

MODELO FENOMENOLOGICO DE UNA TOBERA DE LAVAL QUE REPRESENTA LA TAPA DE ACELERACION DE GASES DE UNA TURBINA A GAS

Lina M. Gomez^a, Diana M. Lopez^b, Alejandro Toro^b

Juan S. Rudas^{a,b}, Luis Tobon^b

^aGrupo de Automática GAUNAL, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas. Medellín, Colombia, <http://gaunal.unalmed.edu.co>

^bGrupo de Tribología GTS, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas. Medellín, Colombia, gtsunalmed@gmail.com, <http://www2.unalmed.edu.co/~gts/>

Palabras Clave: Modelamiento, Turbina a gas, Tobera de Laval, Discretización, Control, Lazo Abierto Estabilidad.

Resumen. En este artículo se presenta el desarrollo de un modelo fenomenológico de una Tobera de Laval, dispositivo que representa la etapa de aceleración de gases de combustión de una turbina a gas. Este modelo se basa en los balances de energía, momento y continuidad de los gases de combustión que fluyen a través de la Tobera de Laval. El modelo fenomenológico se lleva a un modelo en lenguaje de control con el fin de realizar el análisis de estabilidad y plantear alternativas de control e instrumentación.

1 INTRODUCCIÓN

Se han venido utilizando en estas últimas décadas en Colombia como centrales de apoyo a la generación hidroeléctrica, y dadas sus condiciones de operación extremas necesitan de un continuo ciclo de mantenimiento predictivo evitando detenerlas para una reparación particular o articular de la planta ([Díez, 2000](#)).

La turbina a gas es un dispositivo térmico rotativo con una baja relación peso/potencia, diseñado para extraer energía de un gas que fluye a través de ella y transformarla en potencia útil. Para la generación de energía mediante turbinas a gas se debe realizar un proceso que inicia con la captación de aire atmosférico que es filtrado, seguidamente el aire es comprimido en sucesivas etapas hasta alcanzar la presión de trabajo, luego es desviado hasta el sistema de mezcla de combustible donde se alcanza una relación aire/combustible necesario para dar paso al sistema de combustión donde la temperatura de los gases es elevada, y donde se da origen a un flujo de trabajo con alta presión y alta temperatura, este fluido es direccionado a través de varias etapas de expansión que aprovechan su energía para generar trabajo mecánico sobre un eje acoplado a un generador eléctrico, donde mediante campos magnéticos convierte el movimiento mecánico en corriente eléctrica en una bobina de cobre ([Millán, 2001](#)).

Con el fin de aumentar la vida útil de los componentes de las turbinas se deben identificar la evolución de los fenómenos de fatiga, de formación de depósitos, de corrosión y de desgaste en las condiciones transitorias de carga y descarga; es necesario entonces, realizar el modelado de dispositivos que puedan emular las condiciones de alguna de las diferentes etapas de una Turbina a gas para a realizar estudios tales como de desgaste de materiales, ciclos de eficiencia y desempeño entre otros. Para realizar estos estudios es necesario recrear las condiciones de la etapa de aceleración de gases de combustión, debido a los altos costos que implica realizar los ensayos directamente con la turbina a gas. Entre los dispositivos que pueden llegar a acelerar un fluido hasta las condiciones de velocidad supersónicas se encuentra la Tobera de Laval.

La Tobera de Laval es un dispositivo que consta de dos secciones, la primera convergente y la segunda divergente ([Cambel, 1961](#)); este dispositivo tiene la capacidad de acelerar fluidos compresibles a velocidades cercanas de MACH 2, el fluido a través de la tobera se acelera hasta que en la garganta (unión de las secciones convergente-divergente) rompe la barrera del sonido, disminuyendo su presión y aumentando la velocidad hasta alcanzar velocidades supersónicas. Estas velocidades son las que poseen las partículas de los gases de combustión que viajan a través de una turbina a gas y cuyo choque en los alabes generan el momento deseado en la turbina.

En la literatura se encuentran diferentes modelos fenomenológicos infinito-dimensionales que describen el comportamiento dinámico de una Tobera de Laval ([López, Toth, Nigro, 2005](#)) ([Triana, González, Romero, 2008](#)) y ([Arias, Gervacio, 2004](#)). Estos modelos han sido desarrollados buscando la forma de controlar alguna de las variables del fluido que atraviesa la Tobera y en algunos casos la finalidad es controlar la posición de la Tobera ([Naguil, Pedroni, Cova, et al, 2007](#)) para aprovechar la fuerza de empuje del fluido.

Por las características dinámicas que presentan los fluidos que atraviesan este dispositivo (Tobera de Laval) es posible desarrollar un modelo fenomenológico que emule las condiciones de presión, temperatura y en especial de velocidad de la etapa de aceleración de gases una turbina a gas.

Es necesario que la tobera de Laval emule los transitorios de carga y descarga que sufre la turbina a gas en diferentes puntos de operación; por tal razón, la tobera de Laval debe operar a lazo cerrado. No obstante, como es sabido de la teoría de control, para diseñar un sistema de control se debe tener un modelo del sistema. El modelo fenomenológico infinito dimensional no puede aplicarse directamente para fines de control, lo cual ocasiona que sea necesario obtener un modelo reducido que pueda utilizarse para fines de control, pero que conserve las características dinámicas del modelo infinitodimensional, con el fin de realizar un análisis a lazo abierto. Para ello en la Sección 2 se describen los aspectos metodológicos necesarios para obtener ambos modelos, en la Sección 3 se indican las simulaciones y análisis realizados con ambos modelos.

2 METODOLOGIA

El modelo fenomenológico que se desarrolla se basa en las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los fluidos – ecuación de continuidad, de momento y de energía – los estamentos de estas tres ecuaciones se rigen bajo tres principios físicos en la dinámica de un fluido, estos son: la conservación de la Masa, la segunda Ley de Newton y la conservación de la Energía. Además se deben considerar las características que posee un fluido no ideal a través de una tubería. En este caso se tiene un fluido compresible con un movimiento turbulento a través de un dispositivo de área variable.

Bajo las anteriores leyes físicas y desarrollando matemáticamente estos principios con las características fenomenológicas del transporte del fluido en una tubería de área variable se obtiene las ecuaciones (1) a (3) que describen el comportamiento dinámico de fluido a través de la Tobera de Laval:

Ley de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

(1)

Ley de conservación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v + \nabla \cdot (\rho u V) = - \frac{\partial p}{\partial (x,y,z)} + \frac{\partial \tau_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z(x,y,z)}{\partial z} + \rho f_{(x,y,z)}$$

(2)

Ley de conservación de energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) V \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) V \right] = \rho q + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho f \cdot V$$

)

Las ecuaciones (1) y (2) son las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales representan el flujo de un fluido, por su parte la ecuación (3) describe los fenómenos térmicos. Las ecuaciones de Balance se pueden llegar a expresar de diferentes formas depende de qué tipo de fenómeno se está representando; además si estas se encuentran en su forma conservativa o no-conservativa o si están representadas en la forma de Euler ([Anderson 1995](#)).

2.1 Flujo de un gas a través de una tobera de Laval

En el campo de los fluidos a través de dispositivos y/o tuberías se deben tener en cuenta consideraciones tales como, si existen o no variaciones en el área de la tubería y qué tipo de proceso tiene lugar el fluido que viaja a través de ella.

Una tobera de Laval, también llamada boquilla, es una tubería de área variable que consta de dos secciones, una sección convergente y otra divergente unidas por una garganta que es una pequeña longitud donde la tobera o boquilla tiene la menor área de la tubería, se puede observar una tobera de Laval en la [Figura No. 1](#). Cuando hay un gas fluyendo a través de una tobera de Laval se considera, de forma ideal, que se lleva a cabo un proceso de expansión isoentrópico (entropía constante), esta misma expansión tendría lugar en una turbina ideal a gas y se produciría sin pérdida o ganancia de calor (adiabática) y sin ninguna disipación de la energía disponible debido a la fricción, el estrangulamiento, etc. es decir un proceso reversible. Para el desarrollo del modelo de la tobera de Laval se supone que está disponible un suministro ilimitado de gas a una temperatura y presión específicas; la fuente de gas se denomina *estanque* o *deposito*, y la temperatura y la presión del mismo reciben el nombre de *condiciones de estanque*. El gas fluye del suministro a través de la tobera con una presión, temperatura y velocidad determinadas hacia un sumidero o recipiente de descarga donde la presión se mantiene controlada y es menor que la presión de estancamiento.

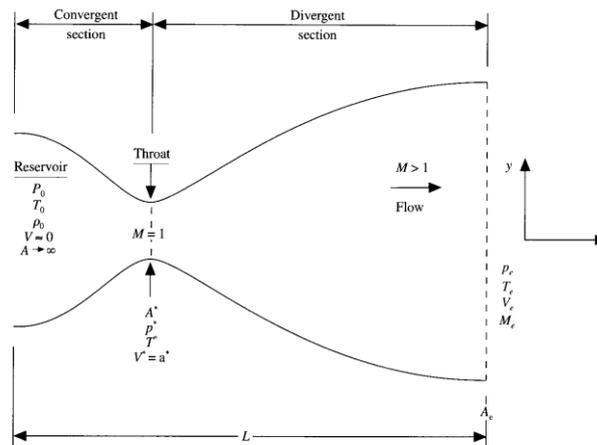


Figura No. 1. Tobera de Laval (Anderson 1995).

La configuración y elaboración de la tobera es controlada por el diseñador donde es él quien fija la relación entre el área de la sección transversal y la longitud de la tobera medida a partir de la entrada, también se tiene en cuenta parámetros como el ángulo de la sección divergente, este debe ser pequeño para que no haya separación de la capa límite del fluido (Shapiro, 1983) (Mora, 1976).

En la sección convergente de la Tobera de Laval el flujo es siempre subsónico pero puede llegar a ser sónico en la garganta de la tobera, para números de Mach pequeños el proceso cumple esencialmente la relación de Bernoulli para el flujo de fluidos no compresibles (Anderson, 1982), aunque en la sección convergente no se originan números de Mach mayores que la unidad. Ahora, en la sección divergente el flujo puede ser tanto subsónico como supersónico; en esta investigación se desea alcanzar perfiles de velocidad supersónicos en la sección divergente, es decir números Mach superiores a uno (Shames, 1976), (Oates, 1997), (Zucrow, 2001).

Para que exista un flujo a través de la tobera, a una determinada velocidad, la presión del recinto de llegada, p_e en la Figura No. 1, debe ser por lo menos ligeramente inferior a la presión del estanque, p_0 en la Figura No. 1, si son iguales no existe flujo. En el caso que p_e disminuya o sea considerablemente menor que p_0 aumenta la velocidad de flujo y la velocidad a través de la boquilla, siendo en la garganta la velocidad máxima. El flujo a través de una boquilla ya diseñada se controla estableciendo la presión del estanque y la presión del recipiente de descarga o llegada. Para un flujo dado, a través de una tobera específica, existe una presión única en cada punto a lo largo del eje de la tobera.

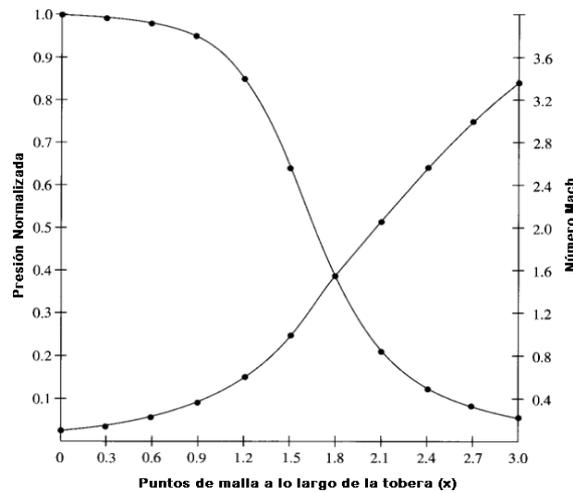


Figura 2. Cambio de Presión vs. Cambio de velocidad a través de la tobera (Anderson 1995).

Un límite se alcanza cuando la velocidad en la garganta se convierte en sónica, es decir en Mach=1, además la velocidad en la sección divergente alcanza a ser supersónica, bajo estas condiciones la relación entre las presiones de la garganta p^* y la presión del estanque se llama *relación crítica de presión* y se representa por $r_e = p^*/p_0$.

En la [Figura No. 2](#) se puede observar la relación inversa entre la presión y la velocidad [Mach], a través de una tobera de Laval. A medida que la presión disminuye en cada punto del eje de la tobera el flujo gana velocidad hasta llegar a desarrollarse un número Mach de alrededor de 3.2, en otras palabras, el fluido reduce su presión para aumentar su velocidad.

2.2 Modelado Matemático de una Tobera de Laval

Para desarrollar el modelo matemático de la Tobera de Laval cabe aclarar que dicho modelo se basará en el siguiente supuesto: los cambios que tienen las variables en el espacio los sufren solo en la coordenada x , ver [Figura No. 3](#). Tomando las ecuaciones de continuidad (1), momento (2) y energía (3) para un fluido regular, isoentrópico y unidimensional para una tobera de Laval y llevándolas a su forma integral, se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho u) dV + \iint_S (\rho u \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S (p dS)_x \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dV + \rho \iint_S \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S (p\mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} \quad (6)$$

Aplicando las anteriores ecuaciones en un diferencial de volumen de una sección de la tobera mostrado en la [Figura No. 3](#); se define la presión, la velocidad, la densidad y la energía interna para la cara de entrada del diferencial de área A , y se denotan por: p, V, ρ y e respectivamente.

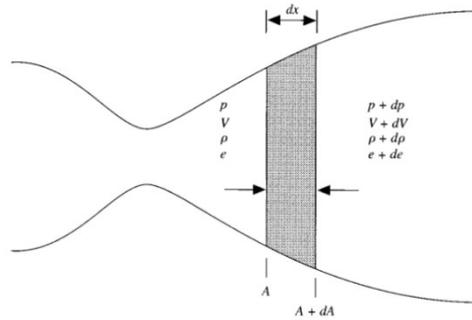


Figura No. 3 Diferencial de Volumen de la Tobera ([Anderson 1995](#)).

Análogamente para la cara de salida o derecha del diferencial se definen las mismas variables, y se denotan por: $p + dp, V + dV, \rho + d\rho$ y $e + de$, respectivamente. Es importante aclarar que el diferencial de volumen dx es muy pequeño, razón por la cual se puede realizar este análisis.

Resolviendo analítica y matemáticamente las ecuaciones (4), (5) y (6) y aplicándolas al diferencial de volumen se obtiene:

$$\text{Continuidad:} \quad \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V \frac{\partial A}{\partial x} + VA \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\text{Momento:} \quad \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho v \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (8)$$

$$\text{Energía:} \quad \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho V c_v \frac{\partial T}{\partial x} = -\rho RT \left[\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial(\ln A)}{\partial x} \right] \quad (9)$$

2.3 Discretización

Los modelos matemáticos que se representan por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias se usan en aplicaciones relacionadas con el monitoreo, supervisión y control automático ([García, 2009](#)). Dado que gran parte de la literatura técnica al respecto, además de la teoría de sistemas dinámicos se encuentra basada en este tipo de modelos, es difícil la aplicación de la teoría de control a sistemas de ecuaciones diferenciales parciales dado su carácter de dimensión infinita o infinitodimensional.

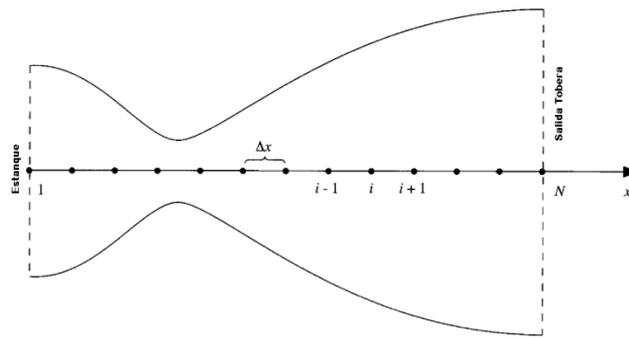


Figura No. 4 Puntos de malla para la aproximación al modelo finitodimensional ([Anderson 1995](#)).

Es por tal razón que se hace necesario realizar una aproximación de este tipo de sistemas a sistemas de dimensión finita, teniendo sumo cuidado en la generación de un nuevo modelo, ya que este debe reproducir el mismo comportamiento dinámico deseado.

En este trabajo se usa una aproximación mediante el método numérico de diferencias finitas ([García, 2009](#)), ([Gómez, 2009](#)). En la [Figura No. 4](#) se encuentra la representación de los puntos de malla de la tobera de Laval. Se tomaron cuatro puntos de malla para la aproximación del modelo, la variable espacial i que se muestra en la [Figura No. 4](#) es la que indica la partición de la tobera.

Tomando las ecuaciones desarrolladas anteriormente y aplicándole el método de discretización hacia adelante, se obtiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_i} = -\rho_i^t \frac{V_{i+1}^t - V_i^t}{\Delta x} - \rho_i^t \frac{V_i^t}{A_i^t} \frac{A_{i+1}^t - A_i^t}{\Delta x} - \rho_i^t \frac{\rho_{i+1}^t - \rho_i^t}{\Delta x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t_i} = \frac{1}{\rho_i^t} \frac{p_{i+1}^t - p_i^t}{\Delta x} - V_i^t \frac{V_{i+1}^t - V_i^t}{\Delta x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t_i} = -\frac{R}{c_v} T_i^t \frac{V_{i+1}^t - V_i^t}{\Delta x} - \frac{R}{c_v} T_i^t V_i^t \frac{\ln A_{i+1}^t - \ln A_i^t}{\Delta x} - V_i^t \frac{T_{i+1}^t - T_i^t}{\Delta x} \quad (12)$$

Para la evaluación de las ecuaciones (10) a (12) se necesitan los valores respectivos de ρ , V , p , T , y A para cada punto de evaluación de la malla propuesta para la tobera, es decir para cada punto i ; la discretización que se planteó anteriormente es hacia adelante por tanto para el punto $i = 4$ se necesitaría de los

valores de $i = 5$, valores que están fuera del perfil de la tobera, así consecutivamente se plantea:

- ❖ Para $i = 1$ *Diferencia hacia adelante*
- ❖ Para $i = 2$ y $i = 3$ *Diferencia central*
- ❖ Para $i = 4$ *Diferencia hacia atrás*

De igual forma se escogió diferencia hacia adelante para $i = 1$ por que la información de punto de malla inmediatamente anterior no se tiene, y finalmente se escogió para los puntos $i = 2,3$ diferencias central con el fin de abarcar la mayor cantidad de espacio del dispositivo y la relación entre punto y punto de la malla estuviera entrelazada, es decir, bajo esta forma de discretizar la información del punto $i = 1$ llegara hasta el punto $i = 3$, la del punto $i = 2$ hasta el punto $i = 4$ y de igual manera para los demás puntos de malla.

Antes de continuar cabe resaltar que el modelo que se obtienen al discretizar las (10), (11) y (12) es no lineal, razón por la cual es importante linealizar para llevar a cabo el análisis en lazo abierto.

2.4 Modelo en lenguaje de control: sistema a Lazo Abierto

La teoría de control clásica brinda algunas técnicas para analizar la estabilidad del sistema a Lazo Abierto, tales como los diagramas de fase, la localización de polos y análisis de frecuencia entre otros. Para realizar estos estudios es necesario tener el modelo del sistema representado en función entrada-salida o en una función de transferencia. Por otro lado la teoría moderna propone un análisis de estabilidad desde la representación del sistema en espacio de estados. El sistema de control se define por:

Variable manipulable $\mathbf{u} = P_1$
(Presión de estanque o estancamiento)

Variable a controlar $\mathbf{y} = V_4, T_4$
(Velocidad Salida Tobera- Temperatura Salida Tobera)

Estados $\mathbf{x} = \rho_1, V_1, T_1, \rho_2, V_2, T_2, \rho_3, V_3, T_3, \rho_4, V_4, T_4$
(Densidad, presión y temperatura en cada punto de malla).

Se puede observar que el modelo que se está estudiando no es lineal, razón por la cual es necesario Linealizar alrededor del punto de operación aplicando el

concepto de series de Taylor mostrado en (Goodwin, Graebe, Salgado, 2000). Obteniendo un modelo Lineal en lenguaje de control, así seguidamente se define:

Sea $F = [F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_7 F_8 F_9 F_{10} F_{11} F_{12}]^T$ donde $F_i = \frac{dx_i}{dt}$ $i = 1, 4$ y $X = \rho, V, T$

$$A = \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial U} \end{bmatrix}, \quad C = \frac{\partial Y(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Donde: A es una matriz de estados $[]^{n \times n}$, B es una matriz de entrada $[]^{n \times 1}$ y C es un matriz de salida $[]^{m \times n}$, con las anteriores matrices finalmente se halla el modelo semifísico de base fenomenológica en lenguaje de control de una tobera de Laval.

3 RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados de esta investigación, se dividen en: modelo fenomenológico infinito dimensional, modelo fenomenológico finito dimensional y finalmente análisis de control a lazo abierto.

3.1 Modelo fenomenológico infinito dimensional

Para obtener el modelo matemático de base fenomenológica se deben considerar los siguientes supuestos: el flujo a través de la tobera es isoentrópico y regular o continuo, el fluido o gas ingresa a la entrada de la tobera desde un estanque que se supone es un suministro ilimitado de gas, donde la presión y la temperatura de estanque o estancamiento se denota por p_0 y T_0 respectivamente, el área de la boca de entrada es grande, teóricamente $A \rightarrow \infty$, y la velocidad en la misma sección es muy lenta o $V \approx 0$. El flujo se expande isentrópicamente hacia la salida o boca de salida, donde la presión, temperatura, velocidad y número Mach de salida son denotados por p_e , T_e , V_e , y M_e respectivamente. El flujo es subsónico

en la sección convergente, sónico en la garganta ($M=1$). Se denotan los valores en la sección sónica o en la garganta de la tobera por p^* , T^* y V^* además el área en la garganta se denota por A^* . Se tiene que el área a través de la tobera es función de x pero la velocidad y la presión son también función de y , por lo tanto el fluido pertenece en realidad al campo de dos dimensiones o bidimensional (el fluido es función bidimensional xy), pero se hace la suposición que las propiedades del fluido varían solo en x , es decir se tendrá el modelo unidimensional de la tobera de Laval.

Ahora finalmente considerando los anteriores supuestos se toman las ecuaciones (7), (8) y (9), estas ecuaciones caracterizan el flujo de un gas a través de una tobera de Laval. Reorganizando las anteriores ecuaciones se tiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x} + \rho \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - V \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (14)$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -V \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{RT}{c_v} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{RTV}{c_v} \frac{\partial (\ln A)}{\partial x} \quad (15)$$

Ahora para completar el modelo es necesario definir el punto de operación del dispositivo, en este caso la tobera de Laval. Este punto de operación junto con las condiciones para dicha operación o funcionamiento se presentan a continuación:

- ❖ El punto de operación de la etapa de aceleración de gases de la turbina a modelar, se encuentra definido con el fin de alcanzar una velocidad a la salida de la tobera superior a $Mach=1.5$, o alrededor de 900 m/s, además de una temperatura de salida alrededor 1000 grados Kelvin.
- ❖ Las condiciones del estanque como la Temperatura y la presión están dadas para cumplir la dinámica de la turbina, con el fin de alcanzar las anteriores condiciones en la salida de la tobera ([Cambel, 1961](#)).
- ❖ La geometría de la tobera fue diseñada de forma tal que se pueda acelerar los gases a la velocidad deseada. Es importante aclarar que la geometría que se utiliza en este artículo no es la única que logra acelerar un fluido compresible a velocidades supersónicas, esto depende de las condiciones de frontera caracterizada por la presión de entrada y salida ([Shapiro, 1983](#)), ([Anderson, 1995](#)), ([Shames, 1976](#)).

Las condiciones de operación de la etapa de aceleración de gases de una turbina a gas son algo "extremas", ya que estas alcanzan presiones superiores a 300 Pascales, a temperaturas de 1400 Kelvin y velocidades superiores a Mach 1.5 o supersónicas.

Teniendo en cuenta los ítems las ecuaciones (13), (14) y (15) representan finalmente el modelo semifísico de base fenomenológica que caracteriza el flujo de un gas a través de una tobera de Laval; en este modelo se encuentra la constante universal de los gases R , el calor específico c_v , además de la densidad ρ , la velocidad V , la presión p y la temperatura T .

El modelo indicado en las ecuaciones (13), (14) y (15) se soluciona mediante el software FLUENT[®] simulando la tobera de Laval con la geometría ya predeterminada para tal fin. El software FLUENT[®] presenta la dinámica de un determinado fluido a través de un dispositivo o tubería. Para dar solución y hallar la convergencia de la simulación en FLUENT[®] es necesario diseñar la malla de la tobera en SolidEdge, geometría de la tobera, e importarla a GAMBIT[®] (programa preprocesador de FLUENT[®]) este programa consiste básicamente en la generación de la geometría real, la simplificación del modelo geométrico (Clean up), su posterior mallado y la definición de zonas o condiciones de frontera del mismo ([Acosta, Duque, González, et al, 2008](#)).

Después de crear la malla de la tobera en GAMBIT[®] se procede a definir los parámetros de simulación en FLUENT[®] tales como las Unidades, el tipo de algoritmo para la simulación o Solver, el Régimen y los Materiales, se debe establecer algunas características del fluido, en este caso gases de combustión, es decir una mezcla de Aire + CH₄ estas características son:

- ❖ Constante universal de los gases: $R=291.26$ [J/ (kg*Kelvin)]
- ❖ Calor Especifico: $C_v=756.7142$ [KJ/ (mol*Kelvin)]

Con estos parámetros definidos se puede dar inicio a la simulación del dispositivo en 3D.

En la [Figura No. 5](#) se presenta la simulación de la tobera de Laval, en esta figura se encuentra la solución convergente del modelo desarrollado para la Presión estática [pascal] (a) y la densidad [Kg/m³] (b). Esta simulación muestra que tanto la presión, como la densidad, disminuyen cuando el fluido viaja a través de la tobera, situación coherente con la dinámica antes planteada para este fenómeno.

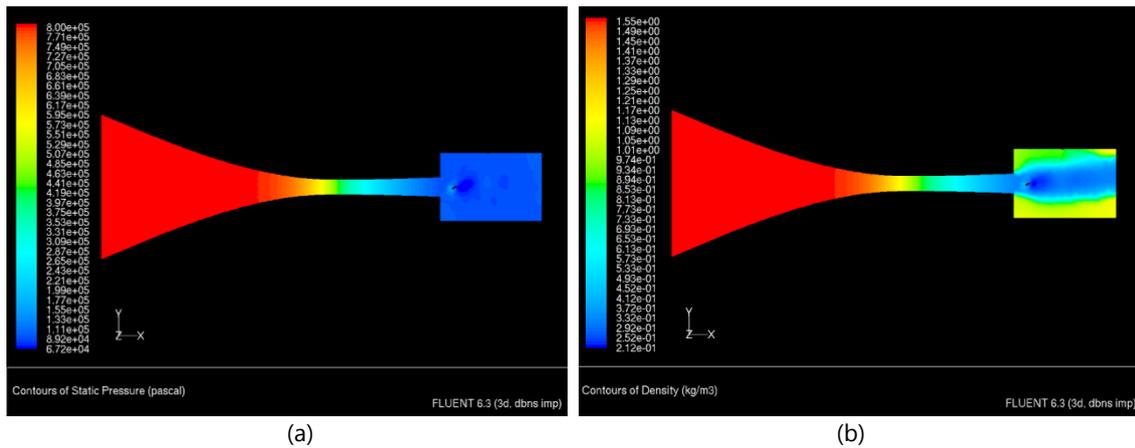


Figura No .5 Simulación en FLUENT® (a) Perfil de presión (b) Perfil de Densidad

3.2 Modelo fenomenológico finito dimensional

El modelo representado por las ecuaciones (13), (14) y (15), como se aclaró anteriormente, es de base infinita dimensional, por lo tanto se hace necesario discretizar dichas ecuaciones obteniendo el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_1 \frac{V_2 - V_1}{\Delta x} - \rho_1 \frac{V_1}{A_1} * \frac{A_2 - A_1}{\Delta x} - V_1 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta x} \quad (16)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -V_1 \frac{V_2 - V_1}{\Delta x} - \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 * \Delta x} \quad (17)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -T_1 \frac{R}{C_v} * \frac{V_2 - V_1}{\Delta x} - T_1 V_1 \frac{R}{C_v} * \frac{\ln(A_2) - \ln(A_1)}{\Delta x} - V_1 \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -\rho_2 \frac{V_3 - V_1}{\Delta x} - \rho_2 \frac{V_2}{A_2} * \frac{A_3 - A_1}{\Delta x} - V_2 \frac{\rho_3 - \rho_1}{\Delta x} \quad (19)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = -V_2 \frac{V_3 - V_1}{\Delta x} - \frac{P_3 - P_1}{\rho_2 * \Delta x} \quad (20)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = -T_2 \frac{R}{C_v} * \frac{V_3 - V_1}{\Delta x} - T_2 V_2 \frac{R}{C_v} * \frac{\ln(A_3) - \ln(A_1)}{\Delta x} - V_2 \frac{T_3 - T_1}{\Delta x} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} = -\rho_3 \frac{V_4 - V_2}{\Delta x} - \rho_3 \frac{V_3}{A_3} * \frac{A_4 - A_2}{\Delta x} - V_3 \frac{\rho_4 - \rho_2}{\Delta x} \quad (22)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = -V_3 \frac{V_4 - V_2}{\Delta x} - \frac{P_4 - P_2}{\rho_3 * \Delta x}$$

(23)

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = -T_3 \frac{R}{C_v} * \frac{V_4 - V_2}{\Delta x} - T_3 V_3 \frac{R}{C_v} * \frac{\ln(A_4) - \ln(A_2)}{\Delta x} - V_3 \frac{T_4 - T_2}{\Delta x}$$

(24)

$$\frac{\partial \rho_4}{\partial t} = -\rho_4 \frac{V_4 - V_3}{\Delta x} - \rho_4 \frac{V_4}{A_4} * \frac{A_4 - A_3}{\Delta x} - V_4 \frac{\rho_4 - \rho_3}{\Delta x}$$

(25)

$$\frac{\partial V_4}{\partial t} = -V_4 \frac{V_4 - V_3}{\Delta x} - \frac{P_4 - P_3}{\rho_4 * \Delta x}$$

(26)

$$\frac{\partial T_4}{\partial t} = -T_4 \frac{R}{C_v} * \frac{V_4 - V_3}{\Delta x} - T_4 V_4 \frac{R}{C_v} * \frac{\ln(A_4) - \ln(A_3)}{\Delta x} - V_4 \frac{T_4 - T_3}{\Delta x}$$

(27)

Las ecuaciones de (16) hasta (27) representan el modelo semifísico de base fenomenológica de forma finito dimensional. La primeras tres ecuaciones, discretización para $i=1$, se realizaron con diferencias finitas hacia adelante, para $i=2,3$ se discretizó con diferencias finitas central y finalmente para $i=4$ se utilizó diferencias finitas hacia atrás.

Finalmente la solución o convergencia del software se dividen los cuatro puntos de malla ($\Delta x = 0.3333$ [m]; $i=1,4$) para cada uno de estos puntos FLUENT[®] permite obtener los perfiles de velocidad, temperatura, presión y densidad; en la [Figura No. 5](#) se puede apreciar el perfil de presión (a) y el perfil de densidad (b) estos perfiles se presentan en la [Tabla No1](#).

Tabla No 1. Condiciones de Frontera y punto de Operación de la Tobera de Laval

Punto de Malla (i)	Velocidad [m/s]	Densidad [Kg/m ³]	Temperatura [kelvin]	Presión [Pascal]	Área [m ²]
1	60	0.85390807	1435	356897.7936	0.000390362
2	567.1916701	0.63986901	1316	245260.6145	0.000137768
3	804.9146941	0.46394283	1195	161477.9453	0.000133892
4	988.3140453	0.32401903	1073	101263.0693	0.000156137

Cabe resaltar que CFD es una metodología que aún se encuentra en desarrollo. Los métodos de solución que emplea CFD son aproximaciones resultantes de una simplificación en términos de las ecuaciones de Navier-Stokes y dependiendo del método escogido se alcanzan diferentes convergencias, así la escogencia del método se toma de acuerdo a la finalidad y dinámica del modelo.

Seguidamente se define el orden del sistema n como la cantidad de estados, denotado por el vector $X \in R^{n*1}$, así se tiene un sistema de $n=12$ y evaluando el sistema de las ecuaciones (I) hasta (XII) con los valores presentados en la [Tabla No 1](#) y linealizando alrededor de este punto de operación usando el Jacobiano, se obtiene un modelo Lineal en lenguaje de control. Así seguidamente se define:

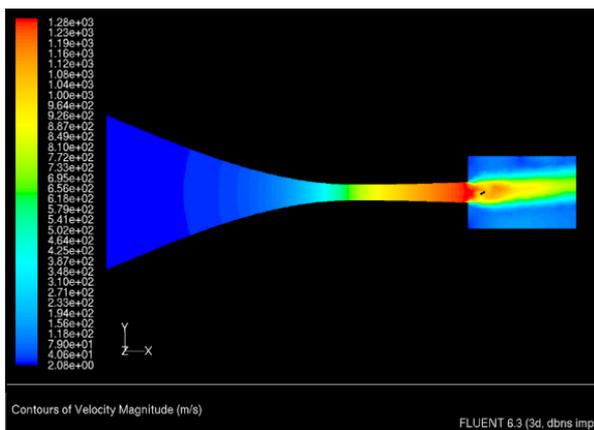
Sea $F = [F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_7 F_8 F_9 F_{10} F_{11} F_{12}]^T$
 donde $F_i = \frac{dX_i}{dt}$ $i = 1,4$ y $X = \rho, V, T$

Desde la representación de espacio de estados se obtienen los autovalores de la matriz A para analizar estabilidad:

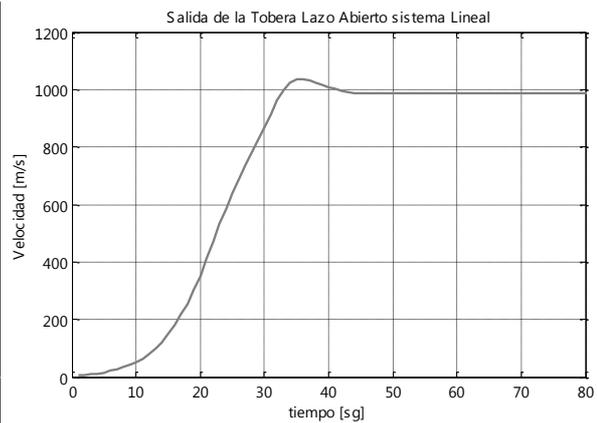
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2462.2 + 4694j & \lambda_2 &= -2462.2 - 4694j \\ \lambda_3 &= -2771.5 + 2163j & \lambda_4 &= -2771.5 - 2163j \\ \lambda_5 &= -1202.4 - 2867j & \lambda_6 &= -1202.4 + 2867j \\ \lambda_7 &= -758.15 - 1385j & \lambda_8 &= -758.15 + 1385j \\ \lambda_9 &= -576.56 & \lambda_{10} &= -880.21 \\ \lambda_{11} &= -200.3 + 201.5j & \lambda_{12} &= -200.3 - 201.5j \end{aligned}$$

Obteniendo que el sistema que se modelo es estable ya que sus autovalores todos se encuentran en el semiplano izquierdo negativo.

En la [Figura No. 6 \(a\)](#) se presenta el perfil de velocidad del simulador FLUENT® ante una presión de entrada de 356 Kpa, la velocidad alcanza alrededor de 1120 m/s. En la [Figura No. 6 \(b\)](#) se observa la velocidad que alcanza el modelo hallado ante la misma presión de 356 Kpa, la velocidad que alcanza el fluido esta alrededor de 1000 m/s.



(a)



(b)

Figura No. 6 Validación Modelo obtenido.

(a) Simulación Tobera FLUENT® (b) Respuesta del Modelo

En la [Figura No. 7](#) se presenta la respuesta de la temperatura, segunda salida del sistema modelado, tanto en la simulación en FLUENT® como en la respuesta a lazo abierto del modelo obteniendo que el comportamiento, ante la misma entrada una presión de 356 Kpa, es similar. La temperatura inicial está alrededor de 1175 °K y desciende hasta 750 °K, esta evolución de la temperatura es coherente con la dinámica de la tobera, ya que esta para ganar momento pierde presión y energía.

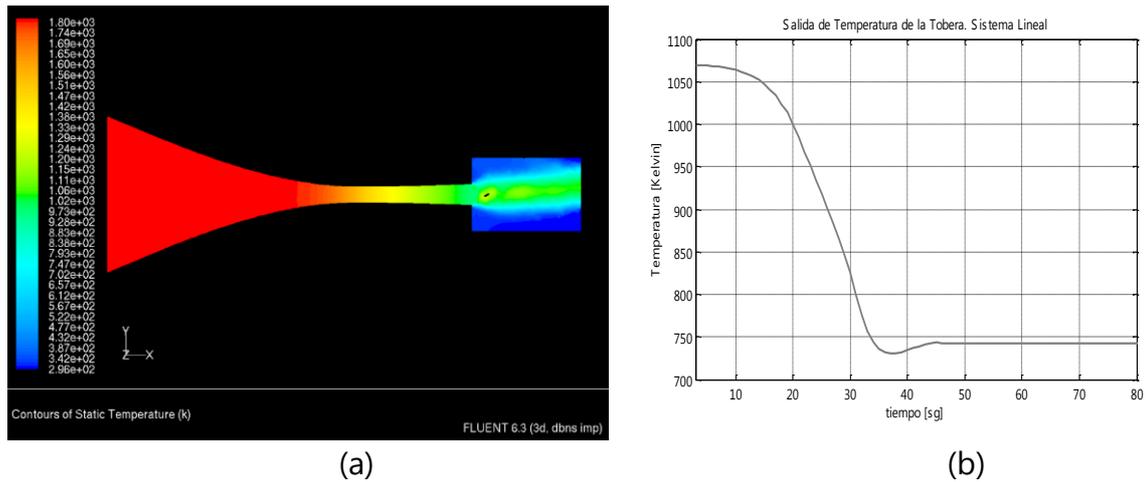


Figura No. 7 Validación Modelo obtenido.
 (a) Simulación Tobera FLUENT® (b) Respuesta del modelo

Esta pérdida de energía es debido a las irreversibilidades de una auténtica tobera respecto a la ideal, además existe disipación de energía desde y hacia el gas que fluye a través de la tobera, es decir, por no ser un sistema ideal el proceso no es reversible y tampoco isoentrópico por tanto este no es adiabático y presenta una interacción con el medio disipando energía debido a la fricción, el estrangulamiento, etc. ([Shapiro, A., 1983](#)).

En la [Figura No. 8](#) se presenta la respuesta de modelo lineal y no lineal ante diferentes cambios en la entrada. En esta figura se puede observar que cuando se reduce la presión de entrada la velocidad disminuye y cuando se aumenta la presión de entrada (manteniendo la presión de salida constante) la velocidad aumenta, esta condición es coherente con la dinámica de la tobera, ya que ante cambios en la presión de entrada la velocidad se ve directamente afectada.

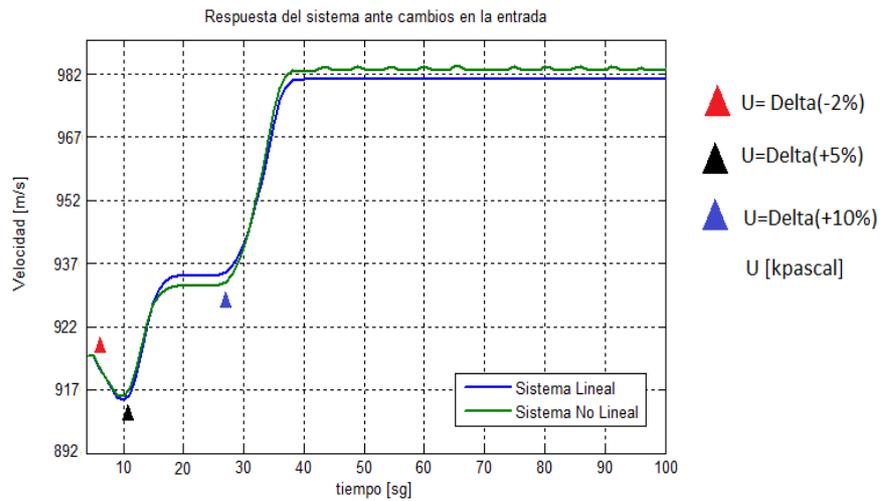


Figura No 8. Respuesta del sistema Lineal y No Lineal ante cambios en la entrada

4 CONCLUSIONES

En este artículo se desarrollaron varios modelos de una Tobera de Laval, la cual representa la etapa de aceleración de gases de combustión de una turbina a gas que alcanza acelerar un fluido a velocidades supersónicas. El primer modelo desarrollado es un modelo fenomenológico que se basa en las ecuaciones de Navier-Stokes, junto con el balance de energía. No obstante, el modelo obtenido es un modelo infinito dimensional que no es posible utilizar para fines de control. Por tal razón dicho modelo se transforma mediante una discretización en un modelo finito dimensional y además se linealiza alrededor del punto de operación, obteniéndose un modelo aplicable para fines de control. Finalmente este último modelo; esto es, el modelo finito dimensional y linealizado es validado con datos obtenidos mediante CFD verificándose que su comportamiento coincide con el modelo original.

BIBLIOGRAFÍA

- Acosta J.A., Duque C.A., González M.M., Galeano H. 2008, *Simulación 3d del flujo en un compresor centrífugo por medio de herramientas CFD bajo carga parcial*. Ingeniare. Revista chilena de ingeniería, vol. 16 N° 1, pp. 203-210
- Anderson, J. D. Jr. 1995. *Computational fluid dynamics, the basics with applications*. Ed. McGraw – Hill.
- Anderson, J. D., 1982. *Modern Compressible Flow*, McGraw - Hill,
- Arias R.R., Gervacio J. C. 2004. *Diseño y Caracterización de un Banco de Toberas Tipo Venturi en Régimen Crítico*. Centro Nacional de Metrología. México.
- Cambel, A.B., 1961. *Handbook of Fluids Dynamic*. Ed. V.L Streeter. McGraw-Hill, pp. 8-5 a 8-12.
- Díez, P.F., 2000. *Termodinámica Técnica*. Universidad de Cantabria, Departamento de Ingeniería Eléctrica y energética.
- García J.F., 2009. *Evaluación del Desempeño de una Estrategia de Diagnóstico de Fugas no Concurrentes en un Prototipo de Tuberías*. Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. Guadalajara, Jalisco.
- Gómez L.M., 2009. *Una aproximación al control de los procesos por lotes*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de San Juan, Argentina.
- Goodwin G.C., Graebe S.F., Salgado M.E. 2000. *Control System Design* Prentice Hall,.
- López E., Toth J., Nigro N., 2005. *Contrastación De Esquemas Numéricos 1D Recurriendo al Análisis De La Convergencia De Regímenes Estacionarios En Una Tobera De Laval*. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue Buenos Aires, Argentina
- Millán, J. A., 2001. *Máquinas y Motores Térmicos*. Escuela Universitaria Politécnica de Donostia-San Sebastián. Universidad del país vasco. San Sebastián España.
- Mora, C. M., 1976. *Introducción a la Dinámica de los Gases*, Editorial del Interior, Córdoba
- Naguil J.L., Pedroni J.P., Cova W. J., Jazni J.E., Modesti M.R., 2007 *Consideraciones Dinámicas Sobre el Control De Una Tobera Pivotante*. Instituto Universitario Aeronáutico, Centro de Investigaciones Aplicadas, Departamento Sistemas Electromecánicos. Av. Fuerza Aérea Córdoba – Argentina.

Oates, G. C., 1997. *Aerothermodynamics of Gas Turbines and Rocket Propulsion*, AIAA Textbook.

Shames, I. H., 1976. *Mecánica de los Fluidos*, McGraw - Hill, Méjico

Shapiro, A., 1983. *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Vol. I y II, Nueva York,

Triana W.M., González J.A., 2008. Romero J.C., 2008 *Modelamiento dinámico del proceso de gas – turbina de combustión en una planta de ciclo combinado*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Zucrow, J. M., 2001. *Aircraft and Missile Propulsion*, AIAA Textbook,