

## NUMERICAL SIMULATION OF TWO PHASE FLOW USING HYBRID FRONT-TRACKING AND FOURIER-SPECTRAL METHODS

Mariana Fernandes S. Villela<sup>a</sup>, Felipe Pamplona Mariano<sup>a</sup>, Millena M. Villar<sup>a</sup> e Aristeu da Siveira Neto<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Laboratório de Mecânica dos Fluidos - MFlab, Universidade Federal de Uberlândia, Avenida João Naves de Ávila, 2121 Santa Mônica, Brasil, <http://www.mecanica.ufu.br>*

**Palavras Chave:** two-phase flows, spectral method, Front-tracking method, parasitic currents.

**Resumo.** Numerical simulations and validations of two-phase flows are presented, using the Fourier pseudo-spectral method (FPSM) with a hybrid method front-tracking (FTM) and Front-Capturing (FCM). This new approach was based in IMESPEC method, which couple FPSM with the immersed boundary method (IBM). Results for the simulations through manufactured solutions are presented for code verification, which show the highest accuracy order. Moreover, initial numerical results are presented for the rise of a cylindrical bubble at low Reynolds number and for parasitic currents in a static drop, where the results reach the round-off errors.

## 1 INTRODUÇÃO

O termo escoamento multifásico é utilizado para qualquer escoamento que apresente mais de uma fase ou componente escoando simultaneamente. Esses escoamentos são observados tanto em processos industriais quanto na natureza. Cita-se como exemplos a cavitação de turbinas e bombas hidráulicas, processos de fabricação de papel e plásticos, extração de petróleo, aspersão de líquido no ar como venenos e aerossóis, fluxo de sangue e dispersão de poluentes na atmosfera.

Buscando compreender os mecanismos governantes, muitas vezes é suficiente considerar apenas duas fases escoando (*e.g.*, líquido e gás). As fases podem se arranjar em diversas configurações na tubulação, as quais influenciarão diretamente as características do escoamento. Muitos estudos têm sido realizados ao longo dos anos para mapear os possíveis regimes de acordo com as propriedades e geometria de onde escoam os fluidos e das condições de operação (Unverdi e Tryggvason, 1992; Villar et al., 2010; Cenicerós e Roma, 2004).

Uma das dificuldades encontradas na simulação de escoamentos bifásicos consiste na busca de alta precisão. O uso de metodologias de alta ordem, as quais requer alto custo computacional, permite obter soluções próximas da física que envolve o problema. Outra exigência necessária para simular este tipo de escoamento é devido ao refinamento da malha, pois é preciso capturar os detalhes dos escoamentos, principalmente na região da interface (Villar et al., 2010).

Dentre as metodologias de alta ordem, o método pseudo-espectral de Fourier é bastante utilizado, pois apresenta alta precisão e convergência numérica (Trefethen, 2000), além de ter baixo custo computacional devido ao algoritmo denominado Transformada Rápida de Fourier (FFT) (Cooley e Tukey, 1965).

Para as equações de Navier-Stokes, considerando escoamentos incompressíveis no espaço espectral, é possível utilizar o método da projeção do termo gradiente de pressão (Canuto et al., 2007), levando ao desacoplamento pressão-velocidade sem a necessidade de resolver a equação de Poisson para a pressão.

A maior limitação desta metodologia está nas condições de contorno (Canuto et al., 1988), as quais devem ser periódicas para que o método espectral de Fourier possa ser aplicado. Isso limita a utilização em CFD para alguns tipos de escoamentos, como por exemplo, escoamentos bifásicos, jatos periódicos (Souza, 2005) e turbulência homogênea e isotrópica.

Devido à necessidade de se resolver problemas de escoamentos bifásicos o objetivo do presente trabalho é a simulação numérica bidimensional da ascensão de bolhas utilizando o método pseudo-espectral de Fourier acoplado às metodologias *Front-Tracking* e *Front-Capturing*. Dessa forma tem-se as discretizações das equações do momento pelo método espectral de Fourier e a representação da interface elástica pela metodologia da fronteira-imersa o qual pertence aos métodos denominados *Front-tracking*. Além disso, é necessário definir uma função indicadora para as fases. Logo, utiliza-se aqui uma função distância com sinal ou função Level-set, para avaliar as propriedades físicas. Esta metodologia por sua vez pertence aos métodos *Front-capturing*. Assim, tem-se uma hibridação entre os métodos *Front-tracking* e *Front-capturing*. A aplicação destas metodologias parte-se de um código *in house* já existente no MFlab (Mariano et al., 2010), o qual utiliza a metodologia denominada IMERSPEC, contendo o método pseudo-espectral de Fourier e o método da fronteira-imersa para a representação de interfaces rígidas.

Para a validação e verificação desta metodologia, são mostrados resultados do código bidimensional IMERSPEC através de soluções manufaturadas. Após isso, resultados do teste feito com correntes espúrias são apresentados como validação da força interfacial o qual requer a

utilização da função delta de Dirac. Por último, são mostrados resultados da ascensão de uma bolha esférica.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ESCOAMENTOS BIFÁSICOS

### 2.1 Formulação euleriana

A formulação euleriana empregada para descrever a dinâmica do escoamento é modelada pelas equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis e isotérmicos com variação das propriedades físicas em todo domínio de cálculo, ( $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , Fig.1), as quais são dadas pelas Eqs.1 e 2 (White, 1991):

$$\frac{\partial u_l^*}{\partial t} + \frac{\partial u_l^* u_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \right] + (\rho - \rho_0)g_l + f_l, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(u_k^*)}{\partial x_k} = 0. \quad (2)$$

onde  $u^* = \rho u$ ,  $\rho$  e  $\mu$  são respectivamente a massa específica e a viscosidade dinâmica do fluido,  $u_l$  é a componente  $l$  do vetor velocidade,  $p$  é o campo de pressão,  $f_l$  é a componente  $l$  do vetor campo de força externa que atua sobre o escoamento na interface,  $g_l$  é a componente  $l$  da aceleração gravitacional e  $l = 1, 2$ , para problemas bidimensionais.

O termo fonte  $f_l$  permite a comunicação entre as equações de Navier-Stokes e as equações para o movimento da interface. Dessa forma, o termo fonte euleriano é diferente de zero sobre a interface e nulo fora da interface. Este comportamento é representado matematicamente pela função delta de Dirac ( $\delta$ ) (Peskin, 1977). O campo de forças euleriano é dado pela Eq.3:

$$f_l(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma} F_l(\vec{X}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) dx_l, \quad (3)$$

onde  $F_l(\vec{X}, t)$  é a força lagrangiana na direção  $l$  calculada sobre as partículas de fluido que compõem a interface, o vetor  $x_l$  é a posição de uma partícula de fluido no domínio euleriano e o vetor  $X_l$  é a posição de uma partícula de fluido que está sobre a interface (Fig.1).

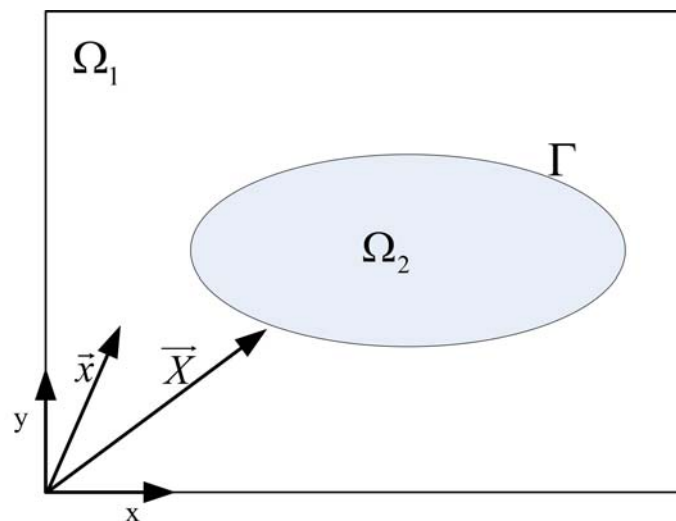


Figura 1: Definição dos vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{X}$ .

O termo  $\rho g_l$  representa as forças de campo, devido à ação da gravidade. Para tratar escoamentos bifásicos com condições periódicas na direção da gravidade é preciso adicionar uma restrição ao termo gravitacional para se evitar uma aceleração uniforme descendente em todo fluido (Esmaeeli e Tryggvason, 1999). Logo o termo gravitacional passa a ser definido pela Eq.4:

$$(\rho - \rho_0)g_l, \quad (4)$$

onde  $\rho_0 = (1 - \alpha)\rho_c + \alpha\rho_d$ ,  $\rho_c$  é a massa específica para a fase contínua ( $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , Fig.1),  $\rho_d$  é a massa específica para a fase dispersa ( $\Gamma$ , Fig.1) do escoamento bifásico e  $\alpha$  é a fração volumétrica entre as fases, ou seja, é fração do volume da fase dispersa ( $\Omega_2$ , Fig.1) pelo volume da fase contínua ( $\Omega_1$ , Fig.1).

Para o cálculo das propriedades físicas da fase contínua, fase dispersa e para a região de transição entre ambas as fases, utiliza-se a função indicadora  $\Psi(\vec{x}, t)$ , a qual é uma função distância e assume valores variando de 0 para fase contínua a 1 para fase dispersa (Eq.5).

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma} n_l(\vec{X}, t)\delta(\vec{x} - \vec{X})dx_l, \quad (5)$$

onde  $n_l(\vec{X}, t)$  é o vetor normal à interface. Com  $\Psi(\vec{x}, t)$  calculada a cada passo no tempo, as propriedades físicas são então obtidas pelas relações dadas pelas Eqs.6 e 7:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_c + (\rho_d - \rho_c)\Psi(\vec{x}, t), \quad (6)$$

$$\mu(\vec{x}, t) = \mu_c + (\mu_d - \mu_c)\Psi(\vec{x}, t), \quad (7)$$

onde  $\mu_c$  e  $\mu_d$  são as viscosidades da fase contínua e dispersa, respectivamente.

## 2.2 Formulação lagrangiana

A densidade da força lagrangiana  $F_l$  devido à presença da interface (Eq.3) é modelada através de um método híbrido *Front-Tracking/Front-Capturing*, ou seja, a interface é implementada de forma explícita utilizando a formulação lagrangiana, mas também é tratada como uma região com variação acentuada de propriedades físicas, o que justifica a utilização da função indicadora.

O método utilizado para acompanhar a interface foi proposto por Unverdi e Tryggvason (1992) baseados na metodologia proposta por Peskin e McQueen (1980). Neste método, a interface é definida por um domínio lagrangiano que se desloca delimitando a fase dispersa, enquanto que a fase contínua é completamente definida no domínio euleriano. As modelagens nesses dois domínios são tratadas separadamente e as interações entre estas diferentes fases são feitas por meio de interpolações. Elas se caracterizam primeiramente pela força superficial resultante, calculada na interface e distribuída para o domínio euleriano, em segundo, pela velocidade do fluido, calculada no domínio euleriano e interpolada para o domínio lagrangiano. Por último, é feito o cálculo da nova posição da interface e é feito a atualização das propriedades do fluido.

O cálculo da força lagrangiana (Unverdi e Tryggvason, 1992) depende dos parâmetros geométricos da interface e do par de fluidos e é representado pela Eq.8:

$$F_l(\vec{X}) = \sigma K n_l(\vec{X}, t), \quad (8)$$

onde  $\sigma$  é o coeficiente da tensão interfacial [ $N/m$ ] e  $K$  é a curvatura [ $1/m$ ].

Quando a interface se movimenta devido à velocidade do fluido ou devido à ação da gravidade, a nova posição da interface pode ser calculada pela Eq.9:

$$\frac{\partial X_l}{\partial t} = u_l(\vec{X}, t). \quad (9)$$

### 2.3 Acoplamento Euleriano-Lagrangiano

O meio de comunicação entre os domínios lagrangianos e eulerianos é feito através de função distribuição e interpolação. A distribuição da densidade da força interfacial lagrangiana para os pontos eulerianos é feita através da função Delta de Dirac ( $\delta$ ) e é representada pela Eq.3. Esta equação transformada para o espaço espectral de Fourier é dada pela Eq.10:

$$\widehat{f}_l(\vec{k}, t) = \int_{\Omega} e^{-ik_l \cdot x_l} \left[ \int_{\Gamma} F_l(\vec{X}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) dX_l \right] dx_l. \quad (10)$$

Fazendo algumas operações matemáticas e utilizando a definição da função delta de Dirac na Eq.10, obtém-se a Eq.11, a qual é o termo fonte da força euleriana no espaço espectral de Fourier.

$$\widehat{f}_l(\vec{k}, t) = \int_{\Gamma} F_l(\vec{X}, t) e^{-ik_l \cdot X_l} dX_l. \quad (11)$$

A função indicadora (Eq.5) transformada para o espaço espectral de Fourier segue o mesmo procedimento realizado no termo fonte da força euleriana e é dada pela Eq.12.

$$\widehat{\Psi}_l(\vec{k}, t) = \int_{\Gamma} n_l(\vec{X}, t) e^{-ik_l \cdot X_l} dX_l. \quad (12)$$

As Eqs.11 e 12 foram resolvidas numericamente utilizando a Regra do Trapézio (Chapra e Canale, 1985).

A função interpolação da velocidade, denominada função cúbica, foi proposta por Griffith e Peskin (2005) e é dada pelas Eqs.13, 14 e 15.

$$u_l(\vec{x}, t) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{X} - \vec{x}) u_l(\vec{x}, t) dx_l dy_l, \quad (13)$$

$$D_h(\vec{X} - \vec{x}) = \frac{1}{h^2} W_c \left( \frac{X_l - x_l}{h} \right) W_c \left( \frac{Y_l - y_l}{h} \right), \quad (14)$$

$$W_c = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|r| - |r|^2 - \frac{1}{2}|r|^3 & \text{se } 0 \leq |r| < 1 \\ 1 + \frac{11}{6}|r| + |r|^2 - \frac{1}{6}|r|^3 & \text{se } 1 \leq |r| < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq |r|. \end{cases} \quad (15)$$

### 2.4 Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier

Para transformar para o espaço espectral de Fourier (Mariano et al., 2010), as equações de Navier-Stokes e da continuidade para escoamentos incompressíveis com condições de contorno periódicas em todas as direções (Eqs.1 e 2), é necessário utilizar o método da projeção (Silveira-Neto, 2002) para o desacoplamento pressão-velocidade, além da aplicação das propriedades da transformada de Fourier (Briggs e Henson, 1995).

A equação da continuidade (Eq.2) transformada é representada pela, Eq.16:

$$ik_k \widehat{u}_k^* = 0, \quad (16)$$

A partir da Eq.16 e de definições vinda da geometria analítica, define-se um plano  $\pi$  perpendicular ao vetor número de onda  $k_l$ , no qual está contido o vetor  $\widehat{u}_l^*(k_l, t)$  transformado, conforme a Fig .2.

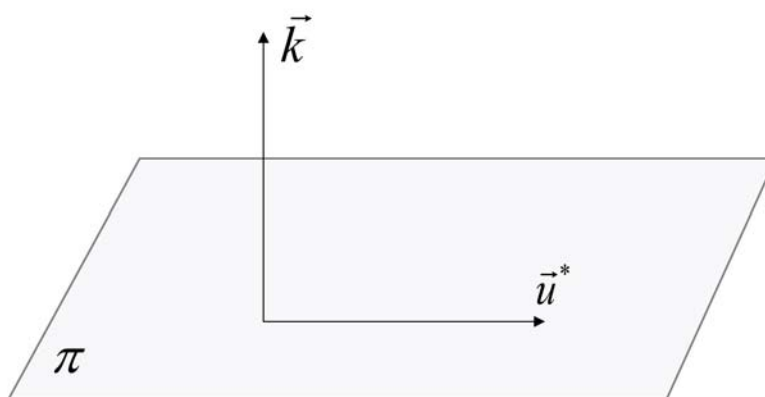


Figura 2: Definição do plano  $\pi$  (SILVEIRA-NETO,2002)

Transformando a Eq.1, tem-se a Eq.17:

$$\frac{\partial \widehat{u}_l^*}{\partial t} + ik_j (\widehat{\partial u_l^* u_j}) = -ik_l \widehat{p} - k^2 [\widehat{\mu u_l}] - k_l k_k \widehat{\mu u_k} + \widehat{f}_l + (\widehat{\rho - \rho_0}) g_l, \quad (17)$$

onde  $k^2$  é a norma ao quadrado do vetor número de onda.

Da Eq.17, pode-se concluir que o termo da taxa de variação da quantidade de movimento linear,  $\frac{\partial \widehat{u}_l^*}{\partial t}$ , está contido no plano  $\pi$ . O gradiente de pressão,  $ik_l \widehat{p}$  é colinear ao vetor número de onda ( $k_l$ ), sendo portanto, ortogonal ao plano  $\pi$ .

O termo advectivo,  $ik_j (\widehat{\partial u_l^* u_j})$ , é a transformação para o espaço espectral de Fourier de um produto entre duas funções, aparecendo um produto de covolução (Briggs e Henson, 1995), e a maneira como foi tratada será apresentada pela seção de modelagem numérica. Dessa forma não se sabe qual é a posição deste termo sobre o plano  $\pi$ , e além disso não se sabe afirmar nada sobre a posição do termo fonte  $\widehat{f}_l$ , do termo difusivo  $-k^2 [\widehat{\mu u_l}] + k_l k_k \widehat{\mu u_k}$  e do termo de empuxo  $(\widehat{\rho - \rho_0}) g_l$ .

Aplicando, então, um operador de projeção sobre esses termos da Eq.17 (Silveira-Neto, 2002), Fig.3, obtém-se as equações de Navier-Stokes no espaço espectral de Fourier, Eq.18.

$$\frac{\partial \widehat{u}_m^*}{\partial t} = \wp_{lm} [\widehat{f}_m - ik_j (\widehat{\partial u_m^* u_j}) - k^2 (\widehat{\mu u_m}) - k_m k_k \widehat{\mu u_k} + (\widehat{\rho - \rho_0}) g_m], \quad (18)$$

Nota-se pela Eq.18 a independência do termo de pressão, o qual foi substituído pela projeção dos termos fonte, advectivo, difusivo e pelo termo de empuxo. Comparando com esquemas

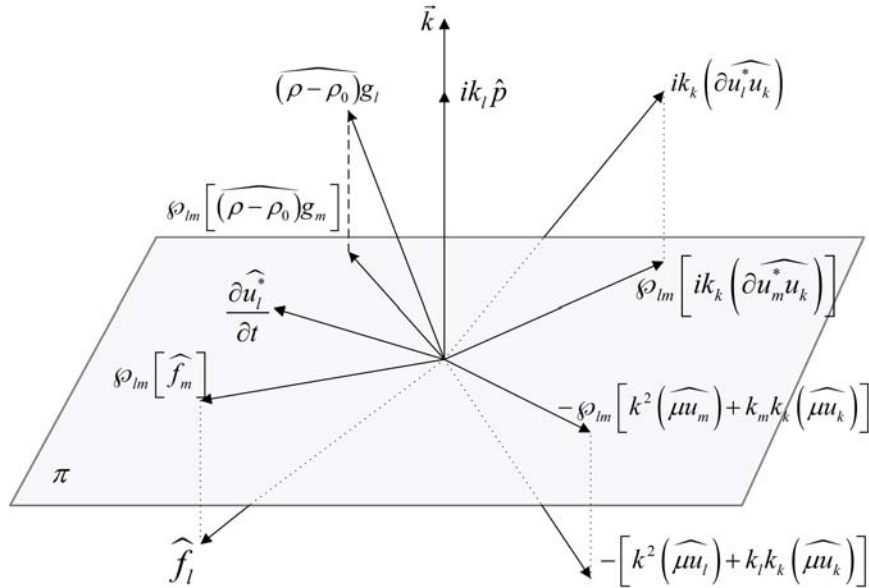


Figura 3: Projeção dos termos fonte, advectivo, difusivo e do termo de empuxo sobre o plano  $\pi$ .

clássicos, esse procedimento equivale substituir a solução de uma equação de Poisson por um produto vetor-matriz que, em termos numéricos, é mais barato. Em termos físico, ambos têm a mesma função, a qual é garantir a conservação de massa.

Apesar do campo de pressão não aparecer nas equações de Navier-Stokes, ele pode ser recuperado para pós-processamento, e, após algumas manipulações matemáticas, o campo de pressão é dado pelas Eqs.19 e 20:

$$\widehat{p}(\vec{k}, t) = \frac{ik_m}{k^2} \left[ -\widehat{f}_m - ik_j (\widehat{\partial u_m^* u_j}) + k^2 (\widehat{\mu u_m}) - k_m k_k \widehat{\mu u_k} - (\widehat{\rho - \rho_0}) g_m \right], \quad (19)$$

de onde,

$$p(\vec{x}, t) = TDIF[\widehat{p}(\vec{k}, t)], \quad (20)$$

onde TDIF é a transformada inversa de Fourier.

### 3 MÉTODO NUMÉRICO

#### 3.1 Transformada Discreta de Fourier e a Transformada Rápida de Fourier

Para trabalhar com a Transformada de Fourier numericamente utiliza-se a Transformada Discreta de Fourier (TDF), dada pela Eq.21.

$$\widehat{f}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{\frac{-2\pi i k n}{N}}, \quad (21)$$

onde  $k$  é o número de onda,  $N$  é o número de pontos da malha,  $n$  fornece a posição  $x_n$  dos nós de colocação ( $x_n = n\Delta x$ ) e  $i = \sqrt{-1}$ .

A TDF transforma uma função  $f$ , periódica (FIGUEIREDO, 2005), do espaço físico para o espaço espectral de Fourier. A Eq.21 é uma aproximação da transformada de Fourier. A Transformada Discreta Inversa de Fourier (TDIF) é apresentada pela Eq.22.

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{f}_n e^{\frac{2\pi i k n}{N}}. \quad (22)$$

Cooley e Tukey (1965) desenvolveram um algoritmo denominado Fast Fourier Transform (FFT), o qual resolve de forma eficiente e precisa a TDF (Eq.21) e a TDIF (Eq.22), o que se torna atrativo resolver equações diferenciais parciais utilizando a metodologia espectral de Fourier. Porém, a desvantagem desta técnica está na restrição para problemas com condições de contorno periódicas.

Os números de onda  $k_l$ , usados nas transformações das equações, são calculados neste trabalho da seguinte maneira (Eq.23):

$$\begin{aligned} k_{l(\eta)} &= \eta - 1 & 1 < \eta < \frac{N}{2} + 1, \\ k_{l(\eta)} &= \eta - 1 - N & \frac{N}{2} + 2 < \eta < N, \end{aligned} \quad (23)$$

onde  $k_l$  é o vetor número de onda,  $N$  é o número de nós de colocação e  $\eta$  é a posição no vetor em uma direção do domínio.

Este parâmetro deve ser adequado para cada subrotina FFT utilizada. Neste caso, a versão de subrotina utilizada é a FFTE de Daiasuke (2004), que pode ser encontrada em <http://www.ffte.jp>.

### 3.2 Tratamento do termo não-linear

Quando se trabalha com a equação de Navier-Stokes utilizando a metodologia espectral de Fourier, a resolução do termo não-linear é dado por uma integral de convolução (Briggs e Henson, 1995). Resolver esta integral se torna numericamente inviável, logo faz-se uso do método pseudo-espectral de Fourier e seu algoritmo básico pode ser encontrado em Mariano (2007).

O termo não-linear pode ser tratado de diferentes formas (Canuto et al., 1988), e, apesar de serem matematicamente idênticas, apresentam diferentes propriedades quando discretizadas. Neste trabalho, está sendo utilizada a forma skew-simétrica (Eq.24), pois é mais estável e apresenta melhores resultados.

$$\frac{\partial(u_i^* u_j)}{\partial x_j}. \quad (24)$$

### 3.3 Discretização Espacial da Força Lagrangiana

Como visto na subseção 2.2, a densidade da força lagrangiana é calculada em função da curvatura da interface ( $K_l$ ) e do vetor normal unitário ( $n_l$ ). As discretizações do vetor  $n_l$  e de  $K_l$  são feitas utilizando os polinômios de Lagrange (Villar et al., 2010).

### 3.4 Avanço Temporal

Diferentes tipos de avanço temporal devem ser analisados, pois é necessário utilizar uma metodologia de avanço no tempo que seja compatível com a alta ordem espacial espectral de



Fourier. Os melhores resultados são obtidos com o método de avanço temporal Runge Kutta otimizado (RK46). Esse é um método de avanço explícito no tempo de quarta ordem e seis estágios. O algoritmo encontra-se em [Berland et al. \(2006\)](#).

### 3.5 Processo de Filtragem

Outro procedimento importante é a necessidade de filtrar todos os termos do lado direito da equação de Navier-Stokes devido às descontinuidades gerados pelo termo forçante, o qual apresenta mudanças bruscas de propriedades físicas. Estas descontinuidades geram o fenômeno de Gibbs ([Navarra, 1994](#)), porém com o uso do filtro estes fenômenos tendem a desaparecer fazendo com que aumente a ordem espectral.

O processo de filtragem é dado pela Eq.25:

$$\widehat{f}(\vec{k}, t)_{filtrado} = \varphi(\theta)\widehat{f}(\vec{k}, t), \quad (25)$$

onde  $\varphi(\theta)$  é a função filtro.

Neste presente trabalho o filtro utilizado é o "Raised Cosine", também conhecido como janela de Von Hann, e, segundo [Canuto et al. \(1988\)](#) este filtro pode ser interpretado como um termo de viscosidade artificial de segunda ordem. Seu modelo matemático pode ser encontrado em [Mariano et al. \(2010\)](#).

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para verificação do código base, o qual utiliza a metodologia híbrida pseudo-espectral de Fourier acoplado com o método da fronteira-imersa, é utilizada uma solução manufaturada. Este método consiste em determinar um termo-fonte a partir de uma dada solução analítica dos campos de velocidade e pressão que satisfazem a equação da continuidade para escoamentos incompressíveis, ou seja, o divergente da velocidade (Eq.26) é nulo,

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (26)$$

No presente trabalho, a seguinte solução manufaturada dada pelas equações Eqs.27, 28 e 29, é porposta:

$$u^a = \text{sen}(x)\text{cos}(y)\text{cos}(2\pi t\mu), \quad (27)$$

$$v^a = \text{cos}(x)\text{sen}(y)\text{cos}(2\pi t\mu), \quad (28)$$

e

$$p^a = \frac{1}{2}\text{cos}^2(2\pi t\mu)(\text{cos}^2(x) + \text{cos}^2(y)), \quad (29)$$

onde,  $u$  e  $v$  são as componentes de velocidades analíticas,  $p$  a pressão analítica,  $t$  é o tempo,  $x$  e  $y$  são as posições do domínio e  $\mu$  é a viscosidade do fluido.

O termo forçante somado às equações de Navier-Stokes é dado pelas Eqs.30 e 31:

$$f^x = -2\pi\mu\text{sen}(x)\text{cos}(y)(\text{sen}(2\pi t\mu) - \text{cos}(2\pi t\mu)), \quad (30)$$

$$f^y = -2\pi\mu\text{sen}(y)\text{cos}(x)(\text{sen}(2\pi t\mu) - \text{cos}(2\pi t\mu)), \quad (31)$$

onde  $f^x$  e  $f^y$  são os termos forçantes a serem somados às equações de Navier-Stokes.

A primeira simulação consiste em resolver as equações de Navier-Stokes com condição inicial dada pelas Eqs. 27, 28 e 29 em  $t = 0$ . As condições de contorno são periódicas em todas as direções. Os parâmetros de referência (Canuto et al., 1988) que regem o problema tem  $L_x = 2\pi(m)$ ,  $L_y = 2\pi(m)$  e  $\mu = \frac{\pi}{10}(Pa/s)$ . Um intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) igual a  $10^{-4}(s)$  é aplicado, com um tempo final de 50 segundos e uma malha cartesiana de  $n_x \times n_y = 128 \times 128$ . Para  $t = 0(s)$  tem-se a visualização do campo de pressão apresentado na Fig.4.

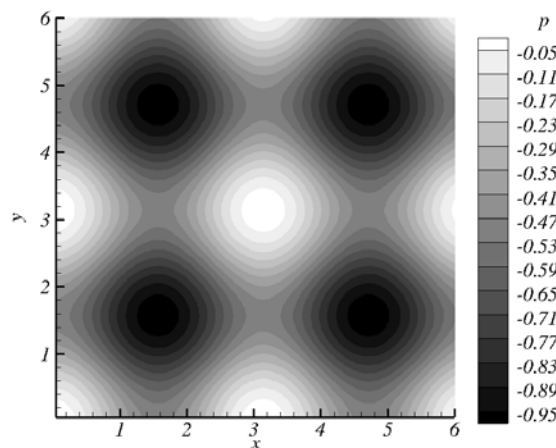


Figura 4: Solução manufaturada- Campo de pressão no instante  $t = 0$  segundos.

O objetivo desta primeira simulação é mostrar a validação do código IMERSPEC, e, para isso os campos de velocidade e pressão são calculados numericamente e comparados com as soluções analíticas (Eqs.27, 28 e 29) em todos os nós de colocação do domínio, através da norma  $L_2$  (Eq.35).

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (u_{ij}^a - u_{ij})^2}{n_x n_y}}, \quad (32)$$

onde  $u$  é a velocidade calculada numericamente,  $u^a$  é a velocidade analítica e  $n_x$  e  $n_y$  são os números de nós de colocação em cada direção.

A evolução do erro na norma  $L_2$  da velocidade horizontal e da pressão ao longo do tempo são mostradas nas Figs.5 (a) e (b), respectivamente.

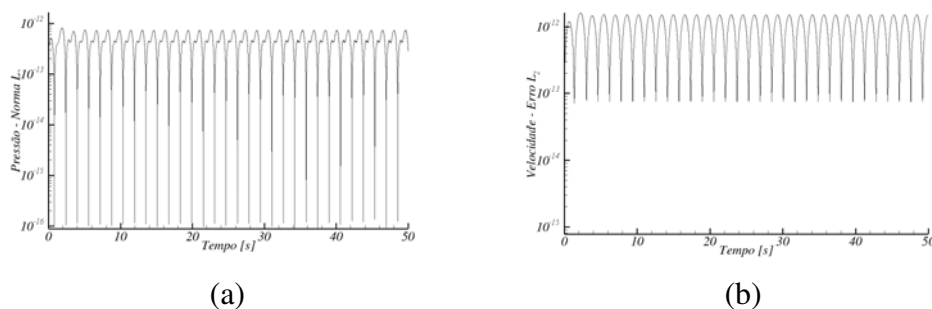


Figura 5: Evolução temporal da norma  $L_2$  do (a) campo de pressão e do (b) campo de velocidade.

A partir da Fig. 5 observa-se a elevada precisão do método pseudo-espectral, sendo que

o maior erro apresentado está na ordem de  $10^{-12}$ . A velocidade vertical apresenta o mesmo comportamento que o da velocidade horizontal em termos de precisão.

#### 4.1 Correntes espúrias

Um teste comum para validar a função distribuição e a função interpolação em escoamentos multifásicos é o método da bolha cilíndrica estática ou correntes espúrias, ou seja, a solução exata é  $u = 0$ . Porém, quando a tensão superficial é elevada, numericamente é introduzida anisotropia em sua representação e, então, velocidades diferentes de zero são geradas, ou seja, há o aparecimento de correntes espúrias, as quais podem afetar a precisão numérica da solução (Lafaurie et al., 1994).

Este escoamento é caracterizado pelo número de Laplace (Eq.33):

$$La = \frac{\sigma \rho D}{\mu^2}, \quad (33)$$

onde  $D = \frac{1}{2}$  é o diâmetro da bolha,  $\rho = \frac{\rho_d}{\rho_c} = 1$  e  $\mu = \frac{\mu_d}{\mu_c} = 1$ .

A medida adimensional da força das correntes espúrias é o número de capilaridade (e.g., veja Eq.34):

$$Ca = \frac{U_{max} \mu}{\sigma}, \quad (34)$$

onde  $U_{max}$  é a magnitude da velocidade máxima da simulação.

O domínio computacional é um quadrado de tamanho  $2D$ , a bolha é localizada no centro do quadrado e as condições de contorno são periódicas. Os pontos lagrangianos, neste teste, são equidistribuídos e a interface da bolha é circular. Os resultados obtidos foram comparados com Villar et al. (2010) e a simulação foi realizada no tempo  $t = 250tc$ , onde  $tc = \frac{\mu D}{\sigma}$  é o tempo característico.

Primeiramente fixou-se a malha em  $32 \times 32$  e variou  $La$  de 1.2 até 12000. Na Tab. 1 mostra-se a magnitude máxima das correntes espúrias ( $Ca$ ) para diferentes  $La$ . No código espectral percebe-se que a magnitude das correntes espúrias é praticamente eliminada com o aumento do número de Laplace, ou seja, a força de corrente espúrias chegou a erro de truncamento na ordem de  $10^{-16}$ , enquanto que nos resultados encontrados em Villar et al. (2010) as correntes espúrias, para o mesmo número de Laplace, é de  $Ca = 7.73 \times 10^{-14}$ .

$La$	$Ca$ (Híbrido, Villar et al. (2010))	$Ca$ (Código espectral)
1.2	$6.81 \times 10^{-9}$	$9.63 \times 10^{-14}$
12	$1.50 \times 10^{-10}$	$1.05 \times 10^{-14}$
120	$2.22 \times 10^{-12}$	$2.03 \times 10^{-15}$
1200	$9.57 \times 10^{-13}$	$1.28 \times 10^{-15}$
12000	$7.73 \times 10^{-14}$	$6.02 \times 10^{-16}$

Tabela 1: Magnitude da corrente espúrias  $Ca$  para uma malha fixa  $32 \times 32$  para diferentes  $La$ .

Na Tab.2 fixou-se o número de Laplace  $La = 12000$  e variou a malha de  $16 \times 16$  até uma malha mais refinada de  $256 \times 256$ . No código espectral percebe-se que a magnitude de correntes espúrias é praticamente eliminada com o aumento da malha, ou seja, a força de corrente espúrias chegou a erro de truncamento na ordem de  $10^{-17}$ , enquanto que nos resultados encontrados em Villar et al. (2010) as correntes espúrias, para a mesma malha, é de  $5.55 \times 10^{-15}$ .

<i>Malha</i>	<i>Ca</i> (Híbrido, Villar et al. (2010))	<i>Ca</i> (Código espectral)
$16 \times 16$	$8.37 \times 10^{-13}$	$9.77 \times 10^{-12}$
$32 \times 32$	$7.73 \times 10^{-14}$	$6.02 \times 10^{-16}$
$64 \times 64$	$3.08 \times 10^{-14}$	$2.62 \times 10^{-17}$
$128 \times 128$	$9.50 \times 10^{-15}$	$1.76 \times 10^{-17}$
$256 \times 256$	$5.55 \times 10^{-15}$	$4.06 \times 10^{-17}$

Tabela 2: Magnitude da corrente espúrias *Ca* para *La* fixo e a malha variável.

O salto de pressão e o campo de velocidade, para este problema, é representado pelas Figs.6 para  $La = 12000$  e uma malha de  $32 \times 32$ .

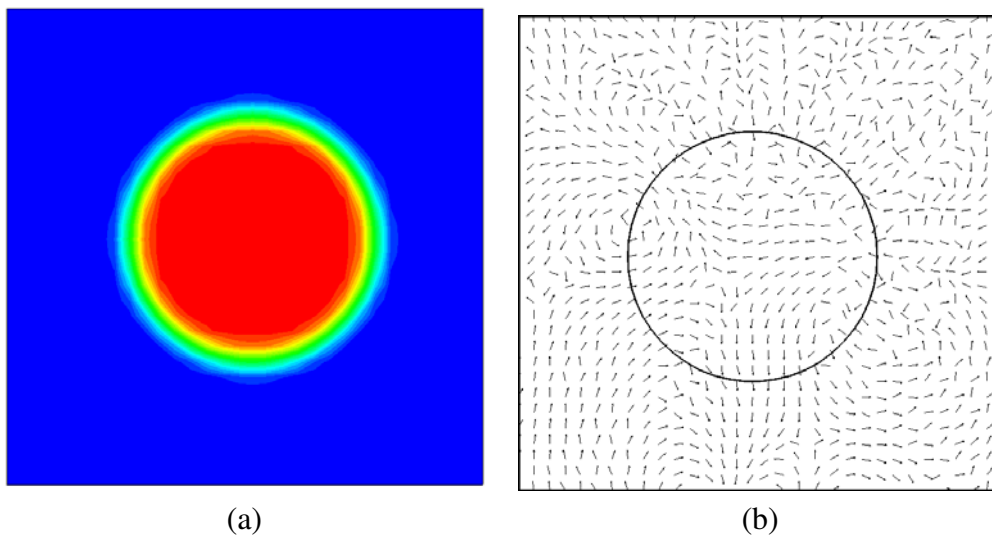


Figura 6: (a) salto de pressão e (b) campo de velocidade.

## 4.2 Ascensão de uma bolha esférica

A ascensão de uma bolha isolada a baixo número de Reynolds foi simulada para  $EO = 1$ ,  $M = 10^{-2}$ ,  $\sigma = 1.0N/m$  e  $D = 0.3m$ . Para esta situação, observa-se que a interface permanece circular ao longo de todo o tempo. Na Fig. 7, visualiza-se o deslocamento da interface circular em função do tempo  $t$  para uma malha  $128 \times 384$  e um domínio  $\Omega = [0; 1] \times [0; 3]$ .

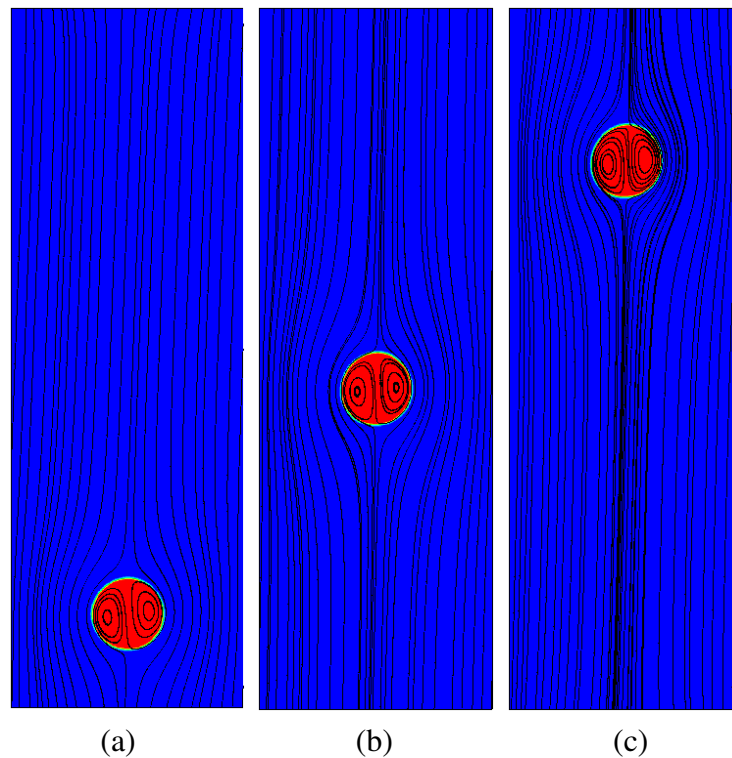


Figura 7: Evolução temporal do campo da função indicadora sobreposto por linhas de correntes. (a)  $t = 0.002s$ . (b)  $t = 8.8s$ . (c)  $t = 12.6s$ .

Na Fig. 7 também pode-se observar as linhas de correntes, onde é notório o aparecimento de recirculações no interior da bolha que têm o mesmo sentido de movimento do fluido externo. O comportamento qualitativo das linhas de correntes é consistente com o que se observa experimentalmente. A Fig. 8 mostra experimentalmente as recirculações no interior de uma bolha (Clift et al., 1978).

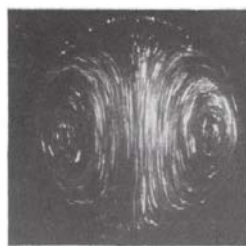


Figura 8: Visualização experimental da recirculação interna de uma bolha ascendente (Clift et al., 1978).

O salto de pressão, Fig. 9, sobre a interface, o qual equilibra a força interfacial que aponta radialmente para o interior da bolha, calculado numericamente para uma malha  $128 \times 384$  atinge valores próximos de  $\Delta p = 6.666031N/m_2$ . O salto de pressão é calculado analiticamente pela Eq. 35, a qual é conhecida como Lei de Young-Laplace. Este salto analítico é de  $\Delta p = 6.66666N/m_2$  o qual implica em um erro de 0.095%, enquanto que (Villar, 2007) e (Lima Silva, 2002) foram obtidos erros de 0.58% e 0.67%, respectivamente.

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{D}. \quad (35)$$

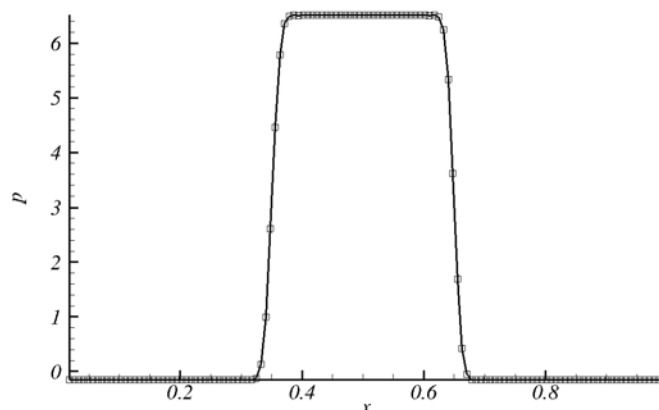


Figura 9: Visualização do salto de pressão através da interface.

Na Fig .10 é mostrado o campo de velocidade vertical. A região vermelha da figura representa a região onde está posicionada a bolha, indicando velocidades positivas devido a recirculações interna existente e devido ao seu movimento ascendente.

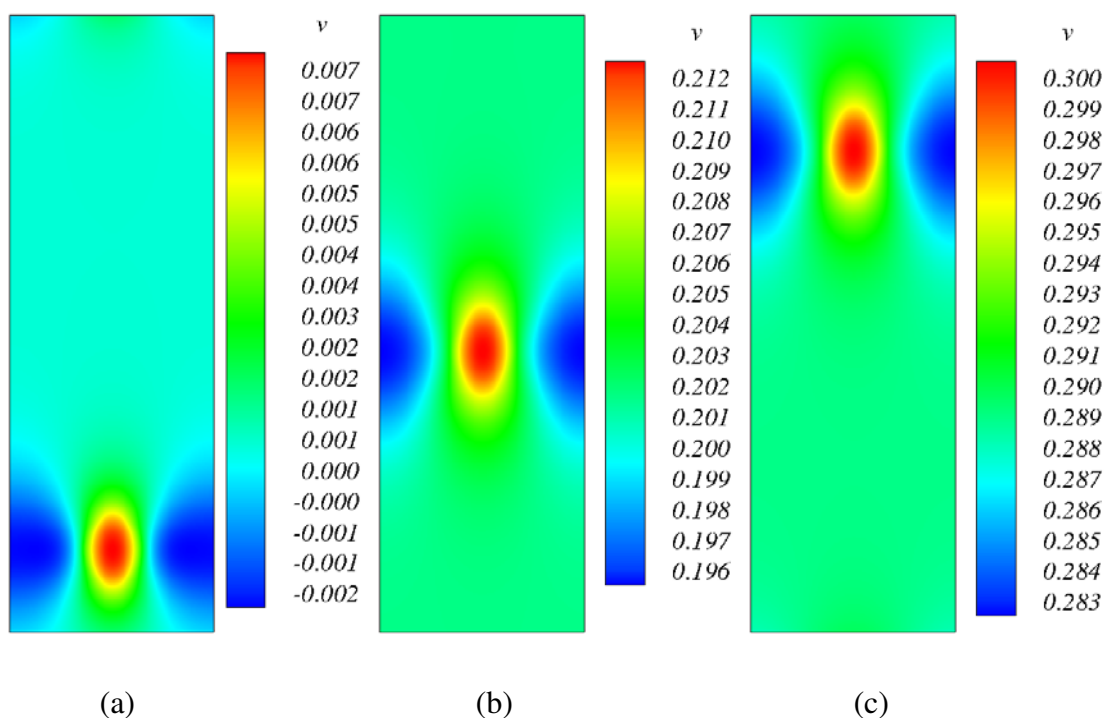


Figura 10: Evolução temporal do campo de velocidade vertical. (a)  $t = 0.002s$ . (b)  $t = 8.8s$ . (c)  $t = 12.6s$ .

## 5 CONCLUSÃO

No presente trabalho, foi apresentado um método computacional utilizando o método pseudo-espectral acoplado com o método híbrido de *Front-Tracking/Front-Capturing* para simular escoamentos bifásicos. A partir dos resultados pode-se concluir que o código IMERSPEC foi verificado, ou seja, apresentou alta precisão quando se compara com uma solução manufaturada. Além disso, com a baixa magnitude da força das correntes espúrias encontrada nas

tabelas (1) e (2), conclui-se que a função indicadora e função distribuição utilizada para a simulação de escoamentos incompressíveis envolvendo a interação entre fluidos com propriedades físicas distintas está validada. Com isso, os resultados preliminares obtidos para ascensão de uma bolha esférica estão qualitativamente coerentes com a física que envolve o problema (Clift et al., 1978).

## REFERÊNCIAS

- Berland J., Bogey C., e Bailly C. Low-dissipation and low-dispersion fourth-order runge-kutta algorithm. *Computers e Fluids*, 35:1459–1463, 2006.
- Briggs W.L. e Henson V.E. *DFT*. Philadelphia: SIAM, 1995.
- Canuto C., Hussaini M., Quarteroni A., e Zang T. *Spectral methods in fluid dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- Canuto C., Hussaini M., Quarteroni A., e Zang T. *Spectral methods: evolution to complex geometries applications to fluid dynamics*. Springer-Verlag/New-York, 2007.
- Ceniceros H.D. e Roma A.M. Study of the long-time dynamics of a viscous vortex sheet with a fully adaptive nonstiff method. *Physics of Fluids*, 16, 2004.
- Chapra S. e Canale R. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill, 1985.
- Clift R., Grace J.R., e Weber M.E. *Bubbles, Drops and Particles*. Academic Press, Inc. (London) Ltd., 1978.
- Cooley T.W. e Tukey J.W. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics Computations*, 19:297–301, 1965.
- Esmaeeli A. e Tryggvason G. Direct numerical simulations of bubbly flows part 2. moderate reynolds number arrays. *Journal of Fluid Mechanics*, 385:325–358, 1999.
- Griffith B.E. e Peskin C.S. On the order of accuracy of the immersed boundary method: Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. *Journal of Computational Physics*, 37:75–105, 2005.
- Lafaurie B., Nardone C., Scardovelli R., Zaleski S., e Zanetti G. Modeling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *Journal of Computational Physics*, 113:134–147, 1994.
- Lima Silva A. *Desenvolvimento e implementação de uma nova metodologia para modelagem de escoamentos sobre geometrias complexas: método da fronteira imersa com modelo físico virtual*. Universidade Federal de Uberlândia-Faculdade de engenharia Mecânica, 2002.
- Mariano F. *Simulação de Escoamentos Não-Periódicos Utilizando as Metodologias Pseudo-Espectral de Fourier e da Fronteira-Imersa*. Universidade Federal de Uberlândia-Faculdade de engenharia Mecânica, 2007.
- Mariano F., Moreira L., Silveira-Neto A., Silva C., e Pereira J. A new incompressible navier-stokes solver combining fourier pseudo-spectral and immersed boundary methods. *Computer Modeling Engineering and Sciences*, 59:181–216, 2010.
- Navarra A. Reduction of the gibbs oscillation in spectral model simulation. *Journal of Climate*, 7:1169–1183, 1994.
- Peskin C.S. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, 25:220, 1977.
- Peskin C.S. e Mcqueen D.M. Modeling prosthetic heart valves for numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, 37, 1980.
- Silveira-Neto A. *Apostila da Disciplina Mecânica dos Fluidos do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Uberlândia*. Uberlândia: UFU, 2002.
- Souza A.M. *Análise numérica da transição à turbulência em escoamentos de jatos circulares*

- livres*. Universidade Federal de Uberlândia-Faculdade de engenharia Mecânica, 2005.
- Trefethen L. *Spectral methods in matlab*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- Unverdi S.O. e Tryggvason G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multifluid flows. *Journal of Computational Physics*, 100:25–37, 1992.
- Villar M. *Ánalyse numérica fina de escoamentos multifásicos bidimensionais*. Universidade Federal de Uberlândia-Faculdade de engenharia Mecânica, 2007.
- Villar M., Cenicerós H., Roma A., e Silveira-Neto A. A robust, fully adaptive hybrid level-set/front-tracking method for two phase flows with an accurate surface tension computation. *Communication in Computer Physics*, 8:51–94, 2010.
- White F.M. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, 1991.