

TEORIA E EXPERIMENTAÇÃO NO ESTUDO SOBRE ATRITOS EM ATUADORES ROBÓTICOS

Adriano P. Zeilmann^{a,b}, Samuel S. Gomes^b, Marco A.S. Terres^b, Leonardo B. Soares^b e
Sebastião C.P. Gomes^b

^aPrograma de Pós Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande,
Av. Itália km 8 Bairro Carreiros, Rio Grande, Brasil, adriano.zeilmann@gmail.com,
<http://www.modelagemcomputacional.furg.br/>

^bNúcleo de Matemática Aplicada e Controle (NUMA), Universidade Federal do Rio Grande, Av. Itália
km 8 Bairro Carreiros, Rio Grande, Brasil

Palavras Chave: Robótica, Atuadores, Atrito, Modelagem, Controle.

Resumo. Atuadores robóticos possuem atritos não lineares que dificultam o desempenho de leis de controle para robôs em geral. Especificamente no caso de manipuladores com elos flexíveis, o atrito no atuador pode inviabilizar qualquer tentativa de se atenuar as vibrações de forma ativa uma vez que os torques gerados pela lei de controle podem estar no interior da zona morta em torque do atuador, delimitada pelos valores positivo e negativo do atrito estático (ou seco, por aproximação). Outro fenômeno bastante comum nos atuadores é o comportamento do tipo adere - desliza (*Stick-Slip* em literatura inglesa). Este fenômeno está associado a atritos não lineares e acontece para baixas velocidades, podendo gerar ciclos limites em torno de uma referência numa estratégia de controle em malha fechada. Os problemas causados pelo atrito motivaram o surgimento de diversos trabalhos científicos, principalmente propondo algum novo modelo de atrito, ou utilizando algum modelo já existente numa estratégia de controle com compensação de atrito. O presente artigo insere-se nesse contexto, tratando-se de um estudo teórico e experimental sobre diversos modelos de atrito existentes na literatura científica. O suporte experimental é um moto-redutor do tipo *harmonic-drive*, equipado com um encoder incremental de alta resolução acoplado ao rotor. Portanto, tem-se a posição angular do rotor e, conseqüentemente, a velocidade do mesmo, obtida por derivação off-line. São analisados cinco diferentes modelos de atrito. Resultados de simulação são confrontados com experimentos, todos realizados em malha aberta, os quais indicaram que dois dos modelos analisados mostraram-se bastante realistas, reproduzindo inclusive comportamentos do tipo *Stick-Slip* em baixas velocidades.

1 INTRODUÇÃO

Atuadores robóticos possuem atritos não lineares que dificultam o desempenho de leis de controle para robôs em geral. Especificamente no caso de manipuladores com elos flexíveis, o atrito no atuador pode inviabilizar qualquer tentativa de se atenuar as vibrações de forma ativa uma vez que os torques gerados pela lei de controle podem estar no interior da zona morta em torque do atuador, delimitada pelos valores positivo e negativo do atrito estático (ou seco, por aproximação). Outro fenômeno bastante comum nos atuadores é o comportamento do tipo adere - desliza (*Stick-Slip* em literatura inglesa). Este fenômeno está associado a atritos não lineares e acontece para baixas velocidades, podendo gerar ciclos limites em torno de uma referência numa estratégia de controle em malha fechada. Os problemas causados pelo atrito motivaram o surgimento de diversos trabalhos científicos, principalmente propondo algum novo modelo de atrito, ou utilizando algum modelo já existente numa estratégia de controle com compensação de atrito.

O presente artigo insere-se nesse contexto, tratando-se de um estudo teórico e experimental sobre diversos modelos de atrito. O artigo está dividido em cinco seções. Logo após a introdução a seção dois apresenta o atuador robótico utilizado no artigo, juntamente com o modelo matemático proposto com uma aproximação rígida de 1 *dof* (*degree of freedom*), a seção três traz a modelagem de atritos em atuadores robóticos, mostrando um estudo teórico dos cinco modelos de atrito estudados e as principais características de cada um, a seção quatro expõe os resultados das simulações das velocidades simuladas dos modelos comparando-as com a velocidade experimental do atuador, na seção cinco temos algumas discussões relevantes sobre as simulações e assim conclui-se o artigo.

2 O ATUADOR ROBÓTICO

O atuador moto-redutor *harmonic-drive* é um atuador elétrico muito utilizado em robôs manipuladores. O *harmonic-drive* é um dispositivo mecânico que possui engrenagens a fim de garantir a redução do torque-motor aplicado (Gomes et al., 2004). A principal utilidade do seu sistema de engrenagens é oferecer a possibilidade de se trabalhar em baixas velocidades com precisão, onde geralmente o atrito é avaliado como crítico. Este atuador apresenta um jogo angular praticamente nulo em razão da grande quantidade de dentes das engrenagens que se encontram em contato permanente dentro do moto-redutor (Gomes e Rosa, 2003).

O *harmonic-drive*, comparado a moto-redutores convencionais, apresenta excelentes características como alta relação de redução de velocidade, minimização de folga, alta precisão, pequeno porte, alta capacidade de torque, operação silenciosa sem vibrações e com alta eficiência (Sunada, 2007).

Porém, este tipo de atuador possui uma relevante zona morta em torque, ou seja, qualquer torque inferior ao atrito estático não passa para a estrutura a ser controlada. O atuador que serviu de base para a determinação do modelo dinâmico para o estudo apresentado neste artigo possui zona morta em torque equivalente a aproximadamente 10,8% do seu torque máximo. Na Figura (1) vê-se o encoder incremental, o motor DC e o redutor *harmonic-drive*.

2.1 Modelagem Matemática do Atuador

O modelo dinâmico do atuador é baseado no modelo proposto por (Gervini et al., 2003), e é descrito na Equação (1). A Tabela (1) mostra a constante de inércia e o torque máximo do atuador modelado.



Figura 1: Atuador robótico

Valor	Parâmetro
Inércia do Rotor (I)	0.0133 Kg.m^2
Torque Máximo	1.74 Nm

Tabela 1: Parâmetros do Atuador

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} = T_m \quad (1)$$

A Figura (2) mostra um desenho simplificado do atuador, com uma aproximação rígida de 1 *dof* (*degree of freedom*).

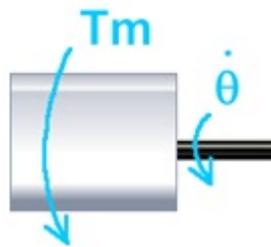


Figura 2: Desenho simplificado do atuador

Onde: I é a inércia do rotor, c é o coeficiente de atrito, conforme definido em (Gervini et al., 2003). Em forma matricial, temos o seguinte modelo:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} T_m$$

$$\dot{\vec{x}} = A(\vec{x}) \vec{x} + BT_m$$

Considerando a não-linearidade do sistema, a parcela do atrito entra como um torque de atrito T_a na Equação (2):

$$I\ddot{\theta} = T_m + T_a \quad (2)$$

3 MODELAGEM DE ATRITOS EM ATUADORES ROBÓTICOS

A modelagem do atrito é extremamente importante para a dinâmica e o controle de sistemas mecânicos. Em razão disso, para fins de análise do comportamento do atrito e compreensão de alguns efeitos que o constituem, é essencial observar as características e os resultados de simulações produzidas por este fenômeno.

O grande desafio, na verdade, de se realizar o controle de atuadores robóticos é modelar corretamente o atrito. Em um sistema robótico, o atrito é um dos grandes problemas a ser estudado e entendido, especialmente devido à sua complexidade e ao crescente aumento da procura por processos que exigem alta precisão de posicionamento e manipulação. O atrito pode aparecer em várias partes que compõem o robô, como, por exemplo, os rotores, as transmissões, os sensores, o contato das articulações. Com o objetivo principal de estudar os efeitos causados pelo atrito e buscar alternativas de compensá-lo, surgiram ao longo dos anos diversas técnicas para reproduzir um comportamento preciso do fenômeno. Sendo assim, serão apresentadas cinco diferentes abordagens sobre o atrito: Linear, Coulomb, Dahl (Dahl, 1968), LuGre (Canudas de Wit et al., 1995), além do modelo Gomes (Gomes, 1995).

Ressalta-se que existem muitos outros modelos além destes apresentados no artigo. Grande parte dos modelos de atrito surgiu após o desenvolvimento de Dahl, como, por exemplo, o de LuGre, que será visto adiante. As diferenças entre as abordagens mostram a evolução e a incorporação de efeitos complexos nas modelagens ao longo dos anos.

Dentre os fenômenos que serão observados nas modelagens estão o efeito de pré-deslizamento que em deslocamento muito pequenos, verifica-se a dependência na forma de histerese da força de atrito em relação ao deslocamento, o efeito de ruptura que é a força necessária para vencer o atrito estático e iniciar o movimento (Casanova, 2007), os modos *Stick-Slip* este fenômeno está associado a atritos não lineares e acontece para baixas velocidades, podendo gerar ciclos limites em torno de uma referência numa estratégia de controle em malha fechada e o efeito *Stribeck* para baixas velocidades, este efeito descreve-se como a redução contínua da força de atrito com o aumento de velocidade (Gomes e Rosa, 2003).

3.1 Atrito linear

A mais simples representação do atrito, onde é considerada apenas a existência do atrito viscoso. O atrito linear não apresenta em sua estrutura nem variável de estado e nem equação diferencial. A força de atrito, para este modelo, é linearmente proporcional à velocidade relativa entre duas superfícies em contato.

A Equação (3) descreve o atrito linear, levando em conta a proporcionalidade do efeito com relação à velocidade, onde F_a é a força de atrito, F_v é o coeficiente de atrito viscoso v_r é a velocidade relativa entre corpos em contato.

$$F_a = -F_v \cdot v_r \quad (3)$$

O modelo de atrito linear confere à dinâmica do sistema um desempenho não-realista. Isto se deve especialmente ao fato de que a linearidade desconsidera a existência de diversos efeitos comuns ao atrito.

3.2 Atrito de Coulumb

O primeiro modelo proposto por Charles Coulomb, em 1785, considera apenas a existência do atrito seco, desconsiderando a natureza das superfícies em contato (Armstrong, 1988). O atrito clássico de Coulomb pressupõe que existe uma força com sentido oposto ao deslocamento

relativo entre dois corpos. Ou seja, este modelo considera que a força de atrito se opõe ao sinal da velocidade do movimento.

A idéia de Coulomb considera que o atrito seco tem sua magnitude independente de fatores como velocidade e superfície de contato. Considerando f_c como sendo o coeficiente de atrito seco, F_e sendo a força externa aplicada a um determinado corpo e v_r é velocidade relativa entre dois corpos. A Equação (4) representa o primeiro modelo de Coulumb.

$$F_a = \begin{cases} -F_e & \text{se } v_r = 0 \text{ e } |F_e| \leq f_c \\ -f_c \text{sign}(v_r) & \text{se } v_r \neq 0, \end{cases} \quad (4)$$

Em um segundo momento, Charles Coulomb percebeu que a força de atrito não é apenas uma componente constante em módulo quando se inicia o movimento, mas uma componente que varia conforme a mudança da velocidade (Armstrong, 1988). Assim, considera-se a velocidade do corpo colocado em movimento, acrescentando-se uma componente de atrito viscoso f_v proporcional à velocidade relativa. A força de atrito fica definida então pela Equação (5).

$$F_a = \begin{cases} -F_e & \text{se } v_r = 0 \text{ e } |F_e| \leq f_c \\ -f_c \text{sign}(v_r) - f_v v_r & \text{se } v_r \neq 0, \end{cases} \quad (5)$$

Considerando-se uma nova componente f_s o coeficiente de atrito estático, a força de atrito passar a ser descrita no repouso. É importante considerar duas situações para o novo modelo: a intensidade da força de atrito no modelo estático é maior do que no atrito seco de Coulomb e, por se encontrar em estado de repouso, o atrito precisa ser modelado em função de uma força externa F_e . A força de atrito estático é considerada máxima quando dois corpos em contato estão na iminência de um deslizar em relação ao outro. A equação do modelo de Coulomb adicionado de uma componente de atrito estático pode ser descrita pela Equação (6).

$$F_a = \begin{cases} -F_e & \text{se } v_r = 0 \text{ e } |F_e| \leq f_s \\ -f_c \text{sign}(v_r) - f_v v_r & \text{se } v_r \neq 0, \end{cases} \quad (6)$$

Finalizando os modelos clássicos de Coulomb, acrescenta-se o efeito *Stribeck* às equações. Tal fenômeno demonstra que, para velocidades baixas, o atrito logo após o início do movimento diminui com o aumento da velocidade (Gomes e Rosa, 2003). *Stribeck* considera que a força de atrito estático não decresce de maneira descontínua, como é representado no modelo estático, mas sim em razão da velocidade. O efeito é explicado fisicamente como sendo resultante de uma ruptura da colagem, que é verificada quando a velocidade relativa entre os corpos é nula (atrito estático). O que se percebe através de *Stribeck* é a existência de uma película lubrificante que diminui o atrito no início do movimento.

A Equação (7) do modelo de *Stribeck* leva em conta a ocorrência dos atritos estático, f_s , e seco, f_c . A novidade é a existência de uma velocidade limite, denominada velocidade *Stribeck* $\dot{\theta}_{st}$. O atrito, para este modelo, volta a crescer em razão do efeito viscoso e é considerado o mais realista dentre os modelos clássicos.

$$F_a = \begin{cases} -F_e & \text{se } v_r = 0 \\ -f_v v_r - \left[f_c + (f_s - f_c) e^{-\left(\frac{v_r}{\dot{\theta}_{st}}\right)^a} \right] \text{sign}(v_r) & \text{se } v_r \neq 0, \end{cases} \quad (7)$$

3.3 Atrito de Dahl

Este modelo de atrito foi proposto em 1968 por P. R. Dahl (Dahl, 1968). A partir de experimentos, Dahl notou que a passagem do estado estático para o cinético não era instantânea e que havia um comportamento elástico antes do deslizamento entre os materiais em contato. O movimento elástico se daria antes do deslizamento (*presliding displacement*). Dahl propôs então que a força de atrito fosse dependente também da posição x_r , na forma:

$$\frac{dF_a}{dx_r} = \tau \left(1 - \frac{F_a}{F_c} \text{sign}(v_r) \right)^\alpha \quad (8)$$

Sabendo que $dx_r = v_r dt$, pode-se substituir na Equação (8) obtendo assim:

$$\frac{dF_a}{dt} = \tau v_r \left(1 - \frac{F_a}{F_c} \text{sign}(v_r) \right)^\alpha \quad (9)$$

Onde τ pode ser interpretado como uma constante elástica relacionando o atrito com o deslocamento antes do deslizamento e um parâmetro que influencia a forma da curva $F_a(x_r)$ e f_c representa o atrito seco do sistema. Definindo-se como z o deslocamento na zona de pré-deslizamento, o atrito pode ser definido como:

$$F_a = \tau z \quad (10)$$

Substituindo a Equação (10) na Equação (9) chegamos a Equação Diferencial que representa o deslocamento na zona de pré-deslizamento (z) em relação ao tempo (t):

$$\frac{dz}{dt} = v_r \left(1 - \frac{\tau z}{F_c} \text{sign}(v_r) \right)^\alpha \quad (11)$$

Quando aplicado a um atuador robótico, o modelo de Dahl adiciona uma variável de estado à dinâmica deste atuador, o que torna sua modelagem mais complexa. A obtenção do atrito exige a integração diferencial da Equação (11).

O modelo de Dahl impulsionou o surgimento de muitos outros modelos, baseados em sua idéia. Podem ser citados, por exemplo, o modelo de Bliman-Sorine, desenvolvido por (Bliman e Sorine, 1991), o modelo de Leuven, desenvolvido por (Swevers et al., 2000) e o modelo LuGre (Canudas de Wit et al., 1995).

3.4 Atrito de Lugre

O modelo LuGre, originalmente intitulado Lund-Grenoble e proposto em (Canudas de Wit et al., 1995), é um dos modelos surgidos a partir das técnicas de Dahl. A nova modelagem inclui o efeito *Stribeck* (diminuição do atrito com o aumento da velocidade no início do movimento) e o atrito viscoso, além de observar a existência do contato através de hastes elásticas e fenômeno de pré-deslizamento, já descritos anteriormente por Dahl.

O fenômeno elástico relata que, sob o ponto de vista microscópico, dois corpos rígidos fazem contato por meio de hastes elásticas. Tais hastes são opostas umas às outras e exercem no movimento forças de atrito proporcionais às suas tensões.

Com relação à inclusão do efeito *Stribeck*, uma função $g(v_r)$ representa este fenômeno, sendo v_r a velocidade relativa entre os dois corpos e δ é o parâmetro que altera a forma da passagem do atrito estático para o seco.

$$g(v_r) = f_c + (f_s - f_c) e^{(|v_r|/v_s)^\delta} \quad (12)$$

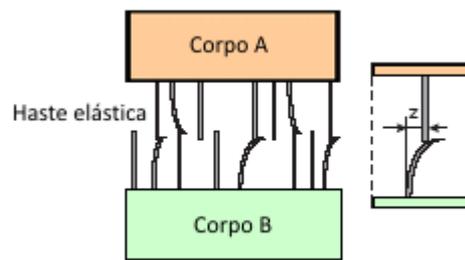


Figura 3: Comportamento elástico do modelo LuGre

O modelo considera que o atrito está relacionado também com a posição, em razão do contato entre as hastes, e não somente com a velocidade. Quando a tensão com que uma haste contribui excede um determinado valor, há uma ruptura entre a união das hastes. Sendo assim, a equação do modelo de LuGre possui uma variável z que modela a deflexão médias das hastes (Olsson et al., 1998).

Considerando a inclusão da variável z , e da variável τ_0 que é uma constante elástica que relaciona o atrito com o deslocamento antes do deslizamento e aparecera anteriormente na Equação (8) de Dahl, e da função *Stribeck*, a equação de deflexão para o modelo LuGre fica assim representada:

$$\frac{dz}{dt} = v_r - (\tau_0|v_r|)/(g(v_r))z \quad (13)$$

Por fim, são acrescentados dois parâmetros: τ_1 e τ_2 na equação do modelo. τ_1 corresponde a um termo de amortecimento no movimento de pré-deslizamento. Já τ_2 representa um termo de atrito viscoso. Considerando a inclusão dos novos parâmetros, o atrito LuGre fica definido na seguinte forma:

$$F_a = \tau_0 z + \tau_1 dz/dt + \tau_2 v_r \quad (14)$$

O modelo LuGre teve uma significativa contribuição na modelagem de atrito em atuadores robóticos, sendo referência para diversas dissertações e base para muitos outros novos modelos. No entanto, o modelo dinâmico do atuador é ampliado em uma equação diferencial a mais e apresenta dificuldade de identificação de seus parâmetros físicos τ_0 , τ_1 e δ (Gomes et al., 2004).

3.5 Atrito de Gomes

O modelo Gomes, originalmente proposto em (Gomes, 1995) se diferencia dos modelos clássicos em razão de sua representação do atrito. Pelo menos neste último modelo, o atrito não é representado nas equações diferenciais como um torque externo, mas como parte integrante da dinâmica própria do sistema.

Uma das principais contribuições do modelo Gomes é a representação do fenômeno *Stick-Slip* (Gomes e Rosa, 2003), um comportamento não-linear comum em atuadores robóticos operando em baixas velocidades. *Stick-Slip* significa um efeito "prende-desliza", na qual a velocidade rotor vai a zero quando o torque resultante da articulação é inferior ao atrito estático, permanecendo assim até o momento em que o torque sai da zona morta e faz com que a velocidade atinja um certo limite, a partir do qual ocorrerá o deslizamento.

O estudo do modelo Gomes começa com a obtenção da curva característica estática do atrito. Diversos torques foram aplicados ao rotor do atuador com o objetivo de medir a velocidade após o regime estacionário. Na análise, o torque de atrito é igual ao torque motor aplicado para cada

velocidade estacionária, já que não existem outros torques externos além do motor. A Figura (4) mostra o gráfico que representa o torque motor em função dos pontos de velocidade nos dois sentidos de rotação.

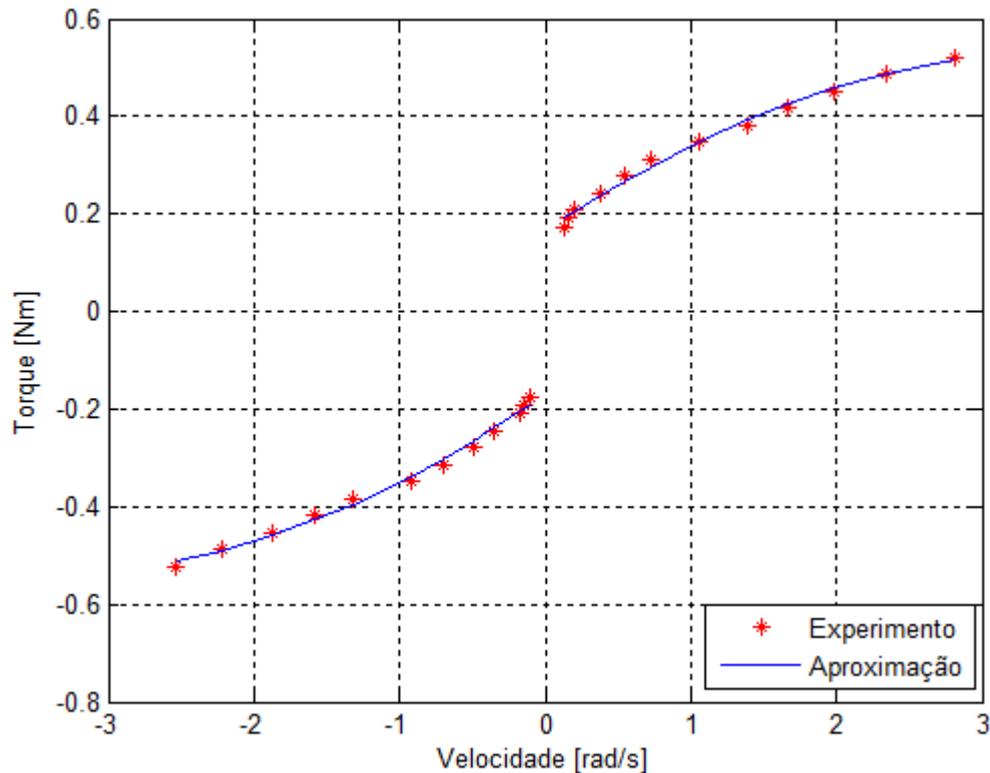


Figura 4: Curva Estática do Torque Motor em função da Velocidade

Essa é outra característica do modelo Gomes: representar o atrito em dois sentidos diferentes de rotação do atuador, horário ou positivo e anti-horário ou negativo (Gomes et al., 2006). Para interpolar os pontos em cada um dos sentidos, foram utilizados dois polinômios considerando que o índice i pode ser para velocidade positiva (p) ou negativa (n). A equação do torque de atrito, para cada sentido de rotação, fica assim definida:

$$T_{at} = f_i + f_{vi}\dot{\theta} + c_i(\dot{\theta}^2) \quad (15)$$

Onde f_i é o coeficiente de atrito seco (velocidade positiva ou negativa), f_{vi} é o coeficiente de atrito viscoso (velocidade positiva ou negativa), c_i é o coeficiente de atrito (velocidade positiva ou negativa). Os parâmetros identificados definidos para o modelo Gomes podem ser visualizados na Tabela (2).

A equação do torque de atrito, sob a forma de atrito viscoso variável, é escrita da seguinte forma, considerando f_v^* como o coeficiente de atrito viscoso variável e $\dot{\theta}$ como a velocidade rotor.

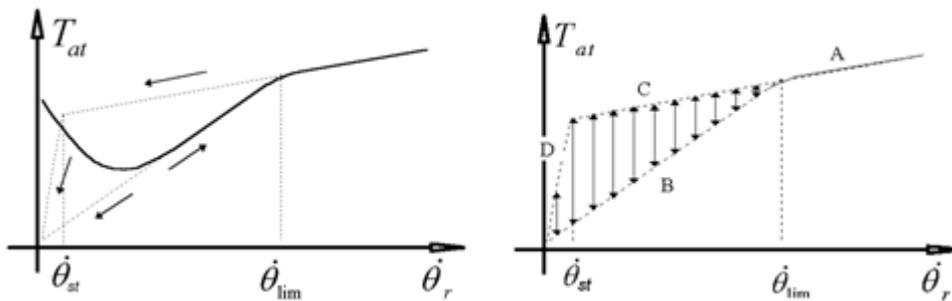
$$T_{at} = f_v^*\dot{\theta} \quad (16)$$

Para formular o algoritmo que determina o coeficiente de atrito viscoso variável, segundo (Gomes et al., 2006) existe uma velocidade limite $\dot{\theta}_{lim}$ a partir da qual o fenômeno *Stick-Slip* deixa de ocorrer no momento em que se atinge esta velocidade. *Stick* representa o "movimento

c_p (coeficiente de atrito positivo)	-0.0268
c_n (coeficiente de atrito negativo)	0.0292
f_{cp} (atrito seco positivo)	0.1661
f_{cn} (atrito seco negativo)	-0.1693
f_{vp} (atrito viscoso positivo)	0.1999
f_{vn} (atrito viscoso negativo)	0.2093

Tabela 2: Parâmetros identificados a partir da curva estática para o modelo Gomes

preso” e ocorre quando o torque resultante é menor do que o atrito seco e quando a velocidade rotor $\dot{\theta}$ é menor do que a velocidade limite $\dot{\theta}_{lim}$. A Figura (5) representa os efeitos *stick* e *slip*. Nas trajetórias C e D da figura ocorre o efeito *stick*, onde a velocidade vai a zero e só sai do repouso a partir do momento em que o torque passa a ser maior do que o atrito seco por aproximação, ou estático. Neste instante, o efeito *Stribeck* faz com que a trajetória *slip*, ou seja, de deslize, representada na figura pela trajetória B, seja menos amortecida do que a trajetória *stick*. É importante observar que existem transições verticais da trajetória B para C ou D quando um modo *slip* se transforma em *stick* e transições de C ou D para B quando a transformação é contrária. Tais transições verticais podem acontecer até o momento em que se configura uma velocidade absolutamente nula.

Figura 5: Trajetórias de atrito representando o efeito *Stick-Slip*

O algoritmo proposto em (Gomes et al., 2006) objetivando a obtenção do coeficiente de atrito viscoso para representar o fenômeno *Stick-Slip* em uma região de baixas velocidades é o seguinte:

if $|\dot{\theta}| \geq \dot{\theta}_{lim}$ *then*

$$f_v^* = \frac{f_i + c_i \dot{\theta}^2}{\dot{\theta}} + f_{vi} \quad (\text{Fora da região Stick-Slip(A)})$$

else

if $|T_{res}| > f_s^*$ *then*

$$f_v^* = \frac{f_i + c_i \dot{\theta}_{lim}^2}{\dot{\theta}_{lim}} + f_{vi} \quad (\text{Trajectoria slip(B)})$$

else

$$f_v^* = \frac{f_i + c_i \dot{\theta}^2}{\dot{\theta}} + f_{vi} \quad (\text{Trajetória stick}(C))$$

if $f_v^* > f_{lim}$ then

$$f_v^* = f_{lim} \quad (\text{Trajetória stick final}(D))$$

end

end

end

No algoritmo existe uma componente f_{lim} que é o maior valor que pode assumir o coeficiente de atrito viscoso variável para que os modos Stick-Slip existam, o que acontece na trajetória D da Figura (5), ou seja, na trajetória stick final antes da velocidade zero. A componente pode ser calculada pela Equação (17), onde $\dot{\theta}_{st}$ é a menor velocidade fisicamente possível, sendo que abaixo deste valor existem apenas deslocamentos micro-elásticos entre os materiais em contato, o que configura a fase de pré-deslizamento (Casanova, 2007). Na Equação (17), $\dot{\theta}_{st}$ é representada por 2.5% da menor velocidade estacionária possível em malha aberta. Isto é possível de ser calculado multiplicando-se a velocidade limite por uma variável γ que representa a porcentagem ($\gamma = 0.025$). Assim, $\dot{\theta}_{st}$ é calculado como sendo $\dot{\theta}_{st} = \gamma \theta_{lim}$.

$$f_{lim} = \left| \frac{f_i + c_i \dot{\theta}_{st}^2}{\dot{\theta}_{st}} + f_{vi} \right| \quad (17)$$

Outra componente existente no algoritmo é T_{res} , que representa o torque resultante da articulação do atuador. O torque pode ser avaliado a partir da Equação (18), e o componente T_l representa o torque da carga acoplada à saída do redutor. T_l , na verdade, pode conter diferentes valores dependendo do modelo dinâmico do atuador utilizado. Caso não exista contato da carga com obstáculos ou outros torques de carga, T_l é nulo. Neste caso, a equação seria simplificada em $T_{res} = T_m$.

$$T_{res} = T_m + T_l \quad (18)$$

Conforme a equação do atuador com aproximação rígida, apresentado na Equação (1), a dinâmica pode ser posta em forma matricial (Gomes e Rosa, 2003) e o modelo de Gomes pode ser representado pela Equação (19).

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f_v^*(\dot{x}, T_{res})}{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} T_m \quad (19)$$

4 SIMULAÇÕES EM MALHA ABERTA

Nesta seção são apresentadas as simulações para cada um dos tipos de modelo de atrito estudados. As simulações foram realizadas com software interativo de alto desempenho MATLAB. Os gráficos de simulações de cada modelo são comparados através de testes experimentais que visam à validação dos modelos propostos e a comparação de precisão de cada modelo de atrito. Os resultados aqui apresentados foram realizados em malha aberta. É importante observar que todas as simulações foram feitas sob as mesmas condições do experimento. Um sinal senoidal

PWM (*Pulse-Width-Modulation*) é aplicado ao motor com uma frequência de 0.5Hertz e largura de pulso de 20. O sinal *PWM* é então convertido em um sinal de corrente, produzindo um torque no motor do atuador. O motor utilizado para a geração de torque aplica um torque máximo de 1.74Nm. Foi aplicado para todos os modelos de atrito este mesmo torque motor experimental. A Tabela (3) apresenta as constantes utilizadas em todos os modelos estudados.

I_r	0.01334 Kgm^2
I_s	0.0173 Kgm^2
n	100
I	$I_r + (I_s/n^2)$

Tabela 3: Constantes gerais para as simulações dos modelos de atrito

4.1 Simulação do Atrito Linear

A Figura (6) mostra o resultado da simulação do primeiro atrito estudado, o atrito linear. O modelo linear é o mais simples e leva em conta apenas a existência do atrito viscoso, conferindo um resultado não condizente com a realidade.

Pode-se verificar no gráfico que o comportamento da trajetória de velocidade do atrito linear (linha azul) não se assemelha com a trajetória da velocidade experimental (linha vermelha). A trajetória linear no gráfico apresenta um módulo maior de velocidade se comparada à trajetória experimental. Ressalta-se que a velocidade experimental permanece nula durante um certo período na inversão do sentido de rotação, configurando assim um modo stick. A simulação com o atrito linear não reproduz esse efeito, conforme já era esperado. O comportamento irreal do modelo linear pode ser explicado devido ao fato dele desconsiderar a existência de diversos efeitos comuns ao atrito, como, por exemplo, a zona morta em torque.

A Tabela (4) apresenta a constante de coeficiente de atrito viscoso utilizada no trabalho para a simulação do modelo linear.

f_v (atrito viscoso)	0.2046
------------------------	--------

Tabela 4: Constantes utilizadas para a simulação do modelo de atrito Linear

4.2 Simulação do Atrito de Coulumb

Nessa simulação mostra-se o modelo de Coulomb que considera o acréscimo do efeito *Stribeck*, que foi desenvolvido a partir da Equação (7). O modelo apresenta um bom desempenho, próximo da realidade, especialmente se comparado às representações anteriores.

No gráfico, novamente a trajetória da velocidade simulada (linha azul) fica próxima da velocidade experimental (linha vermelha). Para grandes velocidades, no entanto, o desempenho deste modelo de atrito fica longe da realidade. Além disso, o modelo não considera o efeito *Stick-Slip*, muito comum em atuadores robóticos, como o *harmonic-drive*. A Tabela (5) apresenta as constantes utilizadas no trabalho para a simulação do modelo de atrito seco, viscoso, estático mais *Stribeck* de Coulomb. A Figura (8) mostra o efeito *Stribeck* no atrito de Coulomb.

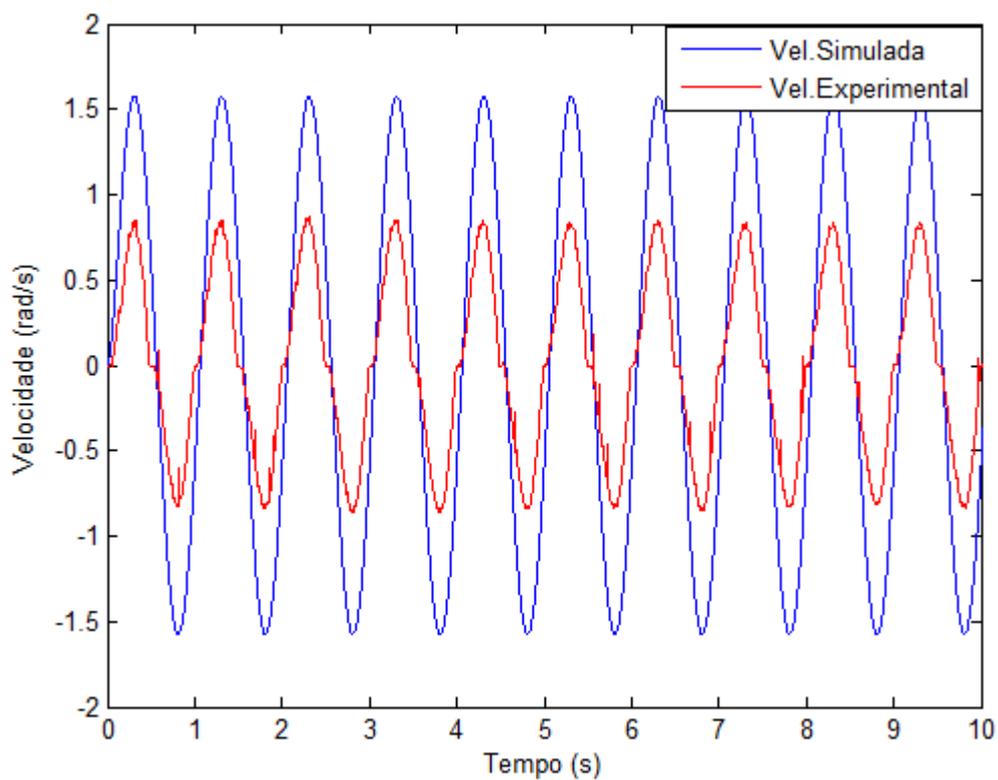


Figura 6: Gráfico da Velocidade Experimental comparada com a Velocidade obtida com o modelo Linear

Taxa de Atrito	0.93
γ (porcentagem)	0.0275
α (curva)	-5
θ_{lim} (velocidade limite)	0.17
f_c (atrito seco)	0.1667
f_s (atrito estático)	0.1560
f_v (atrito viscoso)	0.2046
θ_{st} (velocidade de Stribeck)	$\gamma \theta_{lim}$

Tabela 5: Constantes utilizadas para a simulação do modelo de Coulomb.

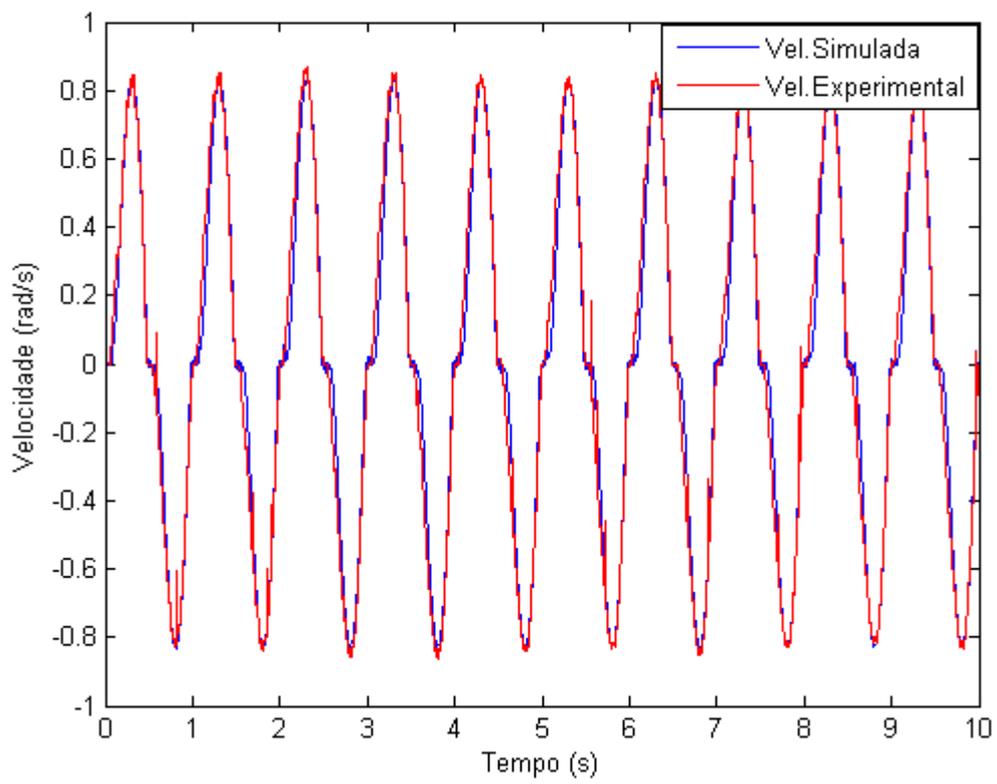


Figura 7: Atrito Coulomb

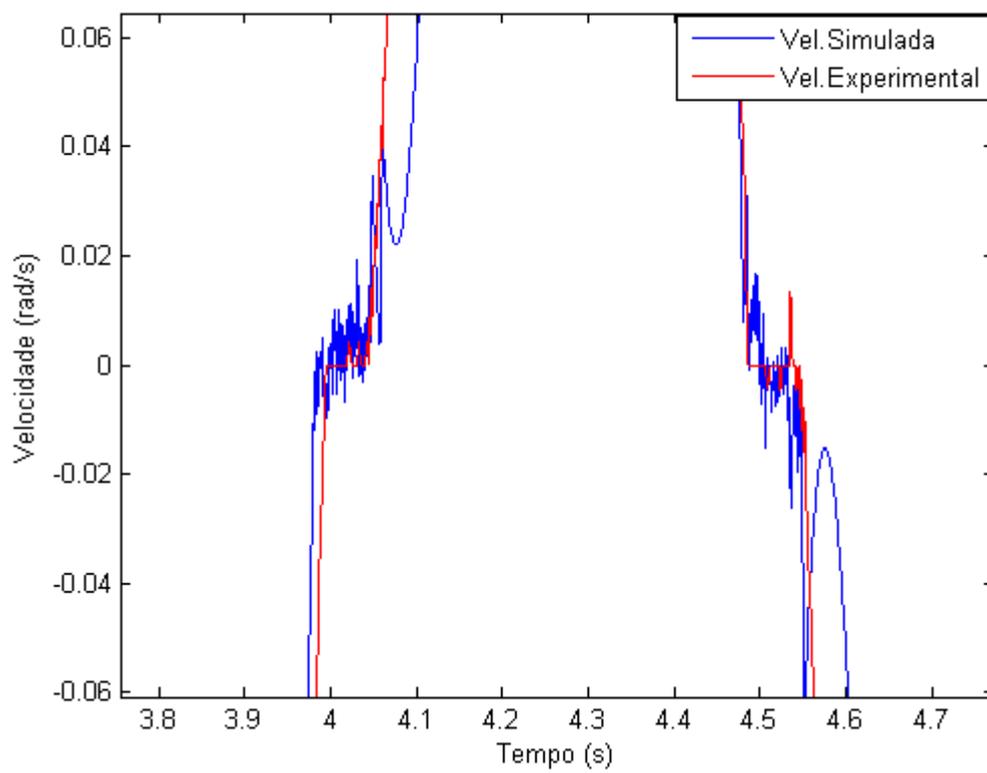


Figura 8: Aproximação para mostrar o efeito *Stribeck* no modelo de Coulomb

4.3 Simulação do Atrito de Dahl

A Figura (9) representa o próximo modelo estudado: o atrito de Dahl. Graficamente o modelo de Dahl apresenta um desempenho longe da realidade em comparação aos últimos modelos simulados. No gráfico, a linha que representa a velocidade simulada com o modelo apresenta uma trajetória maior se comparado ao módulo da velocidade experimental. Isso se deve ao fato do modelo de Dahl não considerar também o efeito *Stick-Slip*, além de desconsiderar o efeito *Stribeck*, o que significa uma perda de desempenho em baixas velocidades. A Tabela (6) apresenta as constantes utilizadas no trabalho para a simulação do modelo de atrito de Dahl.

Taxa de Atrito	0.93
τ (coeficiente de rigidez)	500
α (curva)	1
$\dot{\theta}_{lim}$ (velocidade limite)	0.17
f_c (atrito seco)	0.1667

Tabela 6: Constantes utilizadas para a simulação do modelo de atrito de Dahl

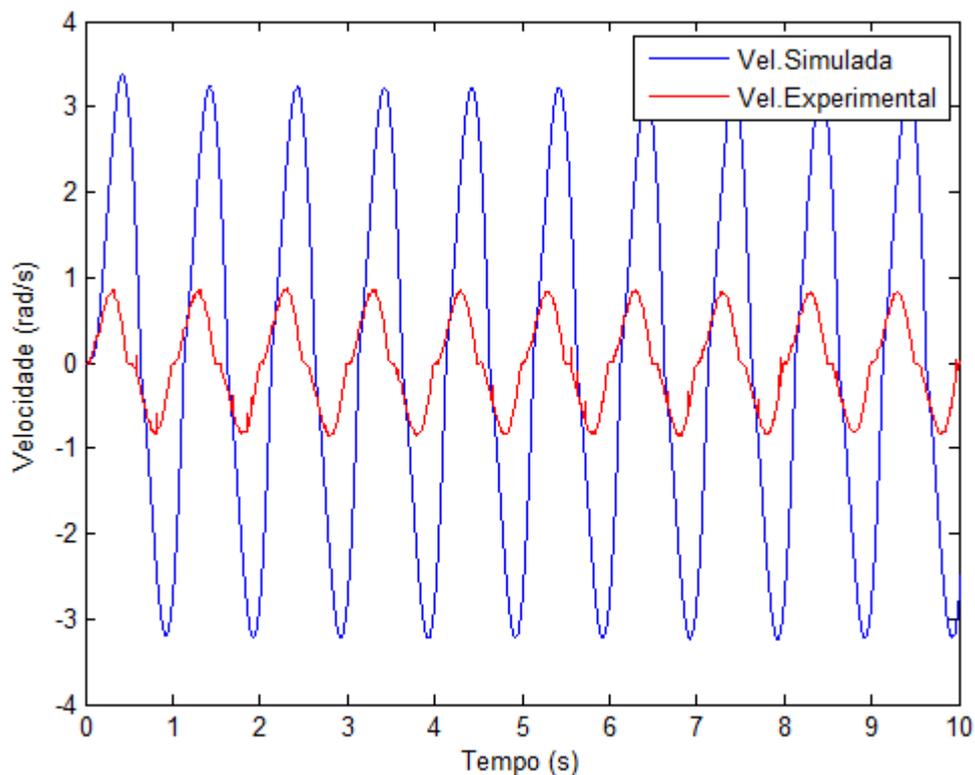


Figura 9: Gráfico da Velocidade Experimental comparada com a Velocidade obtida com o modelo de Dahl

4.4 Simulação do Atrito de Lugre

A Figura (10) apresenta um resultado com o modelo LuGre, o qual possibilitou uma significativa contribuição na modelagem do atrito em atuadores. O modelo considera a inclusão do efeito *Stribeck*, além de observar a existência do fenômeno de pré-deslizamento e contato através de hastes elásticas.

Sob o ponto de vista de desempenho, o modelo LuGre, por considerar uma série de efeitos do atrito, apresenta um resultado muito próximo da realidade. No gráfico apresentado, a trajetória da velocidade simulada com o modelo (linha azul) é bastante aproximada da trajetória experimental (linha vermelha). Em razão disso, é um modelo citado e utilizado em diversas teses e experimentos. No entanto, o modelo, assim como os anteriores, desconsidera a aplicação do torque motor nos dois sentidos de rotação. O desempenho, portanto, é satisfatório no sentido positivo, mas no negativo há diferenças significativas nas trajetórias.

A Tabela (7) apresenta as constantes utilizadas no trabalho para a simulação do modelo LuGre.

Taxa de Atrito	0.93
γ (porcentagem)	0.025
α (curva)	-5
τ_0 (coeficiente de rigidez)	1500
τ_1 (termo de amortecimento)	0.01
$\dot{\theta}_{lim}$ (velocidade limite)	0.17
f_{cp} (atrito seco positivo)	0.1661
f_{cn} (atrito seco negativo)	-0.1693
f_c (atrito seco)	$(f_{cp} - f_{cn}) / 2$
f_s (atrito estático)	0.1560
f_v (atrito viscoso)	0.2046
$\dot{\theta}_{st}$ (velocidade de Stribeck)	$\gamma \dot{\theta}_{lim}$

Tabela 7: Constantes utilizadas para a simulação do modelo de atrito de Lugre

A Figura (11) traz uma aproximação para mostrar uma das características do atrito o efeito *Stick-Slip*

4.5 Simulação do Atrito de Gomes

A Figura (12) apresenta o modelo de atrito intitulado como Gomes. Uma das principais contribuições deste modelo é a ótima representação do fenômeno *Stick-Slip*, comum em atuadores operando em baixas velocidades. Além disso, considera o atrito em dois sentidos diferentes de rotação, horário (positivo) e anti-horário (negativo).

Estas características conferem ao modelo Gomes o melhor desempenho em malha aberta entre todos os modelos estudados no trabalho. A trajetória de velocidade simulada (linha azul) é visualmente muito próxima da trajetória experimental (linha vermelha) em ambos os sentidos de rotação. Sendo assim, o atrito de Gomes pode ser considerado o modelo mais fiel à realidade.

A Tabela (8) apresenta as constantes utilizadas no trabalho para a simulação do modelo de atrito Gomes.

A Figura (13) mostra uma aproximação da simulação anterior, nela pode-se verificar que o efeito *Stick-Slip*, é melhor representado do que nos modelos anteriormente vistos.

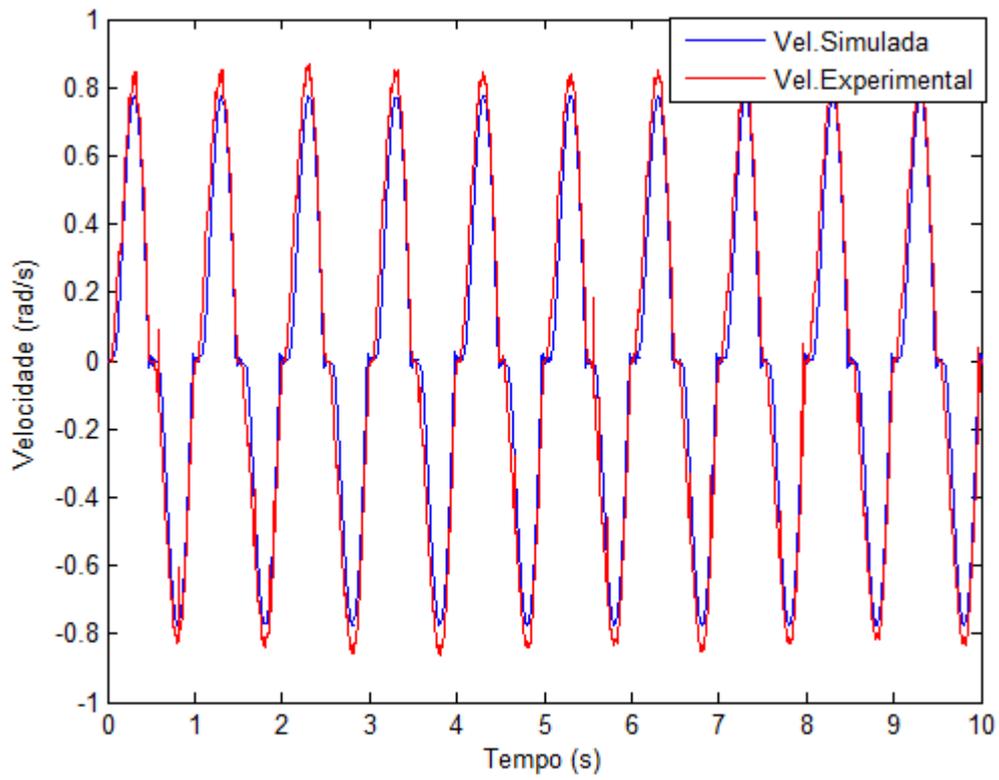


Figura 10: Gráfico da Velocidade Experimental comparada com a Velocidade obtida com o modelo de LuGre

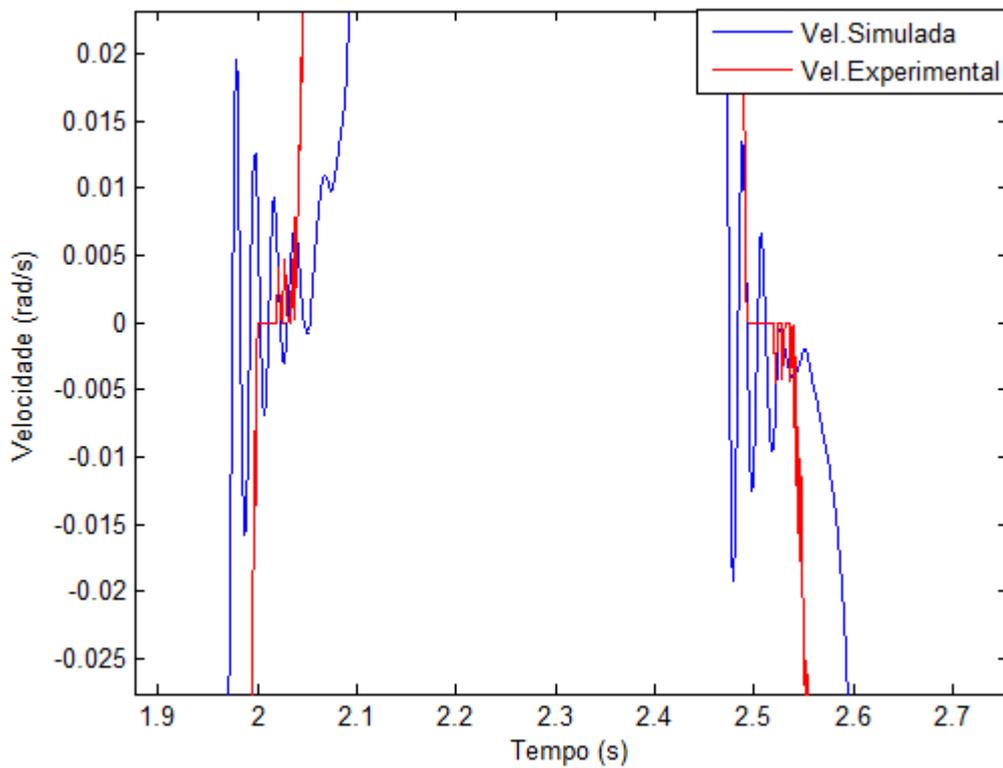


Figura 11: Aproximação para mostrar o efeito *Stick-Slip* no modelo de LuGre

Taxa de Atrito	0.93
γ (porcentagem)	0.0275
c_p (coeficiente de atrito positivo)	-0.0268
c_n (coeficiente de atrito negativo)	0.0292
f_{cp} (atrito seco positivo)	0.1661
f_{cn} (atrito seco negativo)	-0.1693
f_{vp} (atrito viscoso positivo)	0.1999
f_{vn} (atrito viscoso negativo)	0.2093
θ_{lim} (velocidade limite)	0.17
$\dot{\theta}_{st}$ (velocidade de Stribeck)	$\gamma \dot{\theta}_{lim}$

Tabela 8: Constantes utilizadas para a simulação do modelo de atrito de Gomes

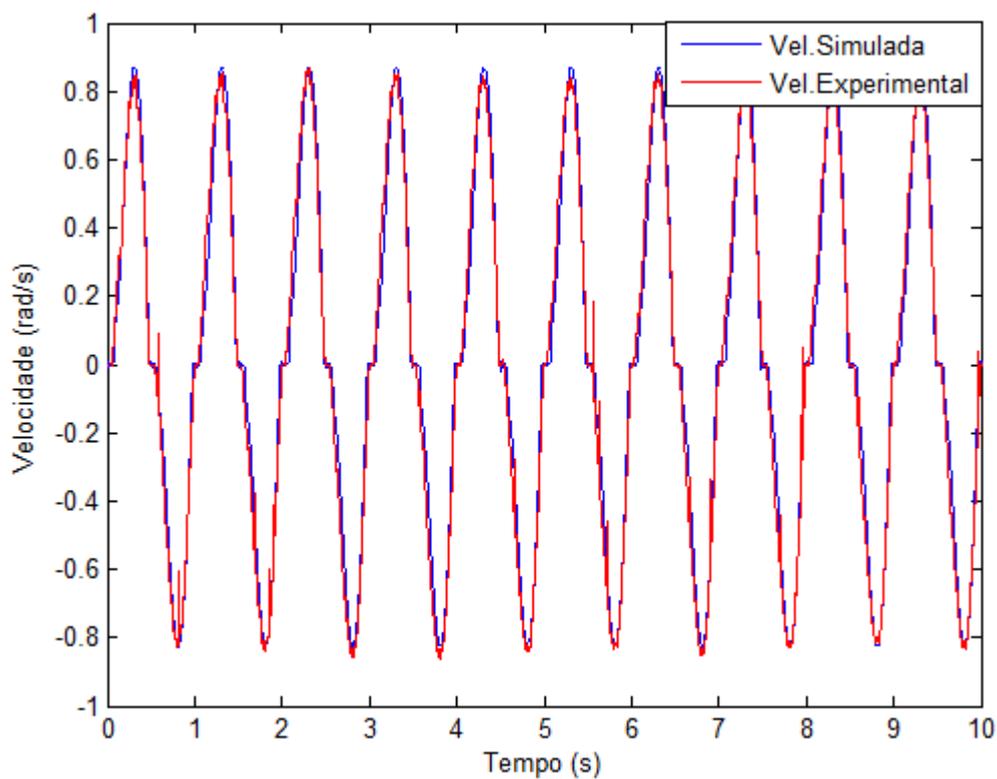


Figura 12: Gráfico da Velocidade Experimental comparada com a Velocidade obtida com o modelo de Gomes

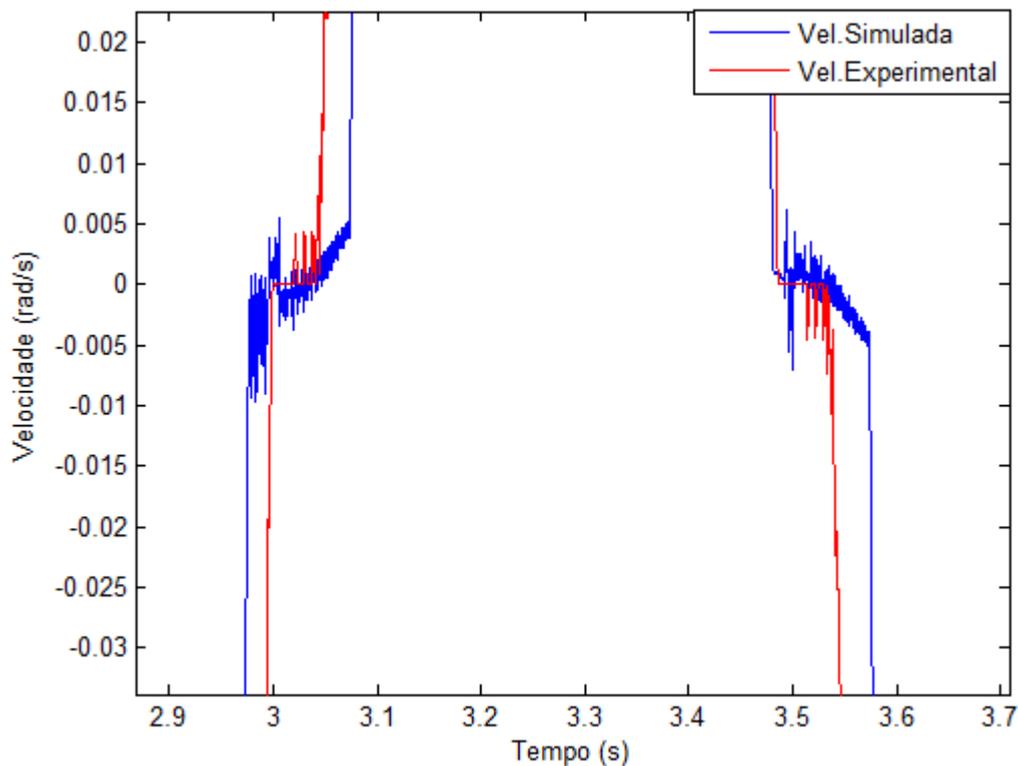


Figura 13: Aproximação para mostrar o efeito *Stick-Slip* no modelo de Gomes

5 CONCLUSÃO

Pode-se concluir que existem dois modelos de atrito que apresentaram a melhor robustez nas simulações realizadas comparado-as com os resultados experimentais. O modelo de LuGre apresenta uma boa representação do efeito *Stick-Slip* e outras características do atrito, mas desconsidera a aplicação do torque motor nos dois sentidos de rotação. O desempenho, portanto, é satisfatório no sentido positivo, mas no negativo há diferenças significativas nas trajetórias. O outro modelo é o modelo Gomes que é muito simples de ser implementado e não utiliza o acréscimo de equações diferenciais em seu modelo, tal fato que ocorre no atrito de LuGre, o modelo Gomes têm uma ótima representação do fenômeno *Stick-Slip*, comum em atuadores operando em baixas velocidades, além de considera o atrito em dois sentidos diferentes de rotação, horário (positivo) e anti-horário (negativo). Sendo assim, o atrito de Gomes pode ser considerado o modelo eficiente e mais fiel à realidade.

REFERÊNCIAS

- Armstrong B.S.R. *Dynamics for robot control: friction modeling and ensuring excitation during parameter identification*. Tesis de Doutorado, Stanford University, 1988.
- Bliman P. e Sorine M. Friction modelling by hysteresis operators: applications to dahl, stiction and stribeck effects. *Proceedings of Conference on Models of Hysteresis*, 1991.
- Canudas de Wit C., H. O., e Astrom K. and Lischinsky P. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995.
- Casanova C.C. *Modelagem e compensação de atrito em robôs manipuladores com flexibilidades nas juntas: identificação, análise e resultados experimentais*. Tesis de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2007.
- Dahl P.R. A solid friction model. *The Aerospace Corporation*, 1968.
- Gervini V.I., Gomes S.C.P., e Rosa V.S. A new robotic drive joint friction compensation mechanism using neural networks. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering*, 2003.
- Gomes S.C.P. Modelagem de atritos internos às articulações de robôs manipuladores. *XIII COBEM*, 1995.
- Gomes S.C.P. e Rosa V.S. A new approach to compensate friction in robotic actuators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2003.
- Gomes S.C.P., Rosa V.S., e Albertini B.C. Active control to flexible manipulators. *IEEE/ASME Trans. On Mechatronics*, 2006.
- Gomes S.C.P., Rosa V.S., Albertini B.C., Gomes D.S., e Diniz C.M. Validação experimental de modelos dinâmicos de atuadores e estruturas flexíveis. in: *Xv congresso brasileiro de automática. XV Congresso Brasileiro de Automática*, 2004.
- Olsson H., Aström K., e Canudas de Wit C. Friction models and friction compensation. *European Journal Control*, 1998.
- Sunada M.M. *Acionamento de um posicionador linear de ultra-preciso empregando uma re-
duso Harmonic-Drive com controle de velocidade*. Tesis de Mestrado, Mestrado em Engenharia Mecânica, 2007.
- Swevers J., Al-Bender F., Ganseman C.G., e Prajogo T. An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation. *IEEE Transactions Automatic Control*, 2000.