

## **EQUAÇÃO DA ONDA ESCALAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: UMA APROXIMAÇÃO DO MEC-D PARA PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS**

**Daniele C.Thoaldo<sup>a,b</sup>, José A. M. Carrer<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*PPGMNE: Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, [daniele.thoaldo@utp.br](mailto:daniele.thoaldo@utp.br), [carrer@ufpr.br](mailto:carrer@ufpr.br)  
<http://www.ppgmne.ufpr.br>*

<sup>b</sup>*Departamento de Matemática, Universidade Tuiuti do Paraná, Curitiba, Brasil,  
[daniele.thoaldo@utp.br](mailto:daniele.thoaldo@utp.br) <http://www.utp.br>*

**Palavras Chave:** equação da onda escalar; condições iniciais; MEC-D.

**Resumo.** Este trabalho foi idealizado com o desenvolvimento de uma aproximação do Método dos Elementos de Contorno no domínio do tempo, que será denotado por MEC-D, para a solução de problemas de propagação de ondas em domínios unidimensionais. O esquema de marcha no tempo empregado foi o método de Houbolt. O método utilizado garante estabilidade. Dois exemplos são incluídos e os resultados são comparados com as respectivas soluções analíticas.

## 1 INTRODUÇÃO

Problemas em domínios unidimensionais têm o mérito de fornecer a experiência ao pesquisador e também a confiança para enfrentar os casos mais elaborados. O interesse em resolver diversos problemas na engenharia tem motivado o surgimento de um grande número de formulações para o MEC. Para a solução de problemas de propagação da onda escalar em uma dimensão, as equações de contorno podem ser obtidas através de um tratamento residual, com a utilização de soluções fundamentais independentes do tempo, Greenberg (1998). A formulação resultante denomina-se MEC-D (onde D significa domínio).

Admitindo um intervalo finito, por exemplo,  $0 \leq x \leq L$ , como domínio do problema, o contorno é constituído apenas pelos nós extremos  $x = 0$  e  $x = L$ .

O esquema de marcha no tempo empregado será o método de Houbolt (1950), Bathe (1996) que é obtido da derivada de segunda ordem em relação ao tempo de polinômios cúbicos de Lagrange.

Dois exemplos numéricos são apresentados. Para validação, os resultados numéricos serão comparados com as respectivas soluções analíticas.

## 2 EQUAÇÕES GOVERNANTES DO MEC

A equação escalar da onda em um problema unidimensional é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

Para o caso 1D a solução fundamental utilizada é:

$$u^*(\xi, x) = \frac{|x - \xi|}{2} \quad (2)$$

A função  $u^*(\xi, x)$  representa o efeito, no ponto campo  $x$ , de uma carga aplicada no ponto fonte  $\xi$ , Vladimirov (1979).

A solução fundamental utilizada no desenvolvimento da formulação do MEC – D é a solução da equação abaixo:

$$\frac{d^2 u^*(\xi, x)}{dx^2} = \delta(x - \xi) \quad (3)$$

### 2.1 Formulação básica do MEC-D

A equação básica da formulação MEC-D é dada por:

$$u(\xi, t) = \left[ q^*(\xi, x) u(x, t) \right]_{x=0} - \left[ u^*(\xi, x) q(x, t) \right]_{x=L} + \left[ u^*(\xi, x) q(x, t) \right]_{x=0} + \frac{1}{c^2} \int_0^L u^*(\xi, x) \ddot{u}(x, t) dx \quad (4)$$

Na equação (4) nota-se a presença de uma integral de domínio; a manutenção dessa integral

caracteriza a formulação MEC-D. Além disso, a própria integral de domínio aparece em decorrência da utilização de uma solução fundamental independente do tempo.

Em forma matricial, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^c \\ \mathbf{u}_{n+1}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{n+1}^c \\ \mathbf{q}_{n+1}^d \end{Bmatrix} + \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^c \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^d \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ou em forma reduzida

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{q} + \frac{1}{c^2} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (6)$$

Os índices superiores representam onde estão localizados os pontos, c significa contorno e d significa domínio, e os índices inferiores (n+1) referem-se ao tempo da análise.

A função  $u$  representa o potencial e a função  $q$  representa o fluxo.

Note-se que a equação (4) é válida quando  $\xi \in \Gamma$  e quando  $\xi \in \Omega$ , independentemente da posição do ponto fonte.

A função  $q^*(\xi, x)$  é a derivada normal da solução fundamental:

$$q^*(\xi, x) = \frac{du^*(\xi, x)}{dn(x)} = \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial x} \frac{dx}{dn(x)} \quad (7)$$

A expressão para  $q^*(\xi, x)$  é investigada de acordo com a posição do ponto fonte no contorno. Assim, para  $\xi = 0$ , tem-se  $x > \xi$  e, conseqüentemente:

$$\frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial(x - \xi)}{\partial x} = \frac{1}{2} \quad (8)$$

Para  $\xi = L$ ,  $x < \xi$  e:

$$\frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\xi - x)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \quad (9)$$

Levando em conta que:

$$\left. \frac{dx}{dn(x)} \right|_{x=L} = 1 \quad e \quad \left. \frac{dx}{dn(x)} \right|_{x=0} = -1 \quad (10)$$

a expressão para  $q^*(\xi, x)$  é simplesmente dada por:

$$q^*(\xi, x) = \frac{1}{2} \quad (11)$$

A solução da equação (4) requer a discretização do domínio e a escolha de uma aproximação para aceleração. É admitido que a aceleração varia linearmente dentro de cada

célula do domínio. É importante notar que, se  $N$  intervalos são adotados, os pontos internos são numerados de 3 até  $(N + 1)$ , pois os nós 1 e 2 pertencem ao contorno.

## 2.2 Regime de marcha no tempo de Houbolt

O método de Houbolt (1950), Bathe (1996) é obtido por derivação de polinômios cúbicos de Lagrange; a aproximação para a aceleração é dada por:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} [2\mathbf{u}_{n+1} - 5\mathbf{u}_n + 4\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-2}] \quad (12)$$

Substituindo (12) em (5), tem-se.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^c \\ \mathbf{u}_{n+1}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{n+1}^c \\ \mathbf{q}_{n+1}^d \end{Bmatrix} + \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\mathbf{u}_{n+1}^c - 5\mathbf{u}_n^c + 4\mathbf{u}_{n-1}^c - \mathbf{u}_{n-2}^c \\ 2\mathbf{u}_{n+1}^d - 5\mathbf{u}_n^d + 4\mathbf{u}_{n-1}^d - \mathbf{u}_{n-2}^d \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Agora rearranjando os termos semelhantes, a equação (13) fica:

$$\begin{bmatrix} \left( (c \Delta t)^2 \mathbf{H}^{cc} - 2\mathbf{M}^{cc} \right) & -2\mathbf{M}^{cd} \\ \left( (c \Delta t)^2 \mathbf{H}^{dc} - 2\mathbf{M}^{dc} \right) & -2\mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^c \\ \mathbf{u}_{n+1}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (c \Delta t)^2 \mathbf{G}^{cc} \\ (c \Delta t)^2 \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{n+1}^c \\ \mathbf{q}_{n+1}^d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5\mathbf{u}_n^c + 4\mathbf{u}_{n-1}^c - \mathbf{u}_{n-2}^c \\ -5\mathbf{u}_n^d + 4\mathbf{u}_{n-1}^d - \mathbf{u}_{n-2}^d \end{Bmatrix} \quad (14)$$

O método de Houbolt tem sido bastante utilizado nas formulações em MEC-D (Carrer *et al.* 2009). Como é comum no MEC, tanto na formulação dependente do tempo (Mansur 1983) quanto na formulação MEC-D, a escolha do intervalo de tempo ainda se dá de maneira empírica. Não há, ao menos que seja do conhecimento dos autores, trabalhos relativos ao estudo da estabilidade e convergência do método.

## 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Quando  $n = 0$  na expressão (14), encontram-se valores  $u_{-2}$  e  $u_{-1}$ , que estão fora do domínio. Esses valores estão relacionados com as condições iniciais da seguinte forma (Carrer *et al.* 2009):

$$\mathbf{u}_{-2} = \mathbf{u}_0 - 2\Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (15)$$

$$\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{u}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (16)$$

### Exemplo 1

Esse exemplo consiste em uma barra fixa em  $x = 0$  e com uma carga aplicada na extremidade  $x = L$ . A figura 1.1 apresenta um gráfico para uma comparação dos resultados relativos ao potencial obtidos com o MEC-D e a solução analítica, em um ponto no meio da

barra  $x = \frac{L}{2}$ .

As seguintes condições de contorno são utilizadas:

$$u(0,t) = 0$$

$$q(L,t) = 1$$

Como condições iniciais, têm-se:

$$u(x,0) = 0 \text{ e } \dot{u}(x,0) = 0.$$

Para esse exemplo os seguintes valores foram adotados:

$$C = 1$$

$$\Delta t = 0.274$$

$$L = 12$$

A solução analítica é dada por: 
$$u(x,t) = x + \frac{8L}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{n\pi ct}{2L}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)}{n^2},$$

Stephenson (2007)

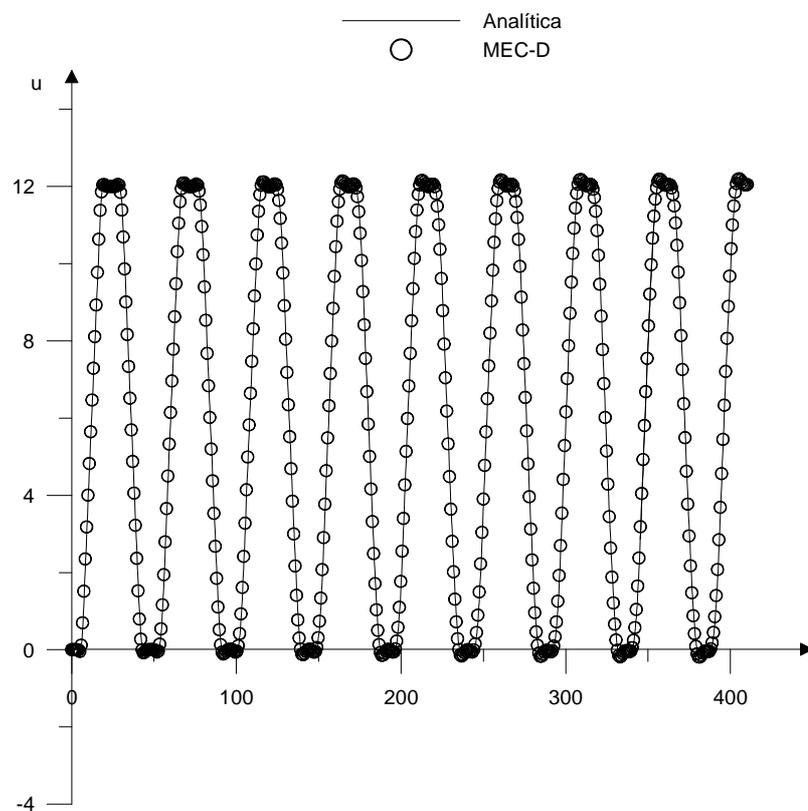


Figura 1.1: Barra com condição de contorno constante, potencial em  $x = \frac{L}{2}$ .



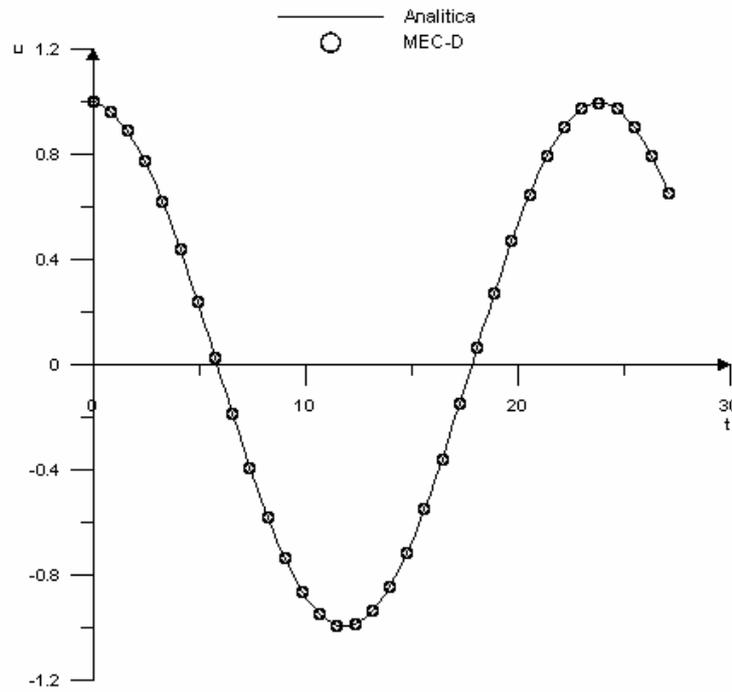


Figura 2.1: Barra com condição de contorno variável, potencial em  $x = \frac{L}{2}$ .

A figura 2.2 mostra o fluxo no ponto  $x = L$ :

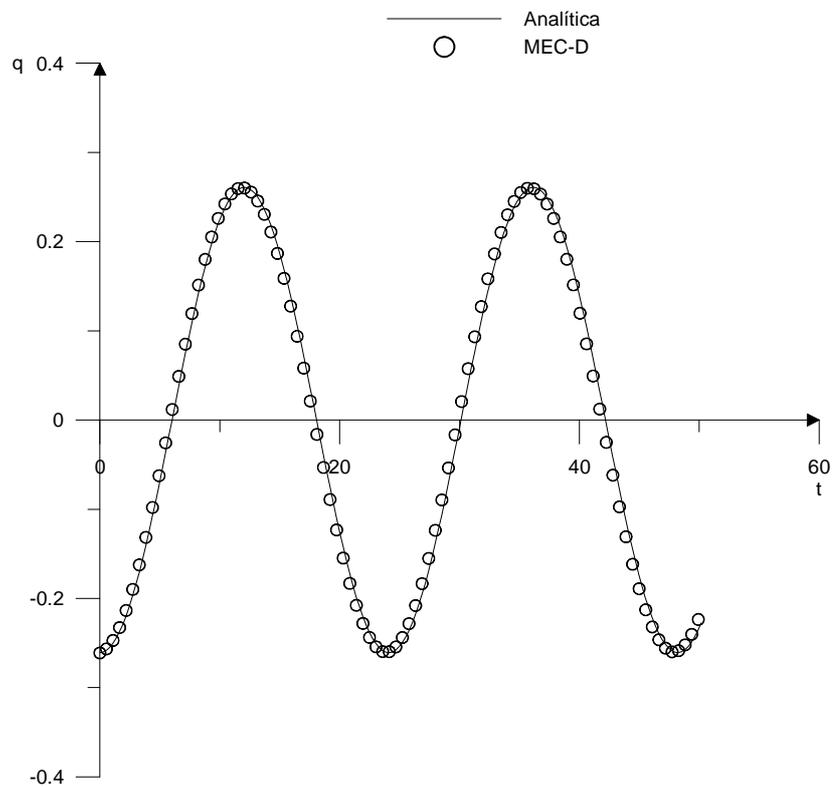


Figura 2.2: Barra com condição de contorno variável, fluxo em  $x = L$ .

#### **4 CONCLUSÃO**

A solução de problemas que envolvem a variável tempo pelo Método dos Elementos de Contorno é bastante atraente, uma vez que há várias possibilidades (que se traduzem em diferentes formulações) para a solução do problema. Entre as formulações disponíveis está a apresentada neste trabalho, denominada MEC-D porque ao empregar uma solução fundamental independente do tempo apresenta e conserva nas equações integrais uma integral de domínio cujo integrando é a solução fundamental multiplicada pela derivada de segunda ordem, em relação ao tempo, do potencial. Para problemas em uma dimensão o contorno é constituído por apenas dois nós e o domínio a ser discretizado é um intervalo finito; conseqüentemente, o desenvolvimento de uma formulação MEC-D torna-se relativamente simples. A simplicidade da formulação, aliada aos bons resultados obtidos, encoraja o seu emprego para a solução de outros problemas, tais como o da difusão. Note-se que a escolha de esquemas de marcha no tempo ainda é um tópico que deve merecer muita atenção nas formulações MEC-D, uma vez que questões relativas à convergência e estabilidade do método ainda não foram respondidas.

## REFERÊNCIAS

- Brebbia, C.A., and Dominguez, J., *Boundary Elements: An Introductory Course*, Computacional Mechanics Publications And Mcgraw-Hill, Southhampton, 1989.
- Carrer, J.A.M., and Mansur, W.J., Vanzuit, R.J., Scalar Wave Equation by the Boundary Element Method: a D-BEM Approach with Non-Homogeneous Initial Conditions. *Computational Mechanics* 2009, 44:31 – 44
- Greenberg, M. D., *Advanced Engineering Mathematics*, Prentice Hall-2ª Edição, New Jersey, 1998
- Houbolt, J.C. A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft. *Journal of the Aeronautical Sciences* 1950; **17**: 540-550.
- Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall-1ª Edição, New Jersey, 1996
- Mansur WJ. *A Time-stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*, Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1983.
- Stephenson, G., *Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*, Imperial College Press 2007.
- Vladimirov, V.S. *Generalized Functions in Mathematical Physics*. Nauka Publishers, Moscow, 1979.