

FORMULACIÓN MULTI-ESCALA PARA MATERIALES CUASI-FRÁGILES HETEROGÉNEOS CONSIDERANDO GENERACIÓN Y PROPAGACIÓN DE FISURAS EN LA CELDA UNITARIA. FUNDAMENTOS CINEMÁTICOS-VARIACIONALES.

Sebastian Toro^{a,b}, Pablo J. Sánchez^{a,b}, Alfredo E. Huespe^a,
Sebastián M. Giusti^c, Pablo J. Blanco^d y Raúl Feijóo^d

^aCIMEC-INTEC-UNL-CONICET, Güemes 3450, 3000, Santa Fe, Argentina, <http://www.cimec.org.ar>.

^bGIMNI-UTN-FRSF, Lavaise 610, 3000, Santa Fe, Argentina.

^cUTN-FRC/CONICET - M. M. Lopez esq. Cruz Roja Argentina, Ciudad Univ. - Córdoba - Argentina.

^dLNCC, Avda. Gertulio Vargas 333, Quitandinha, Petrópolis, RJ, Cep 25651-075, Brasil.

Palabras Clave: modelos multi-escala, celda unitaria, condiciones de borde, técnicas de homogeneización de deformación, modelos de fisura cohesiva embebida, discontinuidades fuertes.

Resumen. En este trabajo se presentan avances preliminares pertenecientes a una línea de investigación en curso, orientada al desarrollo de modelos multi-escalas para materiales cuasi-frágiles heterogéneos. El modelo propuesto sigue un formalismo variacionalmente consistente y considera la existencia de dos escalas, acopladas entre sí, a saber: (i) una escala macroscópica clásica y (ii) una escala meso-mecánica heterogénea. La respuesta constitutiva de la escala macro se obtiene tras una homogeneización consistente de la respuesta meso-mecánica. La escala meso-mecánica está constituida por una *Celda Unitaria* heterogénea. A nivel de la celda unitaria es viable el desarrollo de mecanismos inelásticos de degradación/daño y, como consecuencia de éstos, la generación/propagación de fisuras. Tales fisuras se incluyen en el modelo meso-mecánico mediante la incorporación explícita de discontinuidades en el campo de desplazamientos (*discontinuidades fuertes*) y un modelo de tipo cohesivo (tracción vs. salto), que gobierna su evolución. Este reporte está especialmente orientado al estudio de los aspectos cinemáticos-variacionales en los cuales se fundamenta el modelo. A partir de este análisis surgen las condiciones de borde consistentes a aplicar sobre la frontera de la celda unitaria considerando la nueva cinemática enriquecida, tales que: (i) sea factible la nucleación/propagación de fisuras en la celda unitaria, como así también (ii) se verifiquen las restricciones necesarias para preservar el concepto de homogeneización de deformación. En el cuerpo del trabajo se presenta una forma general para formular y gestionar tales condiciones de contorno. Los modelos clásicos de *Taylor*, *Lineal*, *Periódico* o modelo con *Restricción cinemática mínima* (tracción uniforme), quedan incluidas en la formulación propuesta. Se ha implementado un modelo 2D de elementos finitos con discontinuidades fuertes embebidas compatible con la teoría multi-escala subyacente. Como aplicación se muestra la resolución de un problema simple de celda unitaria heterogénea 1D con generación de fisuras, sobre el cual hemos obtenido soluciones analíticas. Este ejemplo ha permitido validar los resultados numéricos del modelo 2D e interpretar conceptos elementales de la metodología propuesta.

1. INTRODUCCIÓN

La modelización de materiales compuestos heterogéneos reviste un grado de complejidad elevado debido a que el comportamiento constitutivo de éstos está fuertemente influenciado por efectos micro-estructurales, tales como: (i) la respuesta mecánica discímil de cada una de las fases constituyentes, (ii) la forma y distribución espacial que presentan las heterogeneidades, (iii) la posible variabilidad en sus fracciones volumétricas o proporciones relativas, (iv) la interacción entre las fases junto con los procesos inelásticos que se desarrollan en la interfaz de contacto (decohesión, deslizamiento, etc); entre otros importantes mecanismos. El planteo de formulaciones basadas en *múltiples* escalas, capaces de predecir la respuesta *fenomenológica* de un material heterogéneo en función de la información derivada de un estudio a nivel *micro-mecánico*, resulta una elección natural para abordar el problema. Mucho esfuerzo se ha dedicado en las últimas décadas para elaborar estas ideas, proponiéndose así mismo una diversidad de técnicas *multi-escala* (ya clásicas en la actualidad) fundamentada, cada una de éstas, en principios teóricos diferentes, como por ejemplo: las aproximaciones formuladas bajo el concepto de *medio efectivo* (Eshelby, 1957; Hashin, 1962; Mori y Tanaka, 1973), los modelos *auto-consistentes* (Hill, 1965; Christensen y Lou, 1979), los *métodos variacionales límites* (Hashin y Shtrikman, 1963; Willis, 1981; Hashin, 1983), los esquemas de homogeneización basados en la *teoría matemática de expansiones asintóticas* (Bensoussan et al., 1978; Sanchez-Palencia, 1980; Fish et al., 1999).

Si bien las estrategias mencionadas poseen sólidos fundamentos conceptuales (muchas de ellas incluso basadas en soluciones analíticas o semi-analíticas), por lo general están restringidas a micro-estructuras heterogéneas de topología simple y/o condiciones de borde específicas. Con el objeto de sortear esta limitación, y fundamentado en el avance de la capacidad de procesamiento de los ordenadores, las técnicas basadas en el concepto de *Celda Unitaria* han tomado impulso en los últimos años (Michel et al., 1999; Miehe et al., 2002; Miehe y Koch, 2002). En este tipo de metodologías se asume que la respuesta mecánica de una cierta escala (por ejemplo la escala *macroscópica*) viene dada en forma indirecta a través de un análisis detallado y posterior proceso de homogeneización, o media volumétrica, de la respuesta constitutiva de una *Celda Unitaria* representativa de una sub-escala cuya longitud característica es mucho menor que la primera (típicamente la *escala meso* o *micro-mecánica*), y que en esta última es posible modelar las heterogeneidades observables a nivel de la micro-estructura material. Ambas escalas se encuentran acopladas y pueden resolverse vía métodos numéricos, por tal motivo, es común reconocer en la literatura algunas de estas técnicas bajo el nombre de *homogeneización computacional multi-escala*. La versatilidad y generalidad alcanzada por tales aproximaciones ha despertado amplio interés en la comunidad científica, como queda en evidencia a partir del creciente número de publicaciones y la gran cantidad de sesiones específicas que se dan cita en reuniones científicas de todo el mundo. Desde hace un tiempo a esta parte, estos métodos han extendido su campo de aplicación para abordar el problema del modelado constitutivo de localización y falla de materiales heterogéneos (Loehnert y Belytschko, 2007; Belytschko et al., 2008; Song y Belytschko, 2009; Verhoosel et al., 2010), representando una línea de intensa investigación y constante desarrollo en la actualidad. A la complejidad intrínseca asociada a los materiales heterogéneos se suma ahora la problemática de modelar localización y falla. En este contexto de análisis, es indudable que las condiciones de borde aplicadas sobre la frontera de la *Celda Unitaria* tendrán una influencia directa en “inducir” o “coartar” ciertos modos de localización y falla material. Nuestra línea de investigación se enmarca en el estudio de esta temática específica.

De esta forma, en este trabajo se aborda el análisis de formulaciones *multi-escalas* (macro-meso) basadas en la existencia de una *Celda Unitaria* para materiales compuestos heterogéneos *cuasi-frágiles* considerando además criterios de degradación y falla por nucleación y/o propagación de fisuras. Ejemplos típicos de estos materiales son el *hormigón* y el *hormigón armado*, de uso masivo en la construcción civil, aunque existen muchos otros con importantes aplicaciones tecnológicas. No obstante, en la contribución presente dedicaremos el mayor esfuerzo a estudiar e interpretar cuestiones más fundamentales de la formulación del modelo, más que aplicaciones concretas referidas a un material específico. Existen ciertas consideraciones teóricas que merecen ser discutidas y estudiadas en profundidad sobre todo cuando se pretende incorporar la fisuración en los modelos multi-escalas. El desarrollo de este reporte está orientado a proponer y analizar un modelo *multi-escala* específico dotado de una cinemática enriquecida, *discontinua* en desplazamientos, a nivel de la celda unitaria, para simular la presencia de fisuras. Se discuten en detalle las implicancias teóricas que surgen al considerar tal enriquecimiento cinemático sobre la formulación variacionalmente consistente del modelo, las condiciones de borde compatibles, como así también algunos aspectos de implementación computacional.

2. CINEMÁTICA CON DISCONTINUIDADES EN DESPLAZAMIENTOS

La nucleación de una fisura (en adelante representada mediante una superficie de discontinuidad S) en un medio inicialmente continuo induce una cinemática particular. Una vez desarrollada la misma, al menos una componente del campo de desplazamiento \mathbf{u} presenta una componente discontinua a través de S . Como consecuencia directa, ciertas componentes del campo de deformaciones presentan términos no acotados o distribucionales. En esta sección, se introduce la nomenclatura básica y el formalismo matemático para describir tal cinemática singular, limitado al contexto de geometría lineal.

Considérese el problema mecánico quasi-estático de un sólido (\mathcal{B}), en la configuración de referencia (Ω), que exhibe una discontinuidad en el campo de desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ (discontinuidad fuerte) a través de la superficie de discontinuidad material S con versor normal \mathbf{n} y vector tangente unitario $\boldsymbol{\tau}$, ver Figura 1-(a).

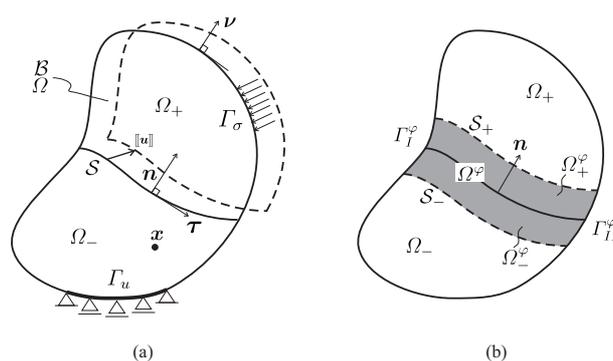


Figura 1: Problema mecánico exhibiendo cinemática con discontinuidades fuertes a través de la superficie S .

La superficie de discontinuidad S divide a Ω en dos sub-dominios Ω_+ y Ω_- , cada uno de éstos definido de acuerdo a la dirección de \mathbf{n} ($+\mathbf{n}$ apunta hacia Ω_+ , $-\mathbf{n}$ apunta hacia Ω_-). Como es usual, Γ representa la frontera (suave por tramos) de Ω , la cual puede sub-dividirse en dos conjuntos disjuntos Γ_u y Γ_σ donde se imponen valores predefinidos de desplazamientos (\mathbf{u}) y tracciones externas (\mathbf{t}) respectivamente. Además, se tiene: $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ (clausura de Ω), $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$, $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \{\}$, y $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal exterior de Γ . Considérese además que para cada punto $\mathbf{x} \in S$ es posible definir un sistema cartesiano orto-normal $\{\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}\}$.

El campo de desplazamiento total $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, compatible con una cinemática con discontinuidades fuertes, puede escribirse como la suma de dos términos:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \overbrace{\bar{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}, t)}^{\text{término continuo}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, t)}_{\text{salto extendido sobre } \Omega_+} \quad (1)$$

donde las funciones $\bar{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}, t)$ y $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, t)$ representan el campo de desplazamiento regular (continuo) y el salto en desplazamientos, respectivamente (note que por simplicidad de notación se define $\boldsymbol{\beta} \equiv \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$, siendo $\llbracket \bullet \rrbracket$ el operador salto). La variable t , en las ecuaciones previas, está asociada al instante de tiempo (o pseudo-tiempo) considerado, y pertenece al intervalo de análisis $[0, T]$. $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ es la función escalon unitario (o función Heaviside) colocada sobre \mathcal{S} , la cual se expresa mediante:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_+ \end{cases} \quad ; \quad \nabla_{\mathbf{x}G} \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (2)$$

siendo $\delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ la distribución delta de Dirac colocada sobre \mathcal{S} y $\nabla_{\mathbf{x}G}(\bullet)$ el operador gradiente generalizado (en sentido distribucional) asociado a la coordenada \mathbf{x} , de allí el sub-índice.

A partir de las ecuaciones (1)-(2) y de la Figura 1-(a), se observa claramente que el modo discontinuo enriquecido se extiende sobre todo el dominio Ω_+ , debido al soporte asumido para la función $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$. En el trabajo de Simo et al. (1993), se propuso una forma equivalente para describir una cinemática con discontinuidades fuertes. Esta versión alternativa resulta más adecuada tanto para futuros tratamientos teóricos como para desarrollos numéricos, además permite considerar la existencia de múltiples fisuras en el medio de una manera natural, como así también manipular fisuras internas (esto es fisuras que no llegan a la frontera Γ) y condiciones de borde en forma más simple. Siguiendo las ideas discutidas en el trabajo referenciado, la expresión (1) puede re-escribirse como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \overbrace{\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)}^{\text{continuo}} + \underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, t)}_{\text{salto localizado sobre } \Omega^\varphi} \quad (3)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de desplazamiento regular y $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, t)$ el salto de desplazamiento:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{S} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad (5)$$

siendo ambas funciones continuas sobre $\bar{\Omega}$ y \mathcal{S} , respectivamente. Advértase que, según (5), el campo $\boldsymbol{\beta}$ está definido sólo sobre la fisura \mathcal{S} . En la Figura 1-(b), Ω^φ es un sub-dominio arbitrario de Ω ($\Omega^\varphi \subset \Omega$), que incluye la superficie de discontinuidad \mathcal{S} ($\mathcal{S} \subset \Omega^\varphi$). A su vez, Γ^φ es la frontera (suave por tramos) de Ω^φ , la cual puede sub-dividirse según: $\Gamma^\varphi = \mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_- \cup \Gamma_I^\varphi \cup \Gamma_{II}^\varphi$. Note además que \mathcal{S} divide a Ω^φ en dos sub-dominios Ω_+^φ y Ω_-^φ , de acuerdo a la dirección de \mathbf{n} . Los vectores unitarios \mathbf{n}_+ , \mathbf{n}_- , \mathbf{n}_I y \mathbf{n}_{II} representan las normales exteriores a las fronteras \mathcal{S}_+ , \mathcal{S}_- , Γ_I^φ y Γ_{II}^φ , respectivamente. En la expresión (3), $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ es una función pre-establecida, usualmente denominada *función salto unitario* y se define como:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) := \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad (6)$$

donde $\varphi(\mathbf{x}) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar continua y completamente arbitraria, excepto por las dos condiciones siguientes:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in (\Omega_- \setminus \Omega_-^\varphi) & \text{(a)} \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in (\Omega_+ \setminus \Omega_+^\varphi) & \text{(b)} \end{cases} \quad (7)$$

La incorporación de la función $\mathcal{M}_S(\mathbf{x})$ permite expresar el modo discontinuo de localización con soporte compacto $\bar{\Omega}^\varphi$, dado que según (2) y (7), es posible expresar:

$$\mathcal{M}_S(\mathbf{x}) : \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R} \tag{8}$$

Debe quedar claro, no obstante, que las expresiones (1) y (3) son formas equivalentes de expresar la misma cinemática. Fuera del soporte compacto $\bar{\Omega}^\varphi$, se satisface además la igualdad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, ver Figura 2-(b). Esto implica que fuera de un dominio arbitrario ($\bar{\Omega}^\varphi$) entorno a la fisura \mathcal{S} , el campo de desplazamiento total $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ y el campo regular $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ coinciden, pudiéndose observar una clara ventaja, que posee esta forma alternativa de describir la cinemática (3) respecto a la primera (1), al momento de aplicar condiciones de borde.

Observación 1 En el contexto del MEF la cinemática descripta resulta atractiva ya que posibilita embeber discontinuidades arbitrarias en el interior de los elementos finitos, independientemente del tamaño y orientación de los mismos, sin necesidad de introducir costosas técnicas de refinamiento o adaptatividad de malla. El soporte compacto $\bar{\Omega}^\varphi$ puede asumirse como el conjunto de aquellos elementos atravesados por la superficie de discontinuidad.

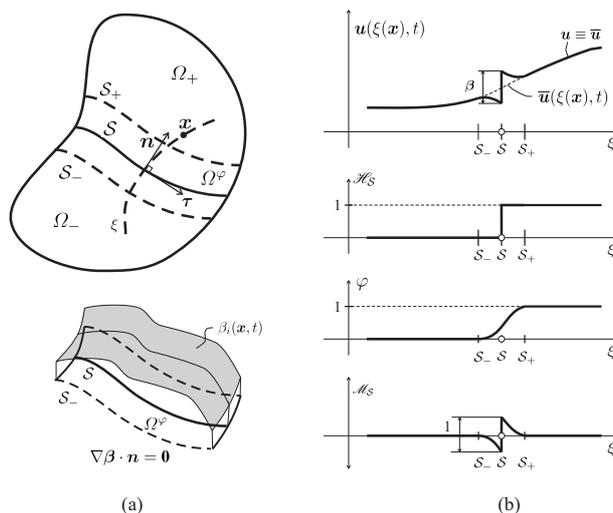


Figura 2: Cinemática con discontinuidades fuertes con soporte compacto.

A partir de la notación introducida en la expresión (3) es posible definir la función salto de desplazamiento $\beta(\mathbf{x}, t)$ de forma que resulte más adecuada para futuro tratamiento matemático. Estrictamente, este campo cinemático adicional tiene significancia física sólo sobre la interfaz de discontinuidad \mathcal{S} . Además, $\beta(\mathbf{x}, t)$ incorpora un modo independiente de deformación sólo en la dirección τ , ya que variaciones en el campo de desplazamiento en la dirección n ya están consideradas en la componente regular $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, ver Figura 2-(b). En consecuencia resulta viable extender el soporte de $\beta(\mathbf{x}, t)$ como:

$$\beta(\mathbf{x}, t) : \bar{\Omega}^\varphi \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad ; \quad \nabla_{\mathbf{x}} \beta \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{9}$$

ver Figura 2-(a). La expresión (9) no debe interpretarse como una restricción al campo $\beta(\mathbf{x}, t)$ sino más bien como una redefinición (o artificio matemático) para luego poder operar con el término $\nabla_{\mathbf{x}} \beta$, $\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}^\varphi$, sin generar incertezas sobre la consistencia de dicho término.

Para problemas con geometría linealizada, el tensor de deformaciones compatible con la ecuación (3) puede formalmente expresarse como:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}G}^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) := \underbrace{\nabla_{\mathbf{x}}^s \bar{\mathbf{u}} + \mathcal{M}_S \nabla_{\mathbf{x}}^s \beta - \beta \otimes^s \nabla_{\mathbf{x}} \varphi}_{\bar{\varepsilon}: \text{término regular}} + \underbrace{\delta_S (\beta \otimes^s \mathbf{n})}_{\varepsilon^\delta: \text{término singular}} \tag{10}$$

donde $\nabla_{\mathbf{x}G}^s(\bullet)$ es el operador gradiente simétrico generalizado (en un sentido distribucional), $\nabla_{\mathbf{x}}^s(\bullet)$ es el operador gradiente simétrico y el símbolo \otimes^s representa el producto externo simétrico de tensores. Se observa que el campo de deformación total $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ posee un término regular $\bar{\varepsilon}$ (acotado) y un término singular ε^δ (no acotado).

Por simplicidad, la expresión (10) puede reescribirse de la forma:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}G}^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) := \nabla_{\mathbf{x}}^s \bar{\mathbf{u}} + \mathcal{M}_S \nabla_{\mathbf{x}}^s \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} \otimes^s (\nabla_{\mathbf{x}G} \mathcal{M}_S) \quad (11)$$

en donde:

$$\nabla_{\mathbf{x}G} \mathcal{M}_S(\mathbf{x}) = \delta_S(\mathbf{x}) \mathbf{n} - \nabla_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \quad (12)$$

Observación 2 El conjunto de ecuaciones (1)-(12) define el marco teórico para el tratamiento de una cinemática con discontinuidades en el campo de desplazamientos. Nótese que no se ha explicitado, en forma directa, a que escala de análisis aplica tal representación. Por el momento, simplemente debiera interpretarse como una descripción cinemática general. En las secciones siguientes se incorporan tales conceptos en el desarrollo de un modelo multi-escala variacionalmente consistente para materiales quasi-frágiles heterogéneos con posibilidad de nucleación y propagación de múltiples fisuras.

3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MODELO MULTI-ESCALA CLÁSICO

Este apartado está dedicado a revisar ideas fundamentales sobre la formulación variacionalmente consistente de modelos multi-escalas clásicos basados en conceptos de homogeneización de campos tensoriales (de deformación y tensión) sobre una celda unitaria.

En primera instancia se asume que el problema mecánico de un sólido heterogéneo puede formularse considerando dos escalas de análisis diferentes, acopladas entre sí, a saber: (i) una escala *macroscópica* y (ii) una escala *meso-mecánica* en la cual pueden individualizarse las fases constituyentes del material heterogéneo. Cada punto material del macro-continuo tiene asignado (o se corresponde) con una *Celda Unitaria* heterogénea en la escala mesoscópica. Dado que existe una diferencia física de longitudes entre ambas escalas, cada una de ellas tiene asignado un sistema de referencia específico. Así, un punto material en la escala macroscópica se denota mediante su vector posición “ \mathbf{x} ” (asociado al sistema coordenado $\{x_i\}$, $i = 1, ndim$)¹, mientras que en la escala mesomecánica cada punto material posee un vector posición “ \mathbf{y} ” (vinculado al sistema coordenado $\{y_i\}$, $i = 1, ndim$), ver Figura 3. Se introduce como hipótesis fundamental que tanto el campo de deformación $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ como el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ en un punto arbitrario \mathbf{x} del continuo macroscópico se obtienen, respectivamente, como el promedio volumétrico del tensor de deformación $\varepsilon_\mu(\mathbf{y}, t)$ y tensión mesoscópica $\boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t)$ sobre una *Celda Unitaria* (CU) asociada a la meso-escala. Matemáticamente esto se expresa mediante:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu(\mathbf{y}, t) d\Omega \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) d\Omega \quad (14)$$

donde Ω_μ representa el dominio de la CU (con frontera suave por tramos Γ_μ) y $|\Omega_\mu| := \int_{\Omega_\mu} d\Omega$ hace referencia a la medida apropiada de Ω_μ (longitud, área o volumen, dependiendo de la dimensión del problema). Se asume además que la longitud característica ℓ_μ de la celda unitaria

¹Adviértase la diferencia de nomenclatura aquí introducida “ \mathbf{x} ” para el vector posición de un punto del macro-continuo con la utilizada en la sección precedente “ \mathbf{X} ”, donde no se hacía referencia a una escala específica de análisis.

es mucho menor que la longitud característica de la escala macro ℓ , véase la Figura 3 para clarificar los conceptos introducidos.

El promedio volumétrico definido por las ecuaciones (13) y (14) se denomina comunmente proceso de *homogeneización*. Por este motivo las magnitudes ε y σ se denotan también como tensores de deformación y tensión macroscópicos *homogeneizados*, respectivamente.

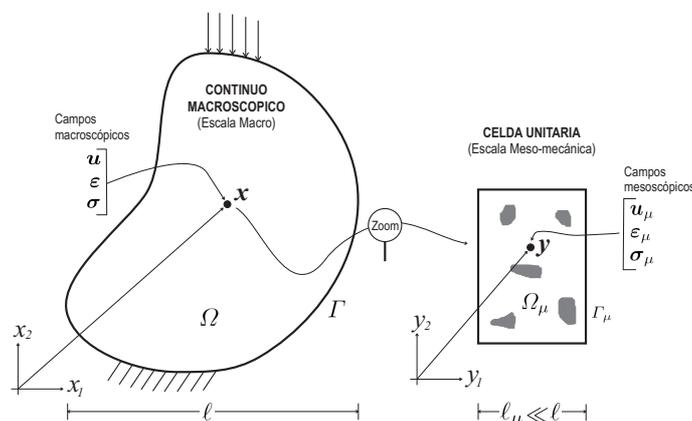


Figura 3: Ingredientes básicos de modelo multiescala basado en celda unitaria heterogénea (macro-meso escala).

3.1. Restricciones cinemáticas a nivel de Celda Unitaria (condiciones de borde)

Bajo la hipótesis de cinemática lineal introducida previamente, el tensor de deformación mesoscópico $\varepsilon_\mu(\mathbf{y}, t)$ puede obtenerse a partir de la definición clásica:

$$\varepsilon_\mu(\mathbf{y}, t) = \nabla_{\mathbf{y}}^s \mathbf{u}_\mu(\mathbf{y}, t) \quad (15)$$

siendo $\mathbf{u}_\mu(\mathbf{y}, t)$ la función de desplazamiento mesoscópico en cada punto (\mathbf{y}) de la celda unitaria. Sin pérdida de generalidad, este campo puede escribirse como la suma de tres términos:

$$\mathbf{u}_\mu(\mathbf{y}, t) = \underbrace{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}_{\text{constante}} + \underbrace{\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{y}}_{\text{lineal}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t)}_{\text{fluctuante}} \quad (16)$$

donde el primero de ellos es homogéneo (constante en \mathbf{y}) y coincide con el desplazamiento de la escala macro $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, el segundo es lineal en \mathbf{y} y dependiente de la deformación macroscópica, finalmente variaciones del campo de desplazamiento mesoscópico (entorno a la componente constante y lineal) se consideran a través del término fluctuante $\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t)$. A partir de la descomposición aditiva (16), y teniendo en cuenta la relación (15), el tensor de deformaciones en la celda unitaria se expresa como la suma:

$$\varepsilon_\mu(\mathbf{y}, t) = \underbrace{\varepsilon(\mathbf{x}, t)}_{\text{constante}} + \underbrace{\tilde{\varepsilon}_\mu(\mathbf{y}, t)}_{\text{fluctuante}} \quad (17)$$

de una componente homogénea (constante en \mathbf{y}) coincidente con la deformación macroscópica más una contribución fluctuante $\tilde{\varepsilon}_\mu(\mathbf{y}, t) = \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu$.

Si el campo $\mathbf{u}_\mu(\mathbf{y}, t)$ es suficientemente suave, la expresión (13) puede manipularse matemáticamente aplicando identidades tensoriales conocidas (ver ecuación (92) en Anexo I) y reescribirse de la forma:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Gamma_\mu} \mathbf{u}_\mu \otimes^s \boldsymbol{\nu}_\mu d\Gamma \quad (18)$$

donde $\boldsymbol{\nu}_\mu$ es el vector unitario normal exterior a la frontera Γ_μ de la celda unitaria. Así la ecuación (18) representa una forma alternativa de formular el concepto de homogeneización de deformación (13).

Evidentemente, la ecuación (18) impone una restricción sobre el campo de desplazamiento mesoscópico en la celda unitaria. Sólo aquellas funciones $\mathbf{u}_\mu(\mathbf{y}, t)$ que satisfagan la condición de homogeneización (18), resultan cinemáticamente admisibles. Formalmente es posible escribir:

$$\mathbf{u}_\mu \in \mathcal{K}_\mu^* \quad ; \quad \mathcal{K}_\mu^* = \left\{ \mathbf{u}_\mu \text{ regular, tal que: } \int_{\Gamma_\mu} \mathbf{u}_\mu \otimes^s \boldsymbol{\nu}_\mu \, d\Gamma = |\Omega_\mu| \boldsymbol{\varepsilon} \right\} \quad (19)$$

siendo \mathcal{K}_μ^* la variedad lineal mínimamente restringida de desplazamientos mesoscópicos cinemáticamente admisibles. En vista de la descomposición aditiva propuesta (16), y tras simple operatoria, la restricción cinemática mínima aplicada sobre \mathbf{u}_μ puede reformularse en términos del campo de fluctuaciones en desplazamiento mesoscópico $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$:

$$\mathbf{u}_\mu \in \mathcal{K}_\mu^* \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu^* \quad ; \quad \tilde{\mathcal{K}}_\mu^* = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu \text{ regular, tal que: } \int_{\Gamma_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes^s \boldsymbol{\nu}_\mu \, d\Gamma = \mathbf{0} \right\} \quad (20)$$

donde $\tilde{\mathcal{K}}_\mu^*$ es el espacio vectorial mínimamente restringido de fluctuaciones en desplazamientos mesoscópicos. Sólo campos de fluctuaciones $\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t)$ que satisfagan (20) resultan cinemáticamente admisibles en la celda unitaria, de acuerdo al concepto de homogeneización introducido. En este contexto de análisis la formulación de un modelo multi-escala específico implica la adopción de un espacio vectorial apropiado para las fluctuaciones en desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$, que denotaremos en forma genérica $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$, el cual debe satisfacer (al menos) la restricción (20), esto implica necesariamente: $\tilde{\mathcal{K}}_\mu \subseteq \tilde{\mathcal{K}}_\mu^*$.

Los modelos clásicos de homogeneización reconocidos en la literatura bajo las denominaciones de: (i) modelo de *Taylor* o de deformación homogénea, (ii) el modelo *Lineal* o afin, (iii) el modelo *Periódico* y (iv) el modelo de *Mínima Restricción* o *Tracción Uniforme*, pueden recuperarse siguiendo esta formulación variacionalmente consistente, según se indica a continuación:

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Taylor} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \text{ tal que: } \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu \right\} \quad (21)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Lin} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \text{ tal que: } \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{y} \in \Gamma_\mu \right\} \quad (22)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Per} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \text{ tal que: } \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}^+, t) = \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}^-, t), \forall \text{ par } \{\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-\} \in \Gamma_\mu \right\} \quad (23)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Uni} \equiv \tilde{\mathcal{K}}_\mu^* \quad (24)$$

donde en la expresión (23), siguiendo la nomenclatura propuesta en Miehe et al. (1999), cada par ordenado $\{\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-\}$ pertenece a sendas partes de la frontera de la celda unitaria (Γ_μ^+ , Γ_μ^-) con normales ($+\boldsymbol{\nu}_\mu$, $-\boldsymbol{\nu}_\mu$) opuestas, respectivamente. Tras una simple inspección de las expresiones (21)-(24) se observa que, a partir del modelo mínimamente restringido, cada definición alternativa del espacio $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ adoptado restringe aún más la cinemática admisible en la celda unitaria, por lo tanto es viable escribir: $\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Taylor} \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Lin} \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Per} \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Uni} \equiv \tilde{\mathcal{K}}_\mu^*$

Para formular el principio variacional que gobierna el equilibrio en la celda unitaria (sub-sección (3.4)) y el principio variacional que asegura la consistencia energética entre ambas escalas (sub-sección (3.3)), resulta necesario además definir el espacio vectorial \mathcal{V}_μ de *desplazamientos virtuales mesoscópicos cinemáticamente admisibles* ($\delta \mathbf{u}_\mu$) y de las fluctuaciones en velocidades ($\tilde{\mathbf{u}}_\mu$). Mediante simple argumentación (de Souza Neto y Feijoo, 2006) puede

concluirse que tal espacio (\mathcal{V}_μ) coincide con el previamente definido $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$:

$$\mathcal{V}_\mu \equiv \tilde{\mathcal{K}}_\mu \quad (25)$$

de esta forma se puede expresar: $\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu$, $\delta \mathbf{u}_\mu \in \mathcal{V}_\mu$ y $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu$.

3.2. Respuesta constitutiva mesoscópica

Para todo instante de tiempo t , el estado de tensión $\boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t)$ en un punto arbitrario \mathbf{y} de la celda unitaria viene dado por una relación constitutiva general local, dependiente de la historia de deformación ($\boldsymbol{\varepsilon}_\mu^t(\mathbf{y})$) en dicho punto, hasta el instante de tiempo t considerado, es decir:

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu^t(\mathbf{y})) \quad ; \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu \quad ; \quad \forall t \in [0, T] \quad (26)$$

Adviértase que la notación $(\bullet)^t$ implica la necesidad de conocer la historia de evolución de la variable (\bullet) , hasta el instante de tiempo t . El funcional \mathcal{F} puede incluir modelos inelásticos disipativos de cualquier tipo basados, por ejemplo, en el concepto de variables internas (plasticidad, viscosidad, daño, etc), como es común utilizar en el contexto de los modelos fenomenológicos.

3.3. Consistencia energética

Un aspecto de crucial importancia, subyacente en la formulación de los modelos multi-escalas, es garantizar la consistencia energética entre las diferentes escalas de análisis consideradas. Para tal fin se introduce el principio variacional de *Macro-Homogeneidad* de Hill-Mandel (Hill, 1965; Mandel, 1971), el cual establece la igualdad entre la potencia interna macroscópica (P_{int}) y el promedio volumétrico de la potencia interna mesoscópica sobre la celda unitaria, para todo campo de velocidades admisible.

En primera instancia es necesario introducir el concepto de velocidad de deformación mesoscópica cinemáticamente admisible, el cual según la ecuación (17) y lo discutido en la subsección (3.1), puede expresarse:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu(\mathbf{y}, t) = \nabla_{\mathbf{y}}^s \dot{\mathbf{u}}_\mu = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nabla_{\mathbf{y}}^s \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \quad (27)$$

Luego el principio variacional de Hill-Mandel queda formulado en términos de la siguiente igualdad:

$$P_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu \, d\Omega \quad ; \quad \forall \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu \quad (28)$$

A partir de la definición de homogeización de deformación y tensión macroscópica, ecuaciones (13)-(14), puede demostrarse mediante simple operatoria que la expresión (28) es válida sí y solo sí se satisface:

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}}^s \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega = 0 \quad ; \quad \forall \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu \quad (29)$$

Integrando por partes la ecuación previa, ver expresión (96) en Anexo I, y asumiendo que cada punto “ \mathbf{y} ” de la celda unitaria se encuentra en equilibrio ($\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\mu = \mathbf{b}_\mu$), el principio de Hill-Mandel es equivalente a exigir:

$$\int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}_\mu \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Gamma - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{b}_\mu \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega = 0 \quad ; \quad \forall \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu \quad (30)$$

esto implica que las tanto las tracciones “ \mathbf{t}_μ ” actuando sobre la frontera Γ_μ de la celda unitaria como las fuerzas de cuerpo “ \mathbf{b}_μ ” actuando en el dominio Ω_μ no generan trabajo respecto al campo de velocidades de desplazamiento mesoscópico $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu$. En vista de la equivalencia entre las

definiciones de los espacios vectoriales $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ y \mathcal{V}_μ , dada por la relación (25), puede argumentarse además que los campos $\{\mathbf{t}_\mu, \mathbf{b}_\mu\}$ tampoco generan trabajo sobre las variaciones cinemáticamente admisibles de desplazamiento mesoscópico:

$$\int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}_\mu \cdot \delta \mathbf{u}_\mu d\Gamma - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{b}_\mu \cdot \delta \mathbf{u}_\mu d\Omega = 0 \quad ; \quad \forall \delta \mathbf{u}_\mu \in \mathcal{V}_\mu \quad (31)$$

es decir: $\mathbf{t}_\mu \in \mathcal{V}_\mu^\perp \equiv \tilde{\mathcal{K}}_\mu^\perp$, $\mathbf{b}_\mu \in \mathcal{V}_\mu^\perp \equiv \tilde{\mathcal{K}}_\mu^\perp$, donde el operador $(\bullet)^\perp$ implica el complemento ortogonal al espacio (\bullet) .

3.4. Problema de valores de contorno en la celda unitaria

Como se vió, la definición de *homogeneización de deformación* y el principio variacional de *Hill-Mandel* introducen una restricción cinemática y energética, respectivamente. Teniendo en cuenta estos conceptos, juntamente con la relación constitutiva mesoscópica (26), el problema del equilibrio de la celda unitaria (o problema de valores de contorno) puede plantearse a partir de la formulación del *Principio de Trabajos Virtuales*, el cual se expresa como: dado un valor conocido de la deformación $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ en un punto \mathbf{x} de la escala macro, encontrar el campo de desplazamiento mesoscópico cinemáticamente admisible $\mathbf{u}_\mu \in \mathcal{K}_\mu$ tal que:

$$\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(\overbrace{(\nabla_{\mathbf{y}}^s \mathbf{u}_\mu)^t}^{\varepsilon_\mu^t}) : \nabla_{\mathbf{y}}^s \delta \mathbf{u}_\mu d\Omega - \overbrace{\int_{\Omega_\mu} \mathbf{b}_\mu \cdot \delta \mathbf{u}_\mu d\Omega}^{=0 \text{ según Hill-Mandel}} - \overbrace{\int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}_\mu \cdot \delta \mathbf{u}_\mu d\Gamma}^{=0 \text{ según Hill-Mandel}} = 0 \quad ; \quad \forall \delta \mathbf{u}_\mu \in \mathcal{V}_\mu \quad (32)$$

o bien, equivalentemente, encontrar el campo de desplazamiento fluctuante $\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu$ tal que:

$$\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu((\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^t) : \nabla_{\mathbf{y}}^s \delta \mathbf{u}_\mu d\Omega = 0 \quad ; \quad \forall \delta \mathbf{u}_\mu \in \mathcal{V}_\mu \quad (33)$$

Observación 3 *Adviértase que en el contexto de análisis presente, el espacio $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ se ha definido sólo considerando el requisito de homogeneización de deformación. En realidad, para resolver (33) hace falta además imponer ciertas condiciones de borde para eliminar modos de cuerpo rígido, es decir se requiere adoptar necesariamente un sub-espacio $\mathcal{K}_\mu \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu$, véase sección (5). Este punto no adquiere implicancias teóricas importantes, por lo cual se seguirá formulando el problema en términos de $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$.*

Observación 4 *Los conceptos dicutidos en esta sección representan los ingredientes teóricos básicos para la formulación cinemática y variacionalmente consistente de modelos multi-escalas basados en homogeneización de campos sobre una celda unitaria. Estas ideas son clásicas en la actualidad. Obsérvese que todo el formalismo cinemático-variacional de la metodología se deduce, fundamentalmente, a partir de la definición de homogeneización de deformación introducida mediante la expresión (13). Este concepto incorpora restricciones en los campos que describen la cinemática de la meso-escala: fluctuaciones de desplazamiento ($\tilde{\mathbf{u}}_\mu$), variaciones cinemáticamente admisibles ($\delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu$) y velocidades de fluctuaciones ($\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu$). A partir de una apropiada definición de los espacios vectoriales admisibles para tales campos, puede formularse íntegramente el problema de valores de contorno de la celda unitaria.*

4. MODELO MULTI-ESCALA CON FISURAS A NIVEL MESO-ESTRUCTURAL

A diferencia de los modelos multi-escala clásicos discutidos en la sección precedente, en este trabajo se propone como aporte novedoso el desarrollo de un modelo multi-escala en el cual resulta admisible la generación y propagación de fisuras a nivel *meso-mecánico* (es decir a nivel de la celda unitaria elemental) como consecuencia última de la degradación material, ver un esquema representativo en la Figura 4. Las micro-fisuras se modelan como verdaderas

discontinuidades en el campo de desplazamiento utilizando para tal fin el contexto cinemático discutido en la sección (2). Desde un punto de vista constitutivo, tal proceso de fisuración resulta viable cuando la meso-estructura se torna materialmente inestable, situación que se manifiesta típicamente al asumir un comportamiento mesomecánico con ablandamiento en las leyes de evolución de las variables internas. Cabe señalar que este proceso de fisuración incorpora un grado de heterogeneidad aún mayor al que posee inicialmente el material compuesto, y que el mismo evoluciona conforme se degrada la celda unitaria.

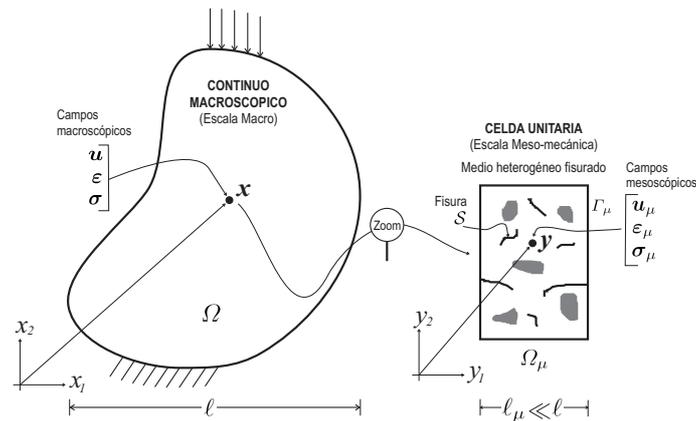


Figura 4: Ingredientes básicos de modelo multiescala basado en celda unitaria heterogénea con fisuras.

Según lo discutido en la sección (2), la nucleación de una fisura (o múltiples fisuras) modifica sustancialmente la cinemática clásica, ya que se introduce un campo adicional (el salto en desplazamientos) dando origen a términos discontinuos en desplazamientos y términos no acotados (distribucionales) en el campo de deformaciones. Esta situación requiere una reinterpretación de la formulación variacional cinemáticamente consistente presentada en la sección previa, analizando las consecuencias teóricas que se inducen tras la introducción de la nueva cinemática enriquecida. En esta sección, tal estudio se presenta considerando dos posibles escenarios: (i) fisuras internas a la celda unitaria y (ii) fisuras que alcanzan la frontera de la celda unitaria, véase las sub-secciones (4.2) y (4.3), respectivamente.

Consistentemente con la descripción cinemática singular que adquiere el problema mecánico con nucleación de fisuras, otro punto de fundamental importancia radica en cómo formular la respuesta constitutiva que gobierna la evolución de los mecanismos disipativos en la zona de falla y cómo evoluciona la apertura de fisura. Este tópico se discute brevemente a continuación (sub-sección (4.1)).

4.1. Modelos discretos-cohesivos

Una de las aproximaciones más aceptadas por la comunidad científica para abordar el problema de falla por generación/propagación de fisuras en un medio inicialmente continuo es mediante la introducción del concepto de “*fisura ficticia*” (Hillerborg et al., 1976; Bazant y Planas, 1998). Según este modelo, la fisura (entendida como una verdadera discontinuidad en desplazamientos), se incorpora en el análisis mecánico del sólido cuando se satisface algún criterio “*pre-establecido*” de resistencia o estabilidad material. Desde un punto de vista físico, dicha situación se presenta cuando ciertos mecanismos disipativos de degradación material (daño, plasticidad, decohesión, micro-deslizamientos, etc.) comienzan a acumularse en zonas o bandas de espesor reducido comparado con las dimensiones estructurales, fenómeno conocido como *localización de deformaciones*. Por lo general, este estado mecánico no resulta compatible

con la noción intuitiva de “*fisura real*”, entendida como aquella en donde no existe transferencia de esfuerzos entre ambos lados de la misma (conceptualmente equivalente a la generación de una nueva condición de borde libre de tracciones y cambio de topología de la geometría inicial del problema). Para salvar esta inconsistencia y darle continuidad a la respuesta constitutiva al momento de verificar el criterio de falla material predefinido, el modelo de *fisura ficticia* propone introducir:

- Una cinemática con discontinuidades en el campo de desplazamientos (*fisura ficticia*), con apertura inicial nula, la cual evoluciona según un modelo constitutivo específico (ver ítem siguiente).
- Un modelo *discreto-cohesivo* con ablandamiento, actuando sobre la superficie de discontinuidad, formulado en términos de una fuerza cohesiva (o vector tracción “ \mathcal{T} ”) y el salto en desplazamientos: $\mathcal{T} = f(\beta)$. Esta ley cohesiva es responsable de, conforme progresa el estado de cargas y degradación material, consolidar el proceso de localización de deformaciones y satisfacer finalmente una condición de fisura real, libre de tracciones. Adviértase la ventaja intrínseca asociada a que la topología del problema permanece invariable.
- Una nueva condición de equilibrio entre el estado tensional del medio continuo en la proximidad de la fisura y el modelo cohesivo introducido.

Observación 5 La denominación de modelo “*discreto-cohesivo*” ($\mathcal{T} = f(\beta)$) se introduce para establecer una diferencia conceptual con el modelo constitutivo clásico del “*continuo*”, formulado en términos de tensiones y deformaciones ($\sigma = f(\epsilon)$).

En el contexto de los modelos discretos-cohesivos de fisura ficticia pueden, a su vez, reconocerse dos tipos de aproximaciones:

- Una primer familia de modelos, aquí denominados *modelos cohesivos clásicos*, se caracterizan porque en éstos la respuesta cohesiva (tracción-salto), que actúa sobre la fisura, se introduce como una ley constitutiva adicional “*ad-hoc*”, independiente del modelo que gobierna el comportamiento del material no fisurado (Planas y Elices, 1992; Sancho et al., 2007).
- Una visión alternativa al problema de falla material ha sido propuesta inicialmente por Simo et al. (1993); Simo y Oliver (1994) y posteriormente más elaborada por Oliver (1995a,b, 1996a). Esta metodología lleva por nombre *Aproximación por Discontinuidades Fuertes del Continuo (ADFC)* y se basa en asumir que una discontinuidad en el campo de desplazamientos puede interpretarse como la condición límite de una discontinuidad en el campo de deformaciones, precisamente cuando el ancho de la banda de localización tiende a cero. Esta forma de idealizar el problema permite conservar todo el formalismo matemático de la mecánica de medios continuos, inclusive para considerar discontinuidades en el sólido. En este sentido, sobre la superficie de discontinuidad, \mathcal{S} , es posible postular la existencia de magnitudes de deformación, $\epsilon_{\mathcal{S}} = \epsilon|_{x \in \mathcal{S}}$, no acotadas como se vió en la sección (2) como así también magnitudes de tensión, $\sigma_{\mathcal{S}} = \sigma|_{x \in \mathcal{S}}$. Para que el problema físico quede bien formulado, el tensor de tensiones evaluado sobre la superficie de discontinuidad, $\sigma_{\mathcal{S}}$, debe permanecer acotado, aun cuando existan deformaciones singulares. Esto último se obtiene introduciendo el concepto de regularización del modelo constitutivo sobre \mathcal{S} . No se pretende aquí discutir en detalle los fundamentos teóricos de la ADFC. La conclusión más importante de esta metodología es que, dado un modelo constitutivo de continuo clásico ($\sigma = f(\epsilon)$) y tras introducir una cinemática con discontinuidades fuertes (entendida como caso límite de localización de deformaciones al momento de detectarse inestabilidad material) juntamente con una apropiada regularización constitutiva, el modelo constitutivo del continuo “*degenera*” (o se proyecta) naturalmente en un modelo de tipo “*cohesivo*” en términos del salto de desplazamientos de la fisura. Matemáticamente esto se expresa: $\mathcal{T} = \sigma_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = f(\beta)$. Obsérvese que sólo es necesario

introducir un único marco constitutivo (el del continuo) y que la variable dual al nuevo campo cinemático enriquecido (β) resulta ser $\sigma_S \cdot n$, la cual surge naturalmente a través de un proceso de proyección consistente del tensor de tensiones σ .

Observación 6 *Cualquiera de las dos estrategias discutidas resultan completamente viables para los propósitos de este trabajo. No obstante, en los desarrollos siguientes se seguirán los lineamientos propios de la ADFC ya que, como ésta puede formularse íntegramente en el contexto estándar del continuo, permite generalizar de una manera natural los modelos multi-escalas clásicos para considerar modelos multi-escalas con generación y propagación de fisuras. Esta aclaración adquiere particular importancia cuando, en las sub-secciones (4.2.2) y (4.2.3), se postule el principio de equivalencia energética y equilibrio de la celda unitaria con presencia de fisuras, respectivamente.*

4.2. Fisuras internas a la celda unitaria

4.2.1. Cinemática

Como se mencionó previamente, se asume ahora que el campo de desplazamiento mesoscópico, $u_\mu(\mathbf{y}, t)$, presenta discontinuidades o saltos (“fisuras”), con la particularidad que estas fisuras son internas a la celda unitaria, véase Figura 5-(a). A partir de la descomposición aditiva supuesta para $u_\mu(\mathbf{y}, t)$ (expresión (16)) y de la descripción cinemática introducida en la sección (2), ver especialmente la ecuación (3), es posible escribir:

$$u_\mu(\mathbf{y}, t) = \underbrace{u(\mathbf{x}, t)}_{\text{constante}} + \underbrace{\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{y}}_{\text{lineal}} + \underbrace{\tilde{u}_\mu(\mathbf{y}, t)}_{\text{continuo}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{i=nfis} \mathcal{M}_S^i(\mathbf{y}) \tilde{\beta}_\mu^i(\mathbf{y}, t)}_{\text{discontinuo}} \quad (34)$$

$\tilde{u}_\mu(\mathbf{y}, t)$: fluctuante

donde se observa que la componente fluctuante del campo de desplazamiento mesoscópico $\tilde{u}_\mu(\mathbf{y}, t)$ posee un término regular $\tilde{u}_\mu(\mathbf{y}, t)$ (continuo) más un modo enriquecido adicional representado por el término discontinuo $\mathcal{M}_S^i(\mathbf{y}) \tilde{\beta}_\mu^i(\mathbf{y}, t)$. Con el supra-índice “i” se hace referencia a una fisura específica, mientras que “n fis” es el número total de fisuras desarrolladas en la meso-estructura. Como las discontinuidades son internas a la celda unitaria, es lícito postular que el valor de la función salto en los extremos de cada fisura debe ser nulo:

$$\tilde{\beta}_\mu^i|_{\Gamma_{\mu I}^\varphi} = \tilde{\beta}_\mu^i|_{\Gamma_{\mu II}^\varphi} = \mathbf{0} \quad ; \quad \forall i = 1, \dots, n\text{fis} \quad (35)$$

El campo de deformaciones compatible con la cinemática previa puede expresarse:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu(\mathbf{y}, t) &= \nabla_{\mathbf{y}G}^s u_\mu(\mathbf{y}, t) \\ &= \underbrace{\varepsilon(\mathbf{x}, t)}_{\text{constante}} + \underbrace{\nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{u}_\mu}_{\text{acotado}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{i=nfis} \left[\underbrace{\mathcal{M}_S^i \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\beta}_\mu^i - \tilde{\beta}_\mu^i \otimes^s \nabla_{\mathbf{y}} \varphi^i}_{\text{acotado}} + \underbrace{\delta_S^i (\tilde{\beta}_\mu^i \otimes^s \mathbf{n}^i)}_{\text{no acotado}} \right]}_{\tilde{\varepsilon}_\mu(\mathbf{y}, t): \text{fluctuante}} \\ &= \varepsilon(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{u}_\mu + \sum_{i=1}^{i=nfis} \left[\mathcal{M}_S^i \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\beta}_\mu^i + \tilde{\beta}_\mu^i \otimes^s (\nabla_{\mathbf{y}G} \mathcal{M}_S^i) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

en el cual se reconocen términos regulares (acotados) y términos singulares (no acotados) asociados a las fluctuaciones de la deformación mesoscópica $\tilde{\varepsilon}_\mu(\mathbf{y}, t)$.

Observación 7 *Sin pérdida de generalidad, y con el objetivo de clarificar la notación, en el análisis que prosigue se asume la existencia de una única fisura (n fis = 1), eliminando el término de sumatoria y el supra-índice “i” en las deducciones siguientes. La extensión para considerar múltiples fisuras es trivial.*

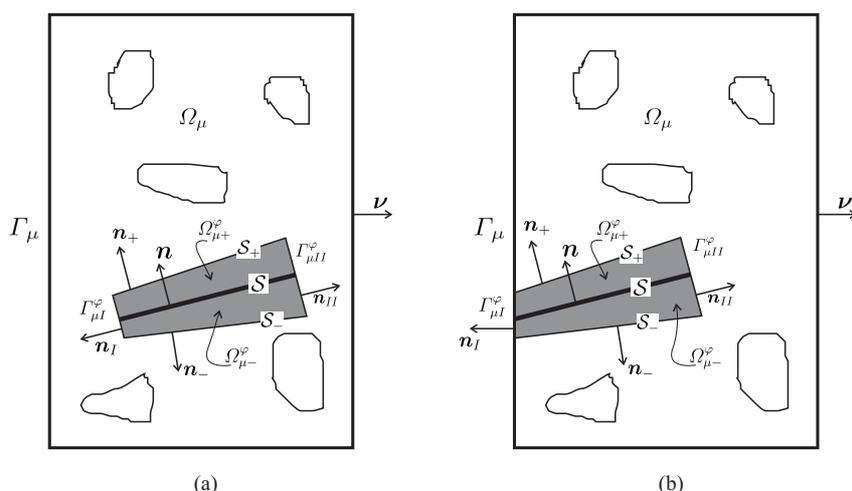


Figura 5: Celda unitaria heterogénea. (a) Con Fisura interna. (b) Con Fisura que alcanza la frontera Γ_μ

Nuevamente, la definición de homogeneización de deformación (13) es el punto de partida fundamental del modelo multi-escala variacional propuesto en este trabajo. Según se dedujo en la sub-sección (3.1), este concepto introduce restricciones en la cinemática admisible de la celda unitaria. Resulta natural entonces preguntarse si, tras la incorporación de la nueva cinemática enriquecida con modos discontinuos en desplazamiento del tipo $\mathcal{M}_S(\mathbf{y}) \tilde{\beta}_\mu(\mathbf{y}, t)$, surgen restricciones adicionales en la formulación variacional del problema de valores de contorno en la meso-escala.

El paso siguiente es aplicar el proceso de homogeneización a la expresión de la deformación mesoscópica (36):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\mu(\mathbf{y}, t) d\Omega \\ \mathbf{0} &= \int_{\Omega_\mu} \left[\underbrace{\nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu}_{T_1} + \underbrace{\mathcal{M}_S \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\beta}_\mu}_{T_2} - \underbrace{\tilde{\beta}_\mu \otimes^s \nabla_{\mathbf{y}} \varphi}_{T_3} + \underbrace{\delta_S (\tilde{\beta}_\mu \otimes^s \mathbf{n})}_{T_3} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (37)$$

Basados en la nomenclatura introducida en la Figura 5-(a), la cual respeta consistencia con la sub-sección (3.1), es posible realizar un tratamiento algebraico sobre cada uno de los términos T_1 , T_2 y T_3 , indicados en la expresión (37). En particular, el término T_1 puede desarrollarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T_1 : \int_{\Omega_\mu} \mathcal{M}_S \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\beta}_\mu d\Omega &= \int_{\Omega_{\mu+}^\varphi} \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\beta}_\mu d\Omega - \int_{\Omega_{\mu-}^\varphi} \varphi \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\beta}_\mu d\Omega \\ &= \int_{S_+} \tilde{\beta}_\mu \otimes^s \mathbf{n}_+ dS - \int_S \tilde{\beta}_\mu \otimes^s \mathbf{n} dS - \int_{\Omega_{\mu-}^\varphi} \varphi \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\beta}_\mu d\Omega \end{aligned} \quad (38)$$

en donde se ha considerado: la definición de la función $\mathcal{M}_S(\mathbf{y})$ dada por la expresión (6) con soporte compacto Ω_{μ}^φ , la identidad tensorial (93) del Anexo I y la condición de fisura interna a la celda unitaria, dada por la igualdad (35).

El término T_2 puede a su vez manipularse matemáticamente y expresarse como:

$$\begin{aligned} T_2 : - \int_{\Omega_\mu} \tilde{\beta}_\mu \otimes^s \nabla_{\mathbf{y}} \varphi d\Omega &= - \int_{\Omega_{\mu}^\varphi} \nabla_{\mathbf{y}}^s (\varphi \tilde{\beta}_\mu) d\Omega + \int_{\Omega_{\mu}^\varphi} \varphi \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\beta}_\mu d\Omega \\ &= - \int_{S_+} \tilde{\beta}_\mu \otimes^s \mathbf{n}_+ dS + \int_{\Omega_{\mu}^\varphi} \varphi \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\beta}_\mu d\Omega \end{aligned} \quad (39)$$

en donde se han considerado las identidades tensoriales (95)-(93) del Anexo I, la definición de la función φ dada por la expresión (7), y el hecho que la fisura es interna.

El término T_3 se evalúa en forma trivial mediante la propiedad integral de la distribución delta de Dirac (ver la identidad 94 en el Anexo I):

$$T_3 : \int_{\Omega_\mu} \delta_S(\tilde{\beta}_\mu \otimes^s \mathbf{n}) d\Omega = \int_{\Omega_\mu^\varphi} \delta_S(\tilde{\beta}_\mu \otimes^s \mathbf{n}) d\Omega = \int_S \tilde{\beta}_\mu \otimes^s \mathbf{n} dS \quad (40)$$

Retomando el análisis sobre la expresión de homogeneización (37), y en vista de las expresiones finales de los términos T_1 , T_2 y T_3 , se deduce que la misma se simplifica dando:

$$\mathbf{0} = \int_{\Omega_\mu} \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu d\Omega \quad (41)$$

en la cual, como se observa, no interviene en forma explícita el modo cinemático enriquecido. Este hecho permite argumentar que, cuando las fisuras son internas a la celda unitaria y de acuerdo a la descripción cinemática propuesta, sólo surgen restricciones sobre la componente continua (regular) de las fluctuaciones en desplazamiento mesoscópico $\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t)$, pero no sobre el campo $\tilde{\beta}_\mu(\mathbf{y}, t)$. A menos de la restricción trivial dada por la ecuación (35), el campo $\tilde{\beta}_\mu$ es arbitrario en Ω_μ^φ . Esto sugiere que el espacio con mínima restricción para la función $\tilde{\beta}_\mu$, aquí denominado $\tilde{\mathcal{K}}_{\mu\beta}^*$, pueda formularse como sigue:

$$\tilde{\beta}_\mu \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mu\beta}^* \quad ; \quad \tilde{\mathcal{K}}_{\mu\beta}^* = \left\{ \tilde{\beta}_\mu \text{ regular, tal que: } \tilde{\beta}_\mu|_{\Gamma_{\mu I}^\varphi} = \tilde{\beta}_\mu|_{\Gamma_{\mu II}^\varphi} = \mathbf{0} \right\} \quad (42)$$

Dado que la contribución regular al campo de desplazamiento fluctuante $\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t)$ es, por definición, continua sobre Ω_μ , es posible expresar la restricción cinemática (41) en términos de una integral sobre la frontera Γ_μ (véase la identidad tensorial (92) en el Anexo I), tal como se ha formulado anteriormente:

$$\mathbf{0} = \int_{\Gamma_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes^s \boldsymbol{\nu}_\mu d\Gamma \quad (43)$$

expresión que permite definir el espacio con restricción cinemática mínima para $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$, como:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mu\tilde{\mathbf{u}}}^* \quad ; \quad \tilde{\mathcal{K}}_{\mu\tilde{\mathbf{u}}}^* = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu \text{ regular, tal que: } \int_{\Gamma_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes^s \boldsymbol{\nu}_\mu d\Gamma = \mathbf{0} \right\} \quad (44)$$

A partir de (42) y (44), es posible definir el espacio mínimamente restringido para el campo de fluctuaciones totales de desplazamiento mesoscópico $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu^* := \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu + \mathcal{M}_S \tilde{\beta}_\mu, \text{ tal que: } (\tilde{\mathbf{u}}_\mu, \tilde{\beta}_\mu) \in (\tilde{\mathcal{K}}_{\mu\tilde{\mathbf{u}}}^* \times \tilde{\mathcal{K}}_{\mu\beta}^*) \right\} \quad (45)$$

Bajo la asunción de fisuras internas a la celda unitaria, sobre la frontera Γ_μ se tiene una equivalencia directa entre el desplazamiento fluctuante regular y el total: $\tilde{\mathbf{u}}_\mu|_{\Gamma_\mu} \equiv \tilde{\mathbf{u}}_\mu|_{\Gamma_\mu}$. Luego, es posible aplicar la restricción cinemática (44) (y por ende condiciones de borde en la celda unitaria) indistintamente sobre $\tilde{\mathbf{u}}_\mu|_{\Gamma_\mu}$ ó $\mathbf{u}_\mu|_{\Gamma_\mu}$ garantizando igualmente la consistencia del proceso de homogeneización de deformación.

El espacio $\tilde{\mathcal{K}}_\mu^*$ finalmente adoptado para definir el modelo multiescala deberá satisfacer, como mínimo, la expresión (45), esto implica: $\tilde{\mathcal{K}}_\mu \subseteq \tilde{\mathcal{K}}_\mu^*$. Nuevamente es posible recuperar los

modelos tradicionales de homogeneización definidos con anterioridad:

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Taylor} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \tilde{\beta}_\mu \text{ regulares; } \tilde{\mathbf{u}}_\mu = \mathbf{0} \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu ; \tilde{\beta}_\mu|_{\Gamma_{\mu I}^\varphi} = \tilde{\beta}_\mu|_{\Gamma_{\mu II}^\varphi} = \mathbf{0} \right\} \quad (46)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Lin} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \tilde{\beta}_\mu \text{ regulares; } \tilde{\mathbf{u}}_\mu = \mathbf{0} \forall \mathbf{y} \in \Gamma_\mu ; \tilde{\beta}_\mu|_{\Gamma_{\mu I}^\varphi} = \tilde{\beta}_\mu|_{\Gamma_{\mu II}^\varphi} = \mathbf{0} \right\} \quad (47)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Per} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \tilde{\beta}_\mu \text{ regulares; } \tilde{\mathbf{u}}_\mu = \tilde{\mathbf{u}}_\mu \forall \text{ par } \{\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-\} \in \Gamma_\mu ; \tilde{\beta}_\mu|_{\Gamma_{\mu I}^\varphi} = \tilde{\beta}_\mu|_{\Gamma_{\mu II}^\varphi} = \mathbf{0} \right\} \quad (48)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{Uni} \equiv \tilde{\mathcal{K}}_\mu^* = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \tilde{\beta}_\mu \text{ regulares; } \int_{\Gamma_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes^s \boldsymbol{\nu}_\mu d\Gamma = \mathbf{0} ; \tilde{\beta}_\mu|_{\Gamma_{\mu I}^\varphi} = \tilde{\beta}_\mu|_{\Gamma_{\mu II}^\varphi} = \mathbf{0} \right\} \quad (49)$$

El campo de variaciones virtuales cinemáticamente admisibles de desplazamiento mesoscópico $\delta \mathbf{u}_\mu$ y el de velocidades de fluctuaciones $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu$, pueden definirse como sigue:

$$\delta \mathbf{u}_\mu = (\mathbf{u}_\mu^1 - \mathbf{u}_\mu^2) = (\tilde{\mathbf{u}}_\mu^1 - \tilde{\mathbf{u}}_\mu^2) = \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu \equiv \tilde{\mathcal{K}}_\mu \quad (50)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu = (\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu - \mathcal{M}_S \dot{\tilde{\beta}}_\mu) \in \mathcal{V}_\mu \equiv \tilde{\mathcal{K}}_\mu \quad (51)$$

donde $\mathbf{u}_\mu^1 \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu$ y $\mathbf{u}_\mu^2 \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu$, son dos campos arbitrarios de desplazamiento mesoscópico cinemáticamente admisibles. Advuértase además que es posible escribir:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mu \bar{u}} ; \quad \tilde{\beta}_\mu \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mu \beta} \quad (52)$$

$$\delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu \bar{u}} \equiv \tilde{\mathcal{K}}_{\mu \bar{u}} ; \quad \delta \tilde{\beta}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu \beta} \equiv \tilde{\mathcal{K}}_{\mu \beta} \quad (53)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu \bar{u}} \equiv \tilde{\mathcal{K}}_{\mu \bar{u}} ; \quad \dot{\tilde{\beta}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu \beta} \equiv \tilde{\mathcal{K}}_{\mu \beta} \quad (54)$$

Observación 8 En el contexto presente, con fisuras internas a la celda unitaria, éstas no se diferencian conceptualmente de cualquier otra fuente de heterogeneidad que pudiera existir a nivel de la meso-escala, como por ejemplo: poros, inclusiones de partículas de distintos materiales, etc. Resulta razonable entonces la conclusión obtenida en esta sección fundamentada en que no se requieren restricciones cinemáticas adicionales a las mínimas necesarias sobre el desplazamiento fluctuante regular $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ en la frontera Γ_μ , para mantener la consistencia del concepto de homogeneización de deformación.

Observación 9 El hecho que “no surjan restricciones adicionales” sobre el campo salto en desplazamientos fluctuantes $\tilde{\beta}_\mu$ es una consecuencia directa de la definición integral de homogeneización de deformación adoptada (37), la cual se extiende sobre todo el dominio Ω_μ incluyendo la superficie de discontinuidad \mathcal{S} , donde el campo de deformaciones presenta términos no acotados. Generalizar el espacio de deformaciones incluyendo tales términos distribucionales sobre \mathcal{S} permitió aplicar el concepto clásico de homogeneización, sin necesidad de introducir modificaciones especiales.

Observación 10 Cualquier definición alternativa que se postule para homogeneizar deformaciones, diferente a la expresión clásica (37), puede inducir restricciones cinemáticas adicionales que deberán considerarse al momento de formular el problema de valores de contorno de la celda unitaria. O bien, expresado de otra forma, si no se considera la generalización del campo de deformaciones singulares sobre la superficie de discontinuidad, resulta necesario reformular la definición clásica del concepto de homogeneización de deformación (37) para que, en el caso particular de fisuras internas, no surjan restricciones adicionales sobre el campo salto de desplazamientos, como parece razonable esperar.

4.2.2. Principio de Hill-Mandel

En el contexto de análisis presente, el campo tasa de deformaciones cinemáticamente admisible se expresa, según (36), como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\mu(\mathbf{y}, t) &= \nabla_{\mathbf{y}G}^s \dot{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) = \dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) + \dot{\tilde{\epsilon}}_\mu(\mathbf{y}, t) \\ &= \dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\left[\nabla_{\mathbf{y}}^s \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu + \mathcal{M}_S \nabla_{\mathbf{y}}^s \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu - \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu \otimes^s \nabla_{\mathbf{y}} \varphi + \delta_S (\dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu \otimes^s \mathbf{n}) \right]}_{\nabla_{\mathbf{y}G}^s \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu} \end{aligned} \quad (55)$$

Para formular el principio de macro-homogeneidad de Hill-Mandel se introduce como hipótesis adicional del modelo multi-escala en estudio, que la descripción cinemática a nivel de la escala macro *no presenta discontinuidades en desplazamientos*, en consecuencia, el campo de deformaciones macroscópicas permanece acotado. Esta asunción permite escribir la potencia interna macro en forma tradicional: $P_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Luego, la consistencia energética entre ambas escalas se mantiene sí y sólo sí la siguiente identidad se satisface para todo campo tasa de desplazamiento mesoscópico fluctuante regular ($\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu$) y velocidad de salto ($\dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu$), cinemáticamente admisibles:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\mu \, d\Omega \quad ; \quad \forall (\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu, \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu) \in (\mathcal{V}_{\mu\bar{u}} \times \mathcal{V}_{\mu\beta}) \quad (56)$$

Observación 11 *Adviértase que se utiliza la misma expresión para introducir el principio variacional de Hill-Mandel, definida previamente mediante la igualdad (28), aun cuando existen discontinuidades en la celda unitaria. Esto es viable dado que se se acepta como marco teórico subyacente la “Aproximación por Discontinuidades Fuertes del Continuo” en donde, como se vió, es posible conservar la estructura típica de un problema continuo postulando la existencia de un estado de tensión consistente (acotado, regularizado) y un estado de deformación singular (no acotado), sobre la superficie de discontinuidad S. Alternativamente, si se adoptara una metodología basada en modelos cohesivos clásicos para gobernar la respuesta de la fisura, el principio de Hill-Mandel adquiere la forma:*

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu \setminus S} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\mu \, d\Omega + \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_S \mathcal{T} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} \, dS \quad ; \quad \forall (\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu, \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu) \in (\mathcal{V}_{\mu\bar{u}} \times \mathcal{V}_{\mu\beta}) \quad (57)$$

donde $\Omega_\mu \setminus S$ representa el dominio de la celda unitaria con deformaciones acotadas o regulares (excluyendo la superficie de discontinuidad S).

El problema ahora radica en determinar qué restricciones energéticas impone el principio variacional de Macro-Homogeneidad de Hill-Mandel. Para ello es necesario trabajar algebraicamente sobre la expresión (56). Considerando la ecuación recientemente introducida para la tasa de deformación mesoscópica (55) y la definición de homogeneización de tensión (14), la igualdad (56) se reescribe de la forma:

$$0 = \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}G}^s \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega = \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}}^s \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega + \int_{\Omega_\mu^\varphi} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}G}^s (\mathcal{M}_S \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu) \, d\Omega \quad ; \quad \forall \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu \quad (58)$$

o bien mediante el sistema de ecuaciones independientes:

$$0 = \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}}^s \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega \quad ; \quad \forall \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu\bar{u}} \quad (59)$$

$$0 = \int_{\Omega_\mu^\varphi} \left[\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_\mu : (\mathcal{M}_S \nabla_{\mathbf{y}}^s \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu)}_{T_1} - \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_\mu : (\dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu \otimes^s \nabla_{\mathbf{y}} \varphi)}_{T_2} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_\mu : (\dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu \otimes^s \delta_S \mathbf{n})}_{T_3} \right] d\Omega \quad ; \quad \forall \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu\beta} \quad (60)$$

Integrando por partes (59) (según (96)), reemplazando $\delta\bar{\mathbf{u}}_\mu$ por $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_\mu$, y considerando el equilibrio en el dominio regular ($\Omega_\mu \setminus \mathcal{S}$) de la meso-escala ($\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\mu = \mathbf{b}_\mu$), se demuestra que la igualdad (59) se satisface sí y sólo sí:

$$\int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}_\mu \cdot \delta\bar{\mathbf{u}}_\mu \, d\Gamma - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{b}_\mu \cdot \delta\bar{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega = 0 \quad ; \quad \forall \delta\bar{\mathbf{u}}_\mu \equiv \delta\bar{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu\bar{u}} \tag{61}$$

es decir, el campo de tracciones (\mathbf{t}_μ) actuando en la frontera de la celda unitaria y las fuerzas de volumen (\mathbf{b}_μ) no generan trabajo sobre las variaciones cinemáticamente admisibles de desplazamiento mesoscópico regular $\delta\bar{\mathbf{u}}_\mu$: $\mathbf{t}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu\bar{u}}^\perp$, $\mathbf{b}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu\bar{u}}^\perp$.

La expresión (60) puede analizarse tras un desarrollo adicional de cada uno de los términos indicados. De esta forma, mediante operatoria algebraica es posible escribir:

$$\begin{aligned} T_1 : \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \mathcal{M}_S \nabla_{\mathbf{y}}^s \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \, d\Omega &= \int_{\Omega_{\mu+}^\varphi} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}} \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \, d\Omega - \int_{\Omega_{\mu+}^\varphi} \varphi (\boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}} \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu) \, d\Omega \\ &= \int_{\mathcal{S}_+} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \mathbf{n}_+ \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \, d\mathcal{S} - \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_\mu^+ \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \, d\mathcal{S} \\ &\quad - \int_{\Omega_{\mu+}^\varphi} \underbrace{\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\mu}_{\mathbf{b}_\mu} \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \, d\Omega - \int_{\Omega_{\mu+}^\varphi} \varphi (\boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}} \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu) \, d\Omega \end{aligned} \tag{62}$$

en donde puede observarse que se ha reemplazado $\delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu$ por $\dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_\mu$, dado que ambas funciones pertenecen al mismo espacio vectorial: $\mathcal{V}_{\mu\beta} \equiv \tilde{\mathcal{K}}_{\mu\beta}$. La ecuación resultante (62) se obtiene considerando: la definición y soporte compacto de la función \mathcal{M}_S , la identidad tensorial (96), la condición de fisura interna (ver igualdad (35)) y el equilibrio fuerte en el soporte compacto de la celda unitaria: $\mathbf{b}_\mu = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\mu$; $\forall \mathbf{y} \in \Omega_{\mu+}^\varphi$. Nótese además que: $\boldsymbol{\sigma}_\mu^+ = \boldsymbol{\sigma}_\mu|_{\mathbf{y} \in \Omega_{\mu+}^\varphi}$ para todo punto \mathbf{y} muy próximo a \mathcal{S} .

El aporte dado por la contribución T_2 puede también manipularse matemáticamente y expresarse como:

$$\begin{aligned} T_2 : - \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : (\delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \otimes^s \nabla_{\mathbf{y}} \varphi) \, d\Omega &= - \int_{\Omega_{\mu+}^\varphi} \boldsymbol{\sigma}_\mu : (\delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \otimes \nabla_{\mathbf{y}} \varphi) \, d\Omega \tag{63} \\ &= - \int_{\Omega_{\mu+}^\varphi} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\varphi \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}_\mu) + \varphi [(\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\mu) \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu + \boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}} \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu] \, d\Omega \\ &= - \int_{\mathcal{S}_+} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \mathbf{n}_+ \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \varphi [[\boldsymbol{\sigma}_\mu]] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \, d\mathcal{S} \\ &\quad + \int_{\Omega_{\mu+}^\varphi} \varphi (\boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}} \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu) \, d\Omega + \int_{\Omega_{\mu+}^\varphi} \varphi \underbrace{(\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\mu)}_{\mathbf{b}_\mu} \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \, d\Omega \end{aligned} \tag{64}$$

a partir de la definición de la función φ (ver ecuación (7)) con soporte compacto $\Omega_{\mu+}^\varphi$, la identidad tensorial (97), el concepto de fisura interna y admitiendo que $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ puede ser discontinuo a través de \mathcal{S} . Precisamente esta última condición introduce el término: $[[\boldsymbol{\sigma}_\mu]] = (\boldsymbol{\sigma}_\mu^+ - \boldsymbol{\sigma}_\mu^-)$, donde $\boldsymbol{\sigma}_\mu^+$ y $\boldsymbol{\sigma}_\mu^-$ representa el estado de tensión valuado en puntos sobre $\Omega_{\mu+}^\varphi$ y $\Omega_{\mu-}^\varphi$, muy próximos a \mathcal{S} , respectivamente.

Finalmente, el término T_3 se evalúa en forma trivial aplicando la propiedad de la distribución delta de Dirac y el hecho que $\boldsymbol{\sigma}_S$ es una magnitud acotada:

$$T_3 : \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : (\delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \otimes^s \delta_S \mathbf{n}) \, d\Omega = \int_{\mathcal{S}} \overbrace{\boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n}}^{\mathcal{T}} \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \, d\mathcal{S} \tag{65}$$

Compilando las expresiones finales de T_1 , T_2 y T_3 , la igualdad (60) implica necesariamente:

$$0 = \int_{\Omega_\mu^\varphi} \mathbf{b}_\mu \cdot (\mathcal{M}_S \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu) d\Omega + \int_S \varphi [[\boldsymbol{\sigma}_\mu]] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu dS + \int_S (\boldsymbol{\sigma}_S - \boldsymbol{\sigma}_\mu^+) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu dS \quad ; \quad \forall \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu\beta} \quad (66)$$

y dado que la variación cinemáticamente admisible del salto fluctuante $\delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu$ no posee restricciones sobre Ω_μ^φ ni sobre \mathcal{S} , la condición (66) equivale a que se satisfaga:

$$\mathbf{b}_u \equiv \mathbf{0} \quad ; \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu^\varphi \quad (67)$$

$$[[\boldsymbol{\sigma}_\mu]] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad ; \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S} \quad (68)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_S - \boldsymbol{\sigma}_\mu^+) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad ; \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S} \quad (69)$$

4.2.3. Problema de valores de contorno

Para formular el problema de valores de contorno en la celda unitaria (con fisuras internas) se introduce el principio de trabajos virtuales. El mismo puede enunciarse como sigue: dado un campo predefinido de deformación macroscópica $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$, encontrar el campo de desplazamiento mesoscópico cinemáticamente admisible $\mathbf{u}_\mu = (\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu) \in \mathcal{K}_\mu$, o equivalentemente, el campo de desplazamiento fluctuante mesoscópico $\tilde{\mathbf{u}}_\mu = (\tilde{\mathbf{u}}_\mu + \mathcal{M}_S \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu) \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu$, tal que:

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{y}}^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^t : \nabla_{\mathbf{y}}^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu d\Omega - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{b}_\mu \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu d\Omega - \int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}_\mu \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu d\Gamma = 0 \quad ; \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu \quad (70)$$

Considerando la definición del campo de variaciones cinemáticamente admisibles de fluctuaciones $\delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu = (\delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu + \mathcal{M}_S \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu)$, la expresión (70) puede reescribirse:

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}}^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu d\Omega - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{b}_\mu \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu d\Omega - \int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}_\mu \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu d\Gamma = 0 \quad ; \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu\bar{u}} \quad (71)$$

$\xrightarrow{=0 \text{ según Hill-Mandel}} \quad \xrightarrow{=0 \text{ según Hill-Mandel}}$

$$\int_{\Omega_\mu^\varphi} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}}^s (\mathcal{M}_S \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu) d\Omega - \int_{\Omega_\mu^\varphi} \mathbf{b}_\mu \cdot (\mathcal{M}_S \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu) d\Omega = 0 \quad ; \quad \forall \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu\beta} \quad (72)$$

$\xrightarrow{=0 \text{ según Hill-Mandel}}$

Mediante simple inspección de (72), y a partir de las deducciones previas, el problema de valores de contorno en la celda unitara se expresa: dado un campo homogéneo de deformación macro $\boldsymbol{\varepsilon}$, encontrar $\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu$ tal que:

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \nabla_{\mathbf{y}}^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu d\Omega = 0 \quad ; \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu\bar{u}} \quad (73)$$

$$\int_S \varphi [[\boldsymbol{\sigma}_\mu]] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu dS + \int_S (\boldsymbol{\sigma}_S - \boldsymbol{\sigma}_\mu^+) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu dS = 0 \quad ; \quad \forall \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}}_\mu \in \mathcal{V}_{\mu\beta} \quad (74)$$

Observación 12 La ecuación variacional (74) implica: (i) el equilibrio entre la fisura y su entorno y (ii) la continuidad de tracciones a ambos lados de la fisura. Comúnmente, en el contexto de mecánica de falla material, estas expresiones reciben el nombre de condición de continuidad interna y externa de tracciones, respectivamente.

Observación 13 Nuevamente se recuerda que, según la definición de $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$, para resolver (73) aún restan imponer condiciones sobre $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ que eliminen movimientos rígidos.

4.3. Fisuras que alcanzan la frontera de la celda unitaria

Esta situación se muestra esquemáticamente en la Figura 5-(b). Por simplicidad, en el análisis que prosigue se asume que sólo un extremo de la fisura (aquel asociado a $\Gamma_{\mu I}^{\varphi}$) alcanza la frontera de la celda unitaria. La generalización para considerar otras situaciones es directa. Desde el punto de vista teórico estricto, el hecho que una fisura propague hasta alcanzar la frontera de la celda unitaria introduce complejidades adicionales. Como primer punto debe decirse que sobre $\Gamma_{\mu I}^{\varphi}$ debe relajarse la condición intuitiva que se había postulado sobre el campo $\tilde{\beta}_{\mu}$ para fisuras internas (salto nulo). Se tiene ahora: $\tilde{\beta}_{\mu}|_{\Gamma_{\mu I}^{\varphi}} \neq \mathbf{0}$ y $\tilde{\beta}_{\mu}|_{\Gamma_{\mu II}^{\varphi}} = \mathbf{0}$, con lo cual varias de las deducciones previas dejan de ser estrictamente correctas, debiendo considerar términos integrales que incorporen la contribución no nula sobre la frontera $\Gamma_{\mu I}^{\varphi}$.

Por ejemplo puede demostrarse que, a partir de los desarrollos elaborados en la sub-sección (4.2.1), para garantizar el proceso de homogeneización de deformación es necesario satisfacer la expresión siguiente:

$$\mathbf{0} = \int_{\Gamma_{\mu}} \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \otimes^s \boldsymbol{\nu} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\mu I}^{\varphi}} \mathcal{M}_S \tilde{\beta}_{\mu} \otimes^s \boldsymbol{\nu} d\Gamma = \int_{\Gamma_{\mu}} \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \otimes^s \boldsymbol{\nu} d\Gamma \quad (75)$$

esto implica una restricción cinemática acoplada entre las fluctuaciones regulares $\tilde{\mathbf{u}}_{\mu}$ y los saltos fluctuantes $\tilde{\beta}_{\mu}$.

Como se mencionó anteriormente, fuera del soporte compacto Ω_{μ}^{φ} , el campo de fluctuaciones totales $\tilde{\mathbf{u}}_{\mu}$ y regulares $\tilde{\mathbf{u}}_{\mu}$ coinciden. Esto quiere decir que el aporte cinemático que incorpora el salto $\tilde{\beta}_{\mu}$ ya está considerado en la definición intrínseca del campo fluctuante regular $\tilde{\mathbf{u}}_{\mu}$, fuera del soporte Ω_{μ}^{φ} . Esta afirmación aplica incluso para la frontera de la celda unitaria. Es decir, el campo $\tilde{\mathbf{u}}_{\mu}|_{\Gamma_{\mu}} \equiv \tilde{\mathbf{u}}_{\mu}|_{\Gamma_{\mu}}$ excepto para la pequeña porción $\Gamma_{\mu I}^{\varphi}$. Luego, el primer término integral en la ecuación (75) tiene en cuenta la activación del salto en la toda la frontera Γ_{μ} , excepto claro en la porción $\Gamma_{\mu I}^{\varphi}$.

Si comparamos ambos términos integrales de la ecuación (75), asociados a $\tilde{\mathbf{u}}_{\mu}$ y $\tilde{\beta}_{\mu}$ respectivamente, se aprecia claramente que a medida que el soporte compacto Ω_{μ}^{φ} decrece en su tamaño, también lo hace $\Gamma_{\mu I}^{\varphi}$ y, por ende, el término integral asociado a $\tilde{\beta}_{\mu}$ tiende a decrecer (dado que no existen componentes no acotadas en su integrando), mientras que la contribución por $\tilde{\mathbf{u}}_{\mu}$ conserva el mismo orden de magnitud. En definitiva este simple argumento permite justificar una simplificación que introducimos en el modelo, la cual consiste simplemente despreciar las contribuciones integrales asociadas a la frontera $\Gamma_{\mu I}^{\varphi}$. Desde el punto de vista numérico, esta asunción también tiene sentido, dado que a medida que se refina el nivel de discretización de la malla de elementos finitos, el soporte compacto numérico (la banda de elementos finitos atravesados por la discontinuidad) decrece y los términos integrales en cuestión toman valores despreciables frente a los restantes que involucran toda la frontera de la celda unitaria (que evidentemente no varía con la densidad de elementos). No obstante, en un futuro, resta encarar un estudio detallado sobre la validez y consistencia de la simplificación introducida.

En definitiva, en el modelo propuesto en este trabajo, la formulación conceptual y las condiciones de borde a aplicar en la meso-escala son idénticas independientemente si las fisuras alcanzan la frontera de la celda unitaria o son interiores. El modelo puede formularse íntegramente aplicando restricciones cinemáticas sobre el campo de fluctuaciones regulares $\tilde{\mathbf{u}}_{\mu}$, como es estándar en problemas que involucran propagación de fisuras.

5. IMPLEMENTACIÓN GENERAL DE LAS CONDICIONES DE BORDE

El desarrollo siguiente se basa en la implementación de un modelo 2D de elementos finitos (EF) triangulares formulado en *fluctuaciones de desplazamientos*, para la celda unitaria. El elemento admite la activación de una fisura (discontinuidad fuerte) mediante un grado de libertad adicional ($\hat{\beta}_\mu$) interno al elemento, por lo cual el salto de desplazamiento no aparece en forma explícita en la formulación (Sancho et al., 2005). Dado que el soporte compacto para el modo enriquecido es el propio elemento finito, los desplazamientos fluctuantes regulares en los nodos de la malla coinciden con los desplazamientos fluctuantes totales en los nodos: $\hat{\mathbf{u}}_\mu \equiv \hat{\mathbf{u}}_\mu$. Por tal motivo, de aquí en adelante el vector de fluctuaciones en desplazamientos incógnitas nodales se denota simplemente: $\hat{\mathbf{u}}_\mu$. Note que se utiliza el símbolo ($\hat{\bullet}$) para representar valores nodales.

Para mayor interpretación de las ideas a tratar en este apartado, se introduce un particionamiento de los grados de libertad, considerando aquellos restringidos cinemáticamente $\hat{\mathbf{u}}_{\mu R}$ y aquellos sin restricción (libres) $\hat{\mathbf{u}}_{\mu S}$, tal que: $\hat{\mathbf{u}}_\mu = [\hat{\mathbf{u}}_{\mu R} \quad \hat{\mathbf{u}}_{\mu S}]^T$. Así mismo el vector de grados de libertad restringidos se sub-divide considerando las posibles condiciones de contorno: (i) mínima restricción por homogeneización $\hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^h$, (ii) periodicidad $\hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^p$, y (iii) valores impuestos (constantes) de fluctuación $\hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^c$. De esta forma se tiene: $\hat{\mathbf{u}}_{\mu R} = [\hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^h \quad \hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^p \quad \hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^c]^T$. El procedimiento general propuesto para el tratamiento de las condiciones de borde se basa en un proceso de condensación directa.

En primera instancia se introduce la aproximación clásica por elementos finitos para la fluctuación de desplazamiento mesoscópico: $\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) \approx \mathbf{N}(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t)$, donde $\mathbf{N}(\mathbf{y})$ representa la matriz global de funciones de forma de la discretización, valuada en el punto \mathbf{y} .

Considerando la interpolación por EF, la ecuación de homogeneización de deformación (43) se transforma en una condición de borde lineal sobre los nodos de la frontera Γ_μ :

$$\int_{\Gamma_\mu} \mathbf{N}(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{u}}_\mu \otimes^s \boldsymbol{\nu} d\Gamma = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}_\mu|_{\Gamma_\mu} = \mathbf{0} \quad (76)$$

donde \mathbf{H} es la matriz de restricciones por homogeneización (Giusti et al., 2009) y $\hat{\mathbf{u}}_\mu|_{\Gamma_\mu}$ es el vector de desplazamientos nodales en la frontera de la celda unitaria. Para el caso 2D, la ecuación (76) impone 3 restricciones lineales independientes, relacionando 3 grados de libertad de frontera (aquí llamados $\hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^h \in \hat{\mathbf{u}}_{\mu R}$) con los restantes grados de libertad de frontera.

La condición de periodicidad general implementada en este trabajo puede vincular una lista de grados de libertad asociados a los “nodos” de la malla (a los cuales denominamos $\hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^p \in \hat{\mathbf{u}}_{\mu R}$), con el desplazamiento de una lista de “puntos” arbitrarios en el dominio (no necesariamente nodos de la malla, con lo cual se requiere una interpolación consistente). Matemáticamente esta condición de borde puede escribirse:

$$\mathbb{I} \hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^p - \mathbb{P} \hat{\mathbf{u}}_\mu = \mathbf{0} \quad (77)$$

siendo \mathbb{I} la matriz identidad y \mathbb{P} una matriz, muy simple de obtener, que permite asignar a cada grado de libertad restringido por periodicidad, el desplazamiento (interpolado) en un punto especificado del dominio (de coordenada genérica \mathbf{y}) con el cual se establece la restricción de movimiento.

Valores prefijados de fluctuaciones de desplazamiento mesoscópico (c^c), asociados a los grados de libertad $\hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^c \in \hat{\mathbf{u}}_{\mu R}$, pueden incorporarse en forma tradicional:

$$\mathbb{I} \hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^c = c^c \quad (78)$$

Este tipo de condición de contorno se utiliza generalmente para recuperar el modelo multi-escala *Lineal* o bien para eliminar modos rígidos de deformación en los otros modelos multi-escalas (*Periódico, Mínima Restricción*).

Todas las condiciones de borde tratadas pueden interpretarse como restricciones cinemáticas lineales sobre el campo $\hat{\mathbf{u}}_\mu$. Este hecho posibilita compilar todas ellas en una única expresión:

$$\mathbf{C} \hat{\mathbf{u}}_\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{RR} & \mathbf{C}_{RS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\mu R} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\mu S} \end{bmatrix} = \mathbf{c} \quad (79)$$

Expandiendo el vector de grados de libertad restringidos según los distintos tipos de condiciones consideradas, se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{RR}^{pc} & \mathbb{I} & \mathbf{C}_{RR}^{ph} & \mathbf{C}_{RS}^p \\ \mathbf{C}_{RR}^{hc} & \mathbf{C}_{RR}^{hp} & \mathbf{C}_{RR}^{hh} & \mathbf{C}_{RS}^h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^c \\ \hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^p \\ \hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^h \\ \hat{\mathbf{u}}_{\mu S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^c \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (80)$$

5.1. Resolución del sistema

A partir de la expresión (79) pueden obtenerse los grados de libertad restringidos en términos de los grados de libertad sin restricción:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mu R} = \mathbf{C}_{RR}^{-1} \mathbf{c} + \mathbf{C}_{RR}^{-1} \mathbf{C}_{RS} \hat{\mathbf{u}}_{\mu S} = \mathbf{d} + \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}_{\mu S} \quad (81)$$

en donde se ha definido: $\mathbf{d} = \mathbf{C}_{RR}^{-1} \mathbf{c}$, $\mathbf{L} = \mathbf{C}_{RR}^{-1} \mathbf{C}_{RS}$. Para que la matriz \mathbf{C}_{RR} sea invertible se deben seleccionar en forma adecuada los grados de libertad restringidos de tipo $\hat{\mathbf{u}}_{\mu R}^h$.

De esta forma, el espacio discreto de solución $\tilde{\mathcal{K}}_\mu^d$ (el supra-índice “d” implica discreto) y el espacio discreto de variaciones cinemáticamente admisibles \mathcal{V}_μ^d , quedan definidos mediante:

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^d \equiv \left\{ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_R \end{bmatrix}, \text{ tal que: } \mathbf{u}_R = \mathbf{d} + \mathbf{L} \mathbf{u}_S \right\} \subseteq \tilde{\mathcal{K}}_\mu^d \subseteq \tilde{\mathcal{K}}_\mu \quad (82)$$

$$\mathcal{V}_\mu^d \equiv \left\{ \delta \mathbf{u} = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \text{ tal que: } \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu^d \right\} \quad (83)$$

Observación 14 Note que la diferencia entre $\tilde{\mathcal{K}}_\mu^d$ y $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ viene dada porque en $\tilde{\mathcal{K}}_\mu^d$ están consideradas las restricciones mínimas necesarias para eliminar el movimiento rígido.

Finalmente, para resolver el problema no lineal de equilibrio formulado en fluctuaciones de desplazamiento mesoscópico a nivel de la celda unitaria, es posible plantear el siguiente sistema de ecuaciones asociado una iteración típica “k” en el esquema iterativo de Newton:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{Re}_R \\ \mathbf{Re}_S \end{bmatrix} \right\}^{(k-1)} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RS} \\ \mathbf{K}_{SR} & \mathbf{K}_{SS} \end{bmatrix}^{(k-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \Delta \hat{\mathbf{u}}_{\mu S} \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}_{\mu S} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L} \delta \hat{\mathbf{u}}_{\mu S} \\ \delta \hat{\mathbf{u}}_{\mu S} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad ; \quad \forall \delta \hat{\mathbf{u}}_{\mu S} \quad (84)$$

$$(\mathbf{K}_{SS} + \mathbf{K}_{SR} \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{K}_{RS} + \mathbf{L}^T \mathbf{K}_{RR} \mathbf{L})^{(k-1)} \Delta \hat{\mathbf{u}}_{\mu S}^{(k)} = - [\mathbf{Re}_S + \mathbf{L}^T \mathbf{Re}_R]^{(k-1)} \quad (85)$$

donde \mathbf{Re} representa el vector residuo discreto y $\mathbf{K} = \partial \mathbf{Re} / \partial \hat{\mathbf{u}}_\mu$ es el jacobiano del sistema.

6. EJEMPLO DE APLICACIÓN

En esta sección, se presenta un problema de celda unitaria heterogénea 1D con generación de fisuras. Si bien el ejemplo es simple desde el punto de vista práctico, resulta, a nuestro entender, valioso desde el punto de vista teórico-académico, por varios motivos, a saber:

- Es posible obtener soluciones analíticas tanto para los campos mesoscópicos como para las variables homogeneizadas, hecho que posibilita validar los resultados obtenidos numéricamente.
- Para este test en particular, dicha solución analítica es la misma para el modelo *Lineal*, *Periódico* o de *Mínima Restricción Cinemática*, situación que favorece la verificación de todas las condiciones de bordes implementadas en el modelo numérico.
- Dado que se utiliza un modelo 2D de elementos finitos representando el caso 1D en estudio, para resolver consistentemente el problema es necesario imponer condiciones de borde de distinto tipo en forma simultánea. Se muestra así la potencialidad del procedimiento general propuesto en la sección (5).
- Para el modelo numérico 2D, la fisura alcanza la frontera de la celda unitaria. No obstante dada la simplicidad del problema, la hipótesis simplificativa introducida en la sub-sección (4.3) no tiene implicancia.

En la parte superior de la Figura 6 se muestra el esquema conceptual 1D para cada modelo multi-escala en estudio y su correspondiente versión numérica-discreta (en la parte inferior) con las condiciones de borde consistentes. En la misma figura, mediante línea de trazos se simboliza una condición de borde periódica, indicando además con qué grado de libertad se vincula tal restricción. La condición de mínima restricción se visualiza mediante una línea llena. Los símbolos restantes implican condiciones de borde homogéneas estándar. Puede observarse que, para representar el problema 1D en forma consistente, en el modelo numérico 2D los nodos centrales poseen condiciones de periodicidad en todos los casos, combinadas con otros tipos de condiciones de borde. Por razones obvias, en esta sección todas las variables se consideran como escalares.

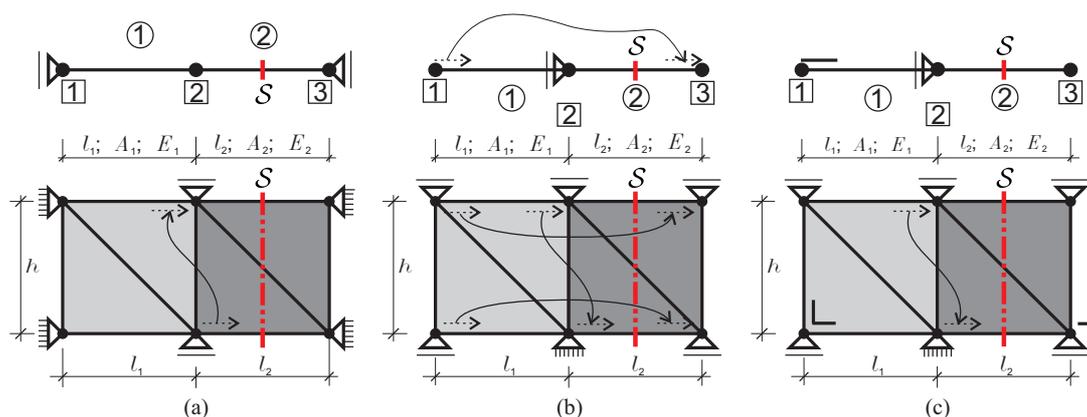


Figura 6: Celda unitaria heterogénea 1D con generación de fisura: esquema conceptual 1D y su equivalente numérico en 2D. (a) Modelo Lineal. (b) Modelo Periódico. (c) Modelo con restricción cinemática mínima.

El problema consiste en aplicar a la celda unitaria una historia de deformación macro monótona creciente de tracción ε , pre-establecida. La barra N°1 tiene un comportamiento lineal elástico mientras que el elemento N°2 posee un comportamiento lineal elástico sólo hasta alcanzar un valor de tensión límite del material, aquí denominada tensión última “ t_u ”. A partir de

	E [Kg/cm ²]	h (altura) [cm]	l (longitud) [cm]	e (espesor) [cm]	A (area) [cm ²]	G_f [Kg/cm]	t_u [Kg/cm ²]
Barra N°1	2,00e5	5,00	5,00	1,00	5,00	—	—
Barra N°2	3,00e5	5,00	5,00	1,00	5,00	0,10	25,00

Tabla 1: Propiedades geométricas y mecánicas de los materiales (véase Figura 6).

allí, dicho elemento activa una fisura, es decir una descripción cinemática con discontinuidades fuertes, cuya respuesta constitutiva viene dada por una relación cohesiva tracción-salto lineal con ablandamiento (modelo de daño) dada por la ecuación:

$$\mathcal{T} = \left[1 - \frac{\chi}{s_m} \right] t_u \frac{\tilde{\beta}_\mu}{\chi} \quad ; \quad s_m = \frac{2G_f}{t_u} \quad ; \quad \chi = \max(|\tilde{\beta}_\mu|) \quad (86)$$

donde G_f es la energía de fractura. En definitiva ambos elementos poseen una respuesta constitutiva diferente (diferentes materiales). En la Tabla 1 se muestran las propiedades geométricas y mecánicas adoptadas para ambos materiales.

6.1. Solución analítica

Por simplicidad, la solución analítica del problema se plantea a partir del modelo multi-escala *Lineal*, con lo cual la condición de homogeneización de deformación se impone en forma trivial. No obstante, por simple razonamiento se deduce que, para el caso particular en estudio, las soluciones asociadas a los modelos *Periódico* y *Mínima Restricción* son equivalentes. Se consideran dos regímenes diferentes. Durante la primera etapa de deformación macro aplicada ($\varepsilon < \varepsilon_f$), ambos elementos de la celda unitaria se comportan en forma elástica, con lo cual no es viable el desarrollo de fisuras ($\tilde{\beta}_\mu = 0$). Sin embargo dado que la meso-escala es intrínsecamente heterogénea ($E_1 \neq E_2$) existe un valor no nulo de fluctuación de desplazamiento regular ($\tilde{u}_\mu \neq 0$). En este contexto las ecuaciones a plantear son las siguientes: (i) equilibrio entre las dos barras, (ii) compatibilidad de desplazamiento fluctuante del nodo interno, (iii) respuesta constitutiva de cada barra (elasticidad). Tras varios pasos algebraicos es posible obtener:

$$\tilde{u}_\mu(\varepsilon) = \frac{(A_2 E_2 - A_1 E_1)}{\frac{A_1 E_1}{l_1} + \frac{A_2 E_2}{l_2}} \varepsilon \quad ; \quad \text{para } \varepsilon < \varepsilon_f \quad ; \quad \varepsilon_f = \frac{t_u}{E_2} \frac{l_2 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} l_1}{l_1 + l_2} \quad (87)$$

donde ε_f es la deformación para la cual se activa y comienza a evolucionar la fisura. A partir del campo de fluctuaciones en desplazamiento regular \tilde{u}_μ , pueden obtenerse todas las restantes variables mesoscópicas. La respuesta homogeneizada de tensión en la micro-celda también puede obtenerse en forma analítica mediante:

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \left[\int_{\Omega_{\mu 1}} \sigma_{\mu 1} d\Omega + \int_{\Omega_{\mu 2}} \sigma_{\mu 2} d\Omega \right] = \overbrace{\frac{(l_1 + l_2)}{\frac{A_1 l_1 + A_2 l_2}{l_1 + l_2} \left[\frac{l_1}{A_1 E_1} + \frac{l_2}{A_2 E_2} \right]}}^{C^{hom} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}} \varepsilon \quad ; \quad \text{para } \varepsilon < \varepsilon_f \quad (88)$$

Cuando la deformación macro aplicada ε supera el valor umbral ε_f las ecuaciones a tener en cuenta son las siguientes: (i) equilibrio entre las dos barras, (ii) compatibilidad de desplazamiento fluctuante del nodo interno considerando ahora la activación del salto $\tilde{\beta}_\mu$, (iii) respuesta constitutiva de cada material (elasticidad y daño para la barra N°1 y N°2, respectivamente) y (iv) equilibrio entre la fuerza cohesiva en la fisura y su entorno. Luego de varias operaciones

matemáticas es posible escribir las expresiones analíticas para este caso:

$$\tilde{u}_\mu = \frac{[A_1 E_1 E_2 \frac{s_m}{t_u} + (A_2 E_2 - A_1 E_1) l_2] \varepsilon - A_2 E_2 s_m}{A_2 E_2 + A_1 E_1 \frac{l_2 - E_2 \frac{s_m}{t_u}}{l_1}} ; \text{ para } \varepsilon > \varepsilon_f \quad (89)$$

$$\tilde{\beta}_\mu = \frac{A_1 E_1 E_2 (l_1 + l_2) \frac{s_m}{t_u} \varepsilon - (A_2 E_2 l_1 + A_1 E_1 l_2) s_m}{A_1 E_1 E_2 \frac{s_m}{t_u} - (A_2 E_2 l_1 + A_1 E_1 l_2)} ; \text{ para } \varepsilon > \varepsilon_f \quad (90)$$

$$\sigma = \frac{(l_1 + l_2) \varepsilon - s_m}{\frac{A_1 l_1 + A_2 l_2}{l_1 + l_2} \left[\frac{l_1}{A_1 E_1} + \frac{l_2 - E_2 \frac{s_m}{t_u}}{A_2 E_2} \right]} ; \text{ para } \varepsilon > \varepsilon_f \quad (91)$$

Un aspecto interesante a destacar si comparamos las ecuaciones (88) y (91) es que, en la primera de ellas, un escalamiento proporcional de las longitudes de cada una de las barras (l_1 y l_2) no tiene influencia alguna en la magnitud de la tensión homogeneizada obtenida, como parece razonable esperar. Sin embargo, una vez activada la fisura y analizando la expresión (91), se observa que el mismo razonamiento no es aplicable, variando la respuesta homogeneizada de tensión conforme el tamaño de la micro-celda (véase además la Figura 7-(izq)). Este hecho es conocido como *efecto tamaño* en el contexto de la mecánica de fractura y pone de manifiesto la falencia del concepto de *tamaño representativo* de la celda unitaria, al menos para el proceso de homogeneización tradicional. En realidad esta característica es propia del fenómeno de *localización de deformaciones*, independientemente de su origen, sea por inestabilidad material (como el caso presente) o geométrica.

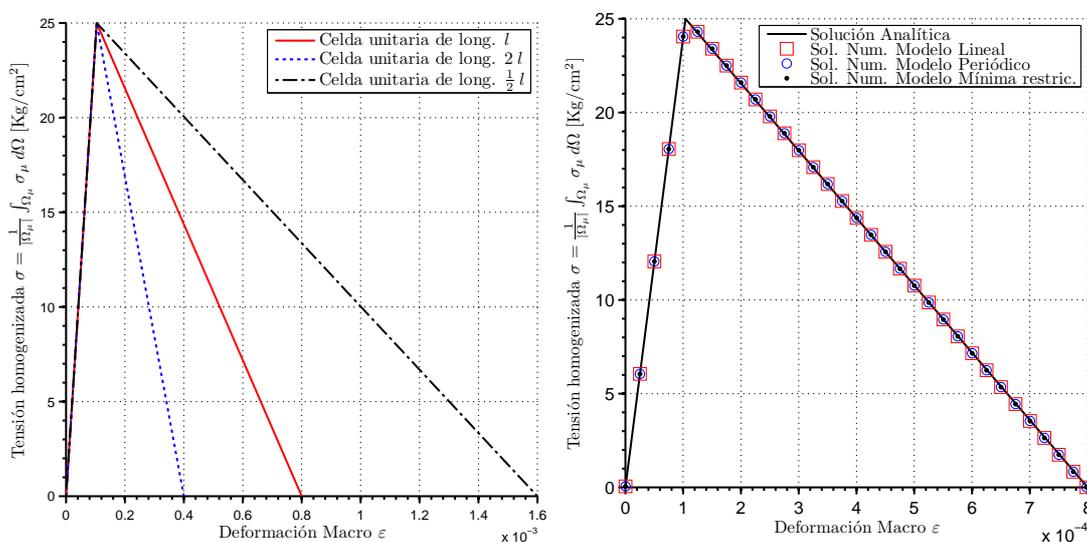


Figura 7: Tensión homogeneizada en la celda unitaria. (a) Efecto tamaño dependiente de la longitud absoluta de la celda unitaria. (b) Solución analítica vs. solución numérica

6.2. Solución numérica

El modelo numérico de elementos finitos 2D implementado, junto con el procedimiento general para gerenciar las condiciones de borde en la meso-escala (Sección 5), se utilizó para resolver el problema 1D en estudio. Se consideraron diferentes tipos de restricciones con la intención de recuperar, independientemente, el modelo multi-escala *Lineal* (Figura 6-(a)), *Periódico* (Figura 6-(b)) y de *Mínima Restricción* (Figura 6-(c)). Las propiedades geométricas y mecánicas adoptadas para definir cada modelo numérico son las indicadas en la Tabla 1.

Puede observarse una absoluta correspondencia entre las soluciones analíticas y las simulaciones, tanto para la respuesta homogeneizada en tensiones de la celda unitaria (ver Figura 7-(der)), como así también para los campos mesoscópicos de desplazamiento fluctuante regular \bar{u}_μ y salto fluctuante en desplazamientos $\bar{\beta}_\mu$ (ver Figura 8). Nótese así mismo que como el problema es inicialmente heterogéneo, el campo \bar{u}_μ comienza a evolucionar desde el principio, mientras que el salto $\bar{\beta}_\mu$ sólo una vez que la deformación macro supera el valor crítico ε_f . En dicho instante el desplazamiento fluctuante regular \bar{u}_μ cambia bruscamente su tendencia.

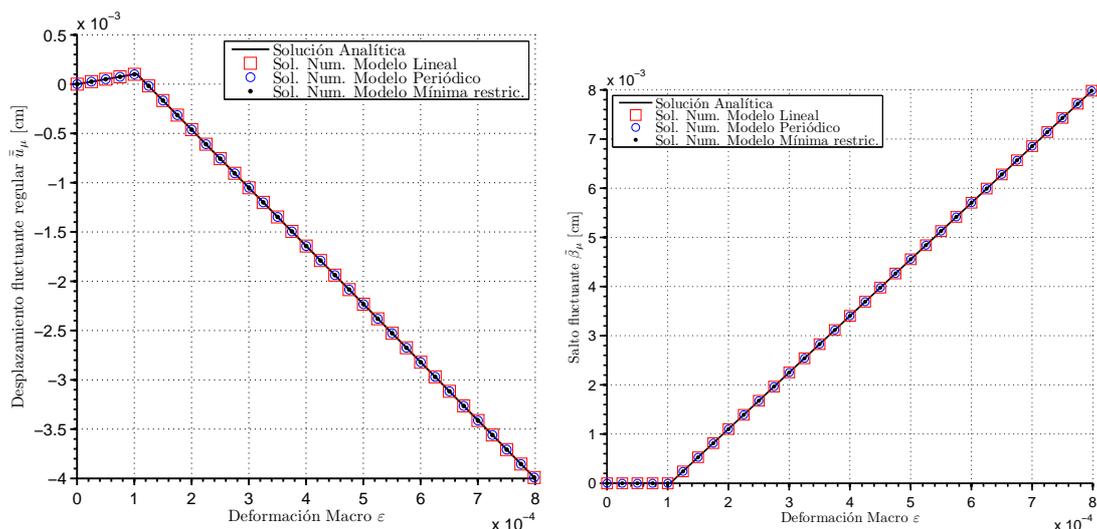


Figura 8: Solución analítica vs. solución numérica para distintos modelos multi-escalas. (a) Fluctuación de desplazamiento mesoscópico regular (\bar{u}_μ). (b) Fluctuación en saltos de desplazamientos ($\bar{\beta}_\mu$).

7. CONCLUSIONES

En el trabajo presente se ha encarado un estudio sobre los fundamentos cinemáticos y variacionales de formulaciones multi-escalas para materiales cuasi-frágiles heterogéneos. Como aporte novedoso, se postularon las ideas conceptuales de un modelo multi-escala específico, en el cual resulta viable la nucleación y propagación de múltiples fisuras a nivel de la celda unitaria. Desde el punto de vista numérico se ha formulado un modelo de elementos finitos con discontinuidades fuertes embebidas juntamente con un procedimiento general para gestionar condiciones de borde compatibles con la formulación multi-escala subyacente. Así mismo, se ha propuesto un ejemplo simple 1D de celda unitaria heterogénea, sobre el cual hemos obtenido soluciones analíticas tanto para los campos mesoscópicos como para magnitudes homogeneizadas. La solución analítica resulta ser la misma para el modelo multi-escala *Lineal*, *Periódico* o de *Mínima Restricción Cinemática*. El modelo numérico propuesto recupera en forma exacta tales soluciones analíticas, para los tres modelos multi-escalas mencionados.

Puede advertirse que en toda la extensión de este trabajo, se ha utilizado el concepto de *Celda Unitaria* y no el de *Volumen Representativo Elemental (VRE)*. La definición precisa de *VRE* en el contexto de materiales que experimentan inestabilidad y falla localizada es un aspecto que requiere un análisis adicional y, de hecho, un tema abierto a discusión en la actualidad. Éste y otros puntos importantes de la formulación motivan las líneas de trabajo futuro.

AGRADECIMIENTOS

Los tres primeros autores quieren expresar su agradecimiento al soporte económico brindado por la ANPCyT a través del proyecto PICT-2008-1228 (jóvenes investigadores), y por el Conicet. Los últimos dos autores agradecen el apoyo económico de las agencias de financiamiento brasileras CNPq y FAPERJ.

ANEXO I: IDENTIDADES TENSORIALES UTILES

A continuación, con el propósito de aportar claridad y auto-contenido al trabajo, se transcriben una serie de identidades tensoriales utilizadas en deducciones previas, a saber:

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot (\nabla \mathbf{v})^T d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) \otimes \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{S}) \otimes \mathbf{v} d\Omega \quad (92)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \otimes^s \boldsymbol{\nu} d\Gamma \quad (93)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \otimes^s \delta_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu} d\Omega = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \otimes^s \boldsymbol{\nu} d\mathcal{S} \quad (94)$$

$$\mathbf{v} \otimes^s \nabla \varphi = \nabla^s (\varphi \mathbf{v}) - \varphi \nabla^s \mathbf{v} \quad (95)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{S} : \nabla \mathbf{v} d\Omega \quad (96)$$

$$\mathbf{S} : (\mathbf{v} \otimes \nabla \varphi) = -\varphi [(\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} : \nabla \mathbf{v}] + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \quad (97)$$

en donde Ω representa un dominio cuya frontera suave por tramos Γ posee normal unitaria exterior $\boldsymbol{\nu}$, \mathcal{S} es una superficie de discontinuidad material incluida en Ω con normal \mathbf{n} , mientras que \mathbf{S} , \mathbf{v} y φ son campos tensoriales, vectoriales y escalares suficientemente suaves, respectivamente (con el término suficientemente suave se hace referencia a campos con un grado de diferenciabilidad tal que las expresiones anteriores conserven sentido matemático).

REFERENCIAS

- Bazant Z. y Planas J. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.
- Belytschko T., Loehnert S., y Song J.H. Multiscale aggregating discontinuities: A method for circumventing loss of material stability. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 73:869–894, 2008.
- Bensoussan A., Lions J., y Papanicolau G. *Asymptotic analysis for periodic microstructures*. North Holland, 1978.
- Christensen R. y Lou K. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27:315–330, 1979.
- de Souza Neto E. y Feijoo R. Variational foundations of multi-scale constitutive models of solids: small and large strain kinematical formulation. In *LNCC Report*. Rio de Janeiro, Brazil, 2006.
- Eshelby J. The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. Lond A*, 241:376–396, 1957.
- Fish J., Yu Q., y Shek K. Computational damage mechanics for composite materials based on mathematical homogenisation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 45:1657–1679, 1999.
- Giusti S., Blanco P., de Souza Neto E., y Feijoo R. An assessment of the gurson yield criterion by a computational multi-scale approach. *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 26(3):281–301, 2009.
- Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29:143–150, 1962.
- Hashin Z. Analysis of composite materials. A survey. *J. Appl. Mech.*, 50:481–505, 1983.
- Hashin Z. y Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11:127–140, 1963.
- Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13:213–222, 1965.
- Hillerborg A., Modeer M., y Petersson P. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and concrete research*, 6(6):163–168, 1976.

- Loehnert S. y Belytschko T. A multiscale projection method for macro/microcrack simulations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 71:1466–1482, 2007.
- Mandel J. *Plasticité Classique at Viscoplasticité. CISIM Lecture Notes*. Springer-Verlag, 1971.
- Michel J., Moulinec H., y Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 172:109–143, 1999.
- Miehe C. y Koch A. Computational micro-to-macro transition of discretized microstructures undergoing small strain. *Arch. Appl. Mech.*, 72:300–317, 2002.
- Miehe C., Schotte J., y Schrder J. Computational micro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. *Computational Materials Science*, 6:372–382, 1999.
- Miehe C., Schroder J., y Becker M. Computational homogenization analysis in finite elasticity: material and structural instabilities on the micro- and macro-scales of periodics composites and their interaction. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 191:4971–5005, 2002.
- Mori T. y Tanaka K. Average stress in the matrix and average energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, 21:571–574, 1973.
- Oliver J. Continuum modelling of strong discontinuities in solids mechanics. In E.H. D.R.J. Owen E Oñate, editor, *Int. Conference on Comput. Plasticity: Fundamentals and Applications, vol 1.*, páginas 455–479. Pineridge Press, CIMNE, Barcelona, España, 1995a.
- Oliver J. Continuum modelling of strong discontinuities in solids mechanics using damage models. *Comput. Mech.*, 17(1-2):49–61, 1995b.
- Oliver J. Modelling strong discontinuities in solids mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. *Int. j. numer. methods eng.*, 39(21):3575–3600, 1996a.
- Planas J. y Elices M. Nonlinear fracture of cohesive material. *Int. J. of Fracture*, 51:139–157, 1992.
- Sanchez-Palencia E. *Non-homogeneous media and vibration theory. Volume 127 on Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- Sancho J., Planas J., Fathy A., Galvez J., y Cendon D. Three-dimensional simulation of concrete fracture using embedded crack elements without enforcing crack path continuity. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, 5:1–9, 2005.
- Sancho J., Planas J., Reyes D.C.E., y Gálvez J. An embedded crack model for finite element analysis of concrete fracture. *Eng. Fract. Mech.*, 74:75–86, 2007.
- Simo J. y Oliver J. A new approach to the analysis and simulation of strong discontinuities. In Z. Bazant, Z. Bittnar, M. Jirásek, y J. Mazars, editores, *Fracture and Damage in Quasi-brittle Structures.*, páginas 25–39. E & FN Spon, 1994.
- Simo J., Oliver J., y Armero F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Comput. Mech.*, 12:277–296, 1993.
- Song J.H. y Belytschko T. Multiscale aggregating discontinuities method for micro-macro failure of composites. *Composites, Part B* 40:417–426, 2009.
- Verhoosel C., Remmers J., Gutierrez M., y de Borst R. Computational homogenization for adhesive and cohesive failure in quasi-brittle solids. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, available on line www.interscience.wiley.com/DOI:10.1002/nme.2854, 2010.
- Willis J. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Adv. Appl. Mech.*, 21:1–78, 1981.