx}}{h^2} \\ -\frac{6D_{xx}}{h^2} & \frac{4D_{xx}}{h} \lambda & \frac{6D_{xx}^e}{h^2} & \frac{2D_{xx}}{h^3} \zeta \\ \frac{12D_{xx}}{h^3} & \frac{6D_{xx}}{h^2} & \frac{12D_{xx}}{h^3} & \frac{6D_{xx}}{h^2} \\ -\frac{6D_{xx}}{h^2} & \frac{2D_{xx}}{h} \zeta & \frac{6D_{xx}}{h^2} & \frac{4D_{xx}}{h} \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} \tag{58}$$

onde

$$\lambda = 1 + 3\Omega, \quad \zeta = 1 - 6\Omega \tag{59}$$

$$q_i^e = \int_0^h q(x) \varphi_i(x) dx \tag{60}$$

Aqui $\varphi_i(x)$ denota as funções de interpolação de Hermite implícita nas equações (45)-(48).

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS ANALISADOS COM O PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESTUDO DE PÓRTICOS PLANOS.

A matriz de rigidez deduzida da teoria de viga unificada de Reddy foi implementada no programa linear para pórtico estrutural **plane_frame_1.f90**, que teve seu código escrito por Taylor (2003). Constantes foram inseridas para caracterizar propriedades materiais (Tabela 4.1), além de outras que permitem ao usuário fazer a opção pela teoria de viga com a qual o mesmo deseja trabalhar.

E	A	Iz (2)	Iz (4)	Iz (6)	G	Ks	h
10^6	10^3	10^3	$1,8 \cdot 10^3$	$3,857 \cdot 10^3$	$3,846 \cdot 10^6$	0,8333	3,464

Tabela 4.1: Propriedades materiais usadas na teoria de viga unificada de Reddy

Dois exemplos numéricos foram estudados com o programa após as implementações antes referidas. A primeira estrutura trata-se de uma viga simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída - Figura 4.1.

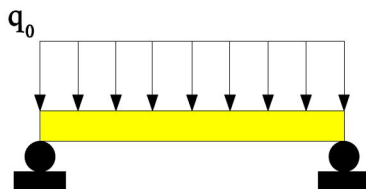


Figura 4.1: Viga simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída

Como se pode observar pela Tabela 4.2, os resultados fornecidos pelo programa tanto para as deflexões quanto para as rotações dão valores iguais nas três teorias de viga que o modelo unificado de Reddy incorpora, independentemente da discretização da estrutura. É possível afirmar que para os propósitos da análise (linear) os elementos são destravados em relação aos efeitos do cisalhamento nas três teorias.

Elemento	N=1	N=2	N=4	N=1	N=2	N=4
$L/h = 10$	$v \times 10^{-2}$			$-\phi \times 10^{-3}$		
TEB	-0,160045	-0,160045	-0,160045	-0,500000	-0,500000	-0,500000
TT/IE	-0,160045	-0,160045	-0,160045	-0,500000	-0,500000	-0,500000
TR	-0,160045	-0,160045	-0,160045	-0,500000	-0,500000	-0,500000
$L/h = 100$	$v \times 10^2$			$-\phi$		
TEB	-0,156288	-0,156288	-0,156288	-0,500000	-0,500000	-0,500000
TT/IE	-0,156288	-0,156288	-0,156288	-0,500000	-0,500000	-0,500000
TR	-0,156288	-0,156288	-0,156288	-0,500000	-0,500000	-0,500000

Tabela 4.2: Comparação das soluções por elemento finito com as deflexões e rotações máximas exatas de uma viga isotrópica simplesmente apoiada com carga transversal uniformemente distribuída.

A segunda análise realizada deu-se em um pórtico estrutural com dois membros. Uma ilustração deste é exibida na Figura 4.2, com as três malhas nas quais foi feita sua discretização.

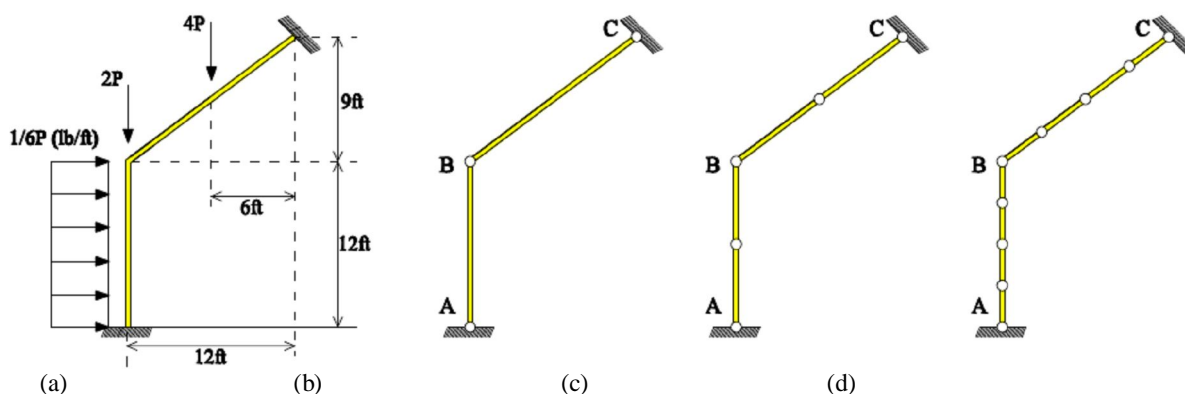


Figura 4.2: (a) Pórtico analisado; (b,c e d) Discretização da estrutura em malhas com 2, 4 e 8 elementos (Reddy, 1997).

A análise dos resultados (Tabela 4.3 e 4.4) produzidos pelo programa de análise linear, no caso do pórtico plano, nos mostra que os valores tanto de deslocamentos quanto de forças internas nos nós são os mesmos para as três teorias e para os três refinamentos de malhas

sucessivamente realizados. Além disso, pode-se verificar a característica da superconvergência dos modelos para os exemplos numéricos estudados.

Deslocamentos no nó B (10^{-4})	TEB (2)	TT (2)	TR (2)	TT(4)	TR (4)	TT (8)	TR (8)
u_B	0,83925	0,83925	0,83925	0,83925	0,83925	0,83925	0,83925
v_B	-0,68131	-0,68131	-0,68131	-0,68131	-0,68131	-0,68131	-0,68131
ϕ_B	-0,96169	-0,96169	-0,96169	-0,96169	-0,96169	-0,96169	-0,96169

Tabela 4.3: Deslocamentos no nó B da estrutura aperticada calculados pela Teoria Unificada de Reddy.

Esforços		TEB (2)	IIE (2)	TR (2)	IIE(4)	TR (4)	IIE (8)	TR (8)
Membro AB	N^A	4,73135	4,73135	4,73135	4,73135	4,73135	4,73135	4,73135
	Q_y^A	0,72641	0,72641	0,72641	0,72641	0,72641	0,72641	0,72641
	M_z^A	10,9413	10,9413	10,9413	10,9413	10,9413	10,9413	10,9413
	N^B	-4,73135	-4,73135	-4,73135	-4,73135	-4,73135	-4,73135	-4,73135
	Q_y^B	1,27519	1,27519	1,27519	1,27519	1,27519	1,27519	1,27519
	M_z^B	-50,4539	-50,4539	-50,4539	-50,4539	-50,4539	-50,4539	-50,4539
Membro BC	N^B	2,65896	2,65896	2,65896	2,65896	2,65896	2,65896	2,65896
	Q_y^B	1,41996	1,41996	1,41996	1,41996	1,41996	1,41996	1,41996
	M_z^B	50,4539	50,4539	50,4539	50,4539	50,4539	50,4539	50,4539
	N^C	-0,25896	-0,25896	-0,25896	-0,25896	-0,25896	-0,25896	-0,25896
	Q_y^C	1,78004	1,78004	1,78004	1,78004	1,78004	1,78004	1,78004
	M_z^C	-82,8607	-82,8607	-82,8607	-82,8607	-82,8607	-82,8607	-82,8607

Tabela 4.4: Forças nos nós A, B e C da estrutura aperticada calculados pela Teoria Unificada de Reddy.

5. CONCLUSÕES

Foi apresentado as teorias de viga clássica e deformáveis a cisalhamento. A formulação de um modelo unificado proposto por Reddy que engloba as teorias de Euler-Bernoulli, Timoshenko e terceira ordem de Reddy é mostrado e, sua matriz de rigidez foi implementada num programa linear de elementos finitos. Exemplos numéricos de estruturas compostas por elementos de viga foram investigadas. Os resultados mostram que sob um prisma linear de análise, os valores das rotações e deflexões em pontos notáveis das peças analisadas são equivalentes para as três teorias de viga abrangida pelo modelo unificado. Observa-se ainda a característica da superconvergência além da não ocorrência de travamento ao cisalhamento.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

J. N. Reddy, "Unified finite elements based on the classical and shear deformation theories of beams and axymmetric circular plates", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, pp. 495-510, (1997).

J. N. Reddy, “On locking-free shear deformable beam finite elements”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 149, pp. 113-132, (1997).

J. N. Reddy, “A corotacional finite element formulation for the analysis of planar beams”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 553-570, (2005).

J. N. Reddy., “An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis”, Oxford University Press : Oxford, U.K., 2004.

Rodrigues, P. F. N., “Ferramentas Numéricas para a Análise Não-Linear Física e Geométrica de Estruturas Reticuladas na Exploração de Petróleo Offshore”, Tese de doutorado, COOPE : Rio de Janeiro, 2000.

Taylor, W.M.S, Programa para análise estrutural linear de pórtico planos plane_frame.f90, Universidade de Brasília – UnB : Brasília, Brasil, 2003.