

ELASTOPLASTICIDAD MICROPOLAR DE MICROPLANOS MODELO DE VON MISES Y DRUCKER PRAGER

Marcela Nieto^a, Guillermo Etse^b

^a*Instituto de Materiales, Estructuras y Construcciones. Universidad Nacional de Santiago del Estero, Avda Belgrano (s) 1912, 4200 Santiago del Estero, Argentina, mnieto@unse.edu.ar, <http://www.unse.edu.ar>*

^b*Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería, Universidad Nacional de Tucumán, Avda Roca 1800, 4000 San Miguel de Tucumán, Argentina, getse@herrera.unt.edu.ar, <http://www.unt.edu.ar>*

Keywords: Concrete Modelling. Elastoplastic Model, Micropolar continuous, Microplane level

Abstract. This work aims extend the micropolar theory in the framework of the microplane concept, to include more accurate information on the complex microstructure of engineering materials.

Capable of reproducing experimental results of concrete specimens, the microplane model includes anisotropic response in a natural and conceptually simple and explicit way. Within this paper, the macroscopic constitutive equation derived by kinematically constraining the microplane strains to the macroscopic strain tensor is considered for a microplane-based plasticity to Von Mises and Druker Prager Models. Thereby, the micro plane laws are chosen such that the macroscopic Clausius-Duhem

inequality is fully satisfied. This theoretical framework is considered to derive both elastic and elastoplastic micro polar micro plane models. Furthermore, the localization criterion is analysed, indicating locally the onset of localization in terms of the acoustic tensor. The second condition of localization in Cosserat Continuous will be developed.

Several examples demonstrate the features of the microplane model in predicting the material behavior of concrete.

1 INTRODUCCION

Los materiales cohesivo friccionales muestran una gran diferencia entre sus resistencias de tracción y compresión y una fuerte sensibilidad a la presión lateral. La falla depende fuertemente de los estados tensionales y de propiedades microscópicas. La necesidad de incorporar la microscopía en las descripciones del comportamiento material, surge porque a medida que avanza el conocimiento se continúan encontrando propiedades y características microscópicas que influyen en la respuesta macroscópica

Por lo tanto la modelación de esta falla requiere de formulaciones, si bien macroscópicas, contengan información relevante de las propiedades microscópicas y del estado y variación de estas propiedades durante los procesos de falla.

En este trabajo, la teoría constitutiva micropolar se extiende en el marco general del concepto de microplanos con el fin de obtener ecuaciones constitutivas y modelos que incluyan información más precisa de la compleja microestructura de los materiales ingenieriles. El principal objetivo aquí, es el modelado macroscópico y la descripción del comportamiento de respuesta de materiales anisotrópicos por medio de la conocida teoría de microplanos cuando se aplica en continuos de Cosserat. Un concepto termodinámicamente consistente se considera para derivar la llamada *Teoría micropolar basada en microplanos*.

La teoría de microplanos se caracteriza por tres rasgos principales: por una parte incorpora información microscópica en la formulación material macroscópica de un modo natural. Por otro lado ecuaciones constitutivas simples en el nivel microplano conducen a predicciones muy precisas del comportamiento macroscópico de los materiales.

El tercer aspecto es su capacidad de modelar comportamiento material anisotrópico. Actualmente, este es uno de los objetivos más importantes de la propuesta de Taylor ([Taylor, G.I. 1938](#)) la cual se basa en la definición de relaciones totalmente independientes entre tensiones – deformaciones uniaxiales en algunos planos del material. Como consecuencia se observa una tendencia definida a usar modelos macroscópicos basados en fundamentales aspectos de la estructura microscópica de los materiales. La teoría de microplanos fue introducida por Bazant - Gambarova ([Bazant, Z.P. and Gambarova, P.G. 1984](#)), Bazant ([Bazant, Z.P. 1976](#)), y Bazant - Oh ([Bazant, Z.P. and Oh, B.H. 1985](#)) ([Bazant, Z.P. and Oh, B.H. 1986](#)), sobre la base de la idea original de G. I. Taylor.

La principal suposición de la teoría de microplanos es la relación entre las componentes de deformaciones o tensiones local o microscópica y el correspondiente tensor global o macroscópico. En consecuencia, deben considerarse dos aproximaciones, la restricción estática o la cinemática requiere que las deformaciones o las tensiones sobre cada microplano sean las componentes resueltas de sus contrapartes macroscópicas.

El potencial de la teoría para describir comportamiento de respuesta no lineal de materiales de ingeniería cohesivo friccionales como el hormigón ha sido

extensamente demostrado en las primeras contribuciones de Bazant y coautores, y mas recientemente en trabajos de Bazant y Prat (Bazant, Z.P. and Prat, P.1988) , Carol y Bazant (Carol,I., Bazant, Z.P., Prat, P.1991) (Carol,I., Bazant, Z.P., Prat, P.1992), y otros muchos autores. Recientemente la falta de una aproximación termodinámicamente consistente para derivar formulaciones basadas en microplanos ha sido estudiada por Carol y otros que demostraron que la satisfacción de la segunda ley de la Termodinámica no puede generalmente garantizarse.

Para resolver esta limitación fundamental propusieron un método para derivar formulaciones constitutivas en microplanos dentro de un marco termodinámicamente consistente por medio de la incorporación de la Energía libre de Helmholtz en cada microplano. Este concepto fue extendido exitosamente para el comportamiento material inelástico como en plasticidad y daño por Khul y otros (KULH, E. RAMM, E..1998) (KULH, E. RAMM, E. WILLAM, K.2000) (KULH, E., STEINMAMM, P., CAROL, I.2001). Sin embargo este trabajo así como el previo de Carol y otros (Carol, I., Jirasek, M., Bazant, Z.P.2001) conciernen al continuo clásico de Boltzman (elástico e inelástico)

Aquí la aproximación termodinámicamente consistente para derivar modelos de microplanos se extiende para los continuos micropolares en el espíritu de Cosserat y Cosserat (COSSERAT, E.y F.1909).

La segunda motivación de la teoría micropolar de microplanos es relacionada con la regularización de las predicciones de postpico (de Borst, R. 1991). La incorporación de la longitud característica a nivel microscópico conduce a una relación constitutiva intrínsecamente no local cuando se activan los grados de libertad adicionales del continuo micropolar.

2 TEORÍA DE MICROPLANOS

El comportamiento de respuesta macro mecánico de materiales está controlado por ecuaciones constitutivas de planos característicos o microplanos por medio de restricciones cinemáticas o estáticas, lo que requiere que tanto las tensiones como las deformaciones en cada microplano deben ser derivadas por proyección de su contraparte macroscópica.

2.1 Tensiones y Momentos Tensionales en Microplanos

En el caso de restricción estática los vectores de tensiones y momentos tensionales microscópicos en cada microplano, Figura 1 y Figura 2, se obtienen premultiplicando por los vectores normales del microplano n

$$\bar{t}_\sigma = \sigma \cdot n = \sigma_N \cdot n + \bar{\sigma}_T \quad \bar{t}_\mu = \mu \cdot n = \mu_N \cdot n + \bar{\mu}_T \quad (1)$$

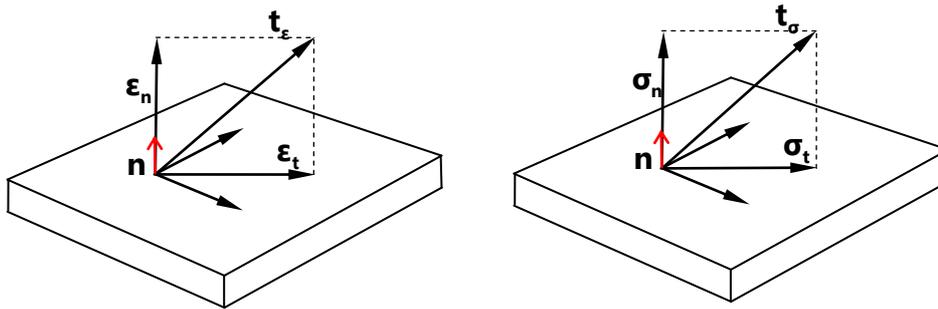


Figura 1: Componentes de tensiones y deformaciones en microplanos

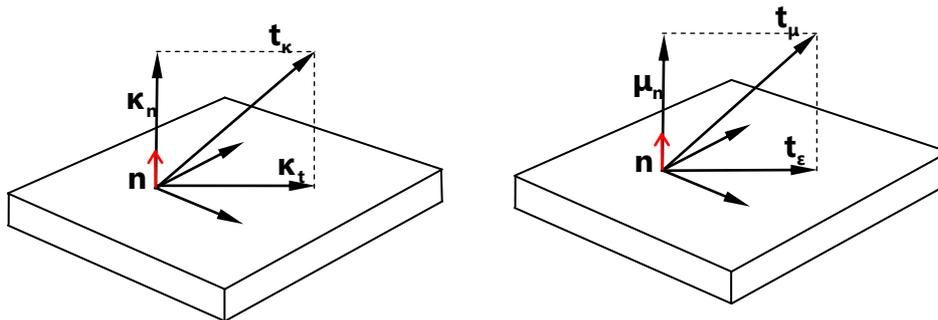


Figura 2: Componentes de momentos tensionales y microrotaciones en microplanos

Las componentes normal y tangencial de las tensiones y momentos tensionales de micro planos se obtienen como proyección de la contraparte macroscópica de acuerdo con las relaciones

$$\bar{\sigma}_N = \mathbf{N} : \boldsymbol{\sigma} \quad \bar{\mu}_N = \mathbf{N} : \boldsymbol{\mu} \quad (2)$$

$$\bar{\sigma}_T = \mathbf{T} : \boldsymbol{\sigma} \quad \bar{\mu}_T = \mathbf{T} : \boldsymbol{\mu} \quad (3)$$

El tensor de proyección de segundo y de tercer orden \mathbf{N} y \mathbf{T} son definidos como

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (4)$$

Con $[\mathbf{I}]_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ el tensor identidad de cuarto orden y \mathbf{n} el vector normal al plano.

Así $\bar{\sigma}_N$ y $\bar{\mu}_N$ representan la tensión normal proyectada y el momento tensional proyectado, respectivamente, mientras $\bar{\sigma}_T$ y $\bar{\mu}_T$ denota el vector de la tensión tangencial y del momento tangencial proyectados. Se debe notar que estas componentes proyectadas de las tensiones y momentos tensionales macroscópicas son en general diferentes de las componentes deducidas de las ecuaciones constitutivas en los microplanos las que serán denotadas a continuación como $\sigma_N, \mu_N, \sigma_T$ y μ_T . Las tensiones y cuplas tensionales normales y tangenciales de micro planos pueden ser descompuestas en partes simétrica y antisimétrica de acuerdo con la estrategia usual de descomposición de continuos Cosserat (Etse G., Nieto M., 2004), (ETSE G., NIETO M., STEINMAN P., CAROSIO A.

2003).

2.2 Deformaciones y Curvaturas en Microplanos

En el caso de restricciones cinemáticas los vectores de deformación y curvatura en cada microplano están dadas por pos multiplicación con el vector normal de cada microplano

$$\mathbf{t}_\epsilon = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n} = \epsilon_N \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\epsilon}_T \quad \mathbf{t}_\kappa = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{n} = \kappa_N \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\kappa}_T \quad (5)$$

Las deformaciones y curvaturas de microplanos tienen entonces, componentes normales y tangenciales La parte simétrica y la antisimétrica de las deformaciones y curvaturas tienen las propiedades

$$\boldsymbol{\epsilon}^{skw} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{skw} \quad \boldsymbol{\kappa}^{skw} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa}^{skw} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{sym} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{sym} \quad \boldsymbol{\kappa}^{sym} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa}^{sym} \quad (7)$$

Y teniendo en cuenta las Ec.(2) y Ec. (3)

$$\epsilon_N = \mathbf{N} : \boldsymbol{\epsilon}^{sym} = \mathbf{N} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym} = \mathbf{T} : \boldsymbol{\epsilon}^{sym} = \mathbf{T}^{sym} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \boldsymbol{\epsilon}_T^{skw} = -\mathbf{T} : \boldsymbol{\epsilon}^{skw} = -\mathbf{T}^{skw} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (9)$$

mientras que las componentes de curvatura correspondientes son

$$\kappa_N = \mathbf{N} : \boldsymbol{\kappa}^{sym} = \mathbf{N} : \boldsymbol{\kappa} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} = \mathbf{T} : \boldsymbol{\kappa}^{sym} = \mathbf{T}^{sym} : \boldsymbol{\kappa} \quad \boldsymbol{\kappa}_T^{skw} = -\mathbf{T} : \boldsymbol{\kappa}^{skw} = -\mathbf{T}^{skw} : \boldsymbol{\kappa} \quad (11)$$

Aquí las componentes simétrica y antisimétrica del tensor de proyección $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{sym} + \mathbf{T}^{skw}$ están definidas

$$\mathbf{T}^{sym} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}^{sym} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad \mathbf{T}^{skw} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}^{skw} \quad (12)$$

$$[\mathbf{I}^{sym}]_{ijkl} = \frac{1}{2}[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}], \quad [\mathbf{I}^{skw}]_{ijkl} = \frac{1}{2}[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}], \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}^{sym} + \mathbf{I}^{skw}.$$

2.3 Elastoplasticidad Micropolar de Microplanos

En esta sección se presenta la formulación termodinámicamente consistente del modelo elastoplástico micropolar de microplanos para el caso general y el modelo tipo Von Mises

El tipo de comportamiento de respuesta elastoplástico del continuo micropolar está caracterizado por la descomposición aditiva del tensor de deformación y curvatura macroscópico total en las componentes elásticas y plásticas

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_e + \boldsymbol{\kappa}_p$$

La suposición de restricción cinemática extiende la aplicabilidad de la descomposición aditiva al nivel microscópico. Como consecuencia, las componentes de deformación y curvatura total en los microplanos pueden ser expresadas como

$$\epsilon_N = \epsilon_{Ne} + \epsilon_{Np} \quad \kappa_N = \kappa_{Ne} + \kappa_{Np} \quad (13)$$

$$\epsilon_T^{sym} = \epsilon_{Te}^{sym} + \epsilon_{Tp}^{sym} \quad \kappa_T^{sym} = \kappa_{Te}^{sym} + \kappa_{Tp}^{sym} \quad (14)$$

$$\epsilon_T^{skw} = \epsilon_{Te}^{skw} + \epsilon_{Tp}^{skw} \quad \kappa_T^{skw} = \kappa_{Te}^{skw} + \kappa_{Tp}^{skw} \quad (15)$$

En el caso mas general el tensor de las variables internas incluye todas las partes plásticas de las componentes de deformación y curvatura las cuales caracterizan el campo cinemático en microplanos

$$\mathbf{q} = \mathbf{q} (\epsilon_{Np}, \epsilon_{Tp}^{sym}, \epsilon_{Tp}^{skw}, \kappa_{Np}, \kappa_{Tp}^{sym}, \kappa_{Tp}^{skw}, \xi^{mic}) \quad (16)$$

donde la variable escalar interna ξ^{mic} tiene en cuenta la respuesta plástica endurecimiento / ablandamiento isotrópico.

La energía libre microscópica obtenida de la definición de la energía libre elástica y de las funciones de energía libre microscópica

$$\Psi^{mic} = W_{Nu} (\epsilon_N - \epsilon_{Np}) + W_{Tu}^{sym} (\epsilon_T^{sym} - \epsilon_{Tp}^{sym}) + W_{Tu}^{skw} (\epsilon_T^{skw} - \epsilon_{Tp}^{skw}) + \quad (17)$$

$$+ W_{N\omega} (\kappa_N - \kappa_{Np}) + W_{T\omega}^{sym} (\kappa_T^{sym} - \kappa_{Tp}^{sym}) + W_{T\omega}^{skw} (\kappa_T^{skw} - \kappa_{Tp}^{skw}) + \int_{\Omega}^{\xi^{mic}} \phi(\xi^{mic}) d\xi^{mic}$$

donde el comportamiento endurecimiento/ablandamiento es tenido en cuenta

por medio del término $\int_{\Omega}^{\xi^{mic}} \phi(\xi^{mic}) d\xi^{mic}$

Las tensiones y cuplas tensionales en el microplano se obtienen de la evaluación de la desigualdad de Clausius – Duhem

$$\sigma_N := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_{Ne}} = \mathbf{E}_{Nu} \cdot \epsilon_{Ne} \quad \sigma_T^{sym} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_{Te}^{sym}} = \mathbf{E}_{Tu}^{sym} \cdot \epsilon_{Te}^{sym} \quad (18)$$

$$\sigma_T^{skw} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_{Te}^{skw}} = \mathbf{E}_{Tu}^{skw} \cdot \epsilon_{Te}^{skw}$$

$$\mu_N := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \kappa_{Ne}} = \mathbf{E}_{N\omega} \cdot \kappa_{Ne} \quad \mu_T^{sym} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \kappa_{Te}^{sym}} = \mathbf{E}_{T\omega}^{sym} \cdot \kappa_{Te}^{sym} \quad (19)$$

$$\mu_T^{skw} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \kappa_{Te}^{skw}} = \mathbf{E}_{T\omega}^{skw} \cdot \kappa_{Te}^{skw}$$

La evolución de las variables internas se restringe a la desigualdad de la disipación microscópica

$$D^{mic} = \sigma_N \dot{\epsilon}_{Np} + \sigma_T^{sym} \dot{\epsilon}_{Tp}^{sym} + \sigma_T^{skw} \dot{\epsilon}_{Tp}^{skw} + \mu_N \dot{\kappa}_{Np} + \quad (20)$$

$$+ \mu_T^{sym} \dot{\kappa}_{Tp}^{sym} + \mu_T^{skw} \dot{\kappa}_{Tp}^{skw} - \phi^{mic} \dot{\xi}^{mic} \geq 0$$

La función de fluencia puede ser definida en la forma

$$\Phi^{mic} = \varphi(\sigma_N, \boldsymbol{\sigma}_T^{sym}, \boldsymbol{\sigma}_T^{skw}, \mu_N, \boldsymbol{\mu}_T^{sym}, \boldsymbol{\mu}_T^{skw}) - \phi^{mic}(\dot{\xi}^{mic}) \leq 0 \quad (21)$$

donde la función φ de las tensiones y momentos tensionales constitutivos microscópicos esta caracterizada por los gradientes

$$\boldsymbol{\nu}_{Nu} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_N} \quad \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{sym} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_T^{sym}} \quad \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{skw} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_T^{skw}} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\nu}_{N\omega} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_N} \quad \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{sym} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\mu}_T^{sym}} \quad \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{skw} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\mu}_T^{skw}} \quad (23)$$

Para el caso de plasticidad asociada las leyes de evolución de las deformaciones y curvaturas plásticas son obtenidas del problema variacional definido por la desigualdad de disipación Ec.(20) bajo la consideración de la condición de convexidad y de la restricción Ec.(21). Para el caso general no asociado se postula que

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{Np} = \dot{\gamma}^{mic} \boldsymbol{\nu}_{Nu} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{Tp}^{sym} = \dot{\gamma}^{mic} \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{sym} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{Tp}^{skw} = \dot{\gamma}^{mic} \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{skw} \quad (24)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{Np} = \dot{\gamma}^{mic} \boldsymbol{\nu}_{N\omega} \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{Tp}^{sym} = \dot{\gamma}^{mic} \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{sym} \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{Tp}^{skw} = \dot{\gamma}^{mic} \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{skw} \quad (25)$$

$$\dot{\xi}^{mic} = \dot{\gamma}^{mic} \quad (26)$$

en términos del *Lagrangeano* o multiplicador plástico γ^{mic} y de los gradientes de potenciales plásticos microscópicos. Las leyes de flujo en cada microplano

$$\boldsymbol{\nu}_{Nu} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_N} \quad \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{sym} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_T^{sym}} \quad \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{skw} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_T^{skw}} \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\nu}_{N\omega} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \mu_N} \quad \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{sym} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\mu}_T^{sym}} \quad \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{skw} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\mu}_T^{skw}} \quad (28)$$

Las condiciones de carga- descarga de Kuhn-Tucker así como la condición de consistencia pueden ser definidas como

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}) \leq 0 \quad \dot{\gamma}^{mic} \geq 0 \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}) \cdot \dot{\gamma}^{mic} = 0 \quad \dot{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}) \cdot \dot{\gamma}^{mic} = 0 \quad (29)$$

Una solución implícita para el multiplicador plástico puede ser obtenida de la condición de consistencia

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^{mic} = & \frac{1}{h} [\boldsymbol{\nu}_{Nu} E_{Nu} \mathbf{N} + \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{sym} \cdot \mathbf{E}_{Tu}^{sym} \cdot \mathbf{T}^{sym} + \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{skw} \cdot \mathbf{E}_{Tu}^{skw} \cdot \mathbf{T}^{skw}] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \\ & + \frac{1}{h} [\boldsymbol{\nu}_{N\omega} E_{N\omega} \mathbf{N} + \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{sym} \cdot \mathbf{E}_{T\omega}^{sym} \cdot \mathbf{T}^{sym} + \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{skw} \cdot \mathbf{E}_{T\omega}^{skw} \cdot \mathbf{T}^{skw}] : \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{aligned} \quad (30)$$

Donde

$$\begin{aligned} h = & H^{mic} + \boldsymbol{\nu}_{Nu} E_{Nu} \boldsymbol{\nu}_{Nu} + \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{sym} \cdot \mathbf{E}_{Tu}^{sym} \cdot \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{sym} - \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{skw} \cdot \mathbf{E}_{Tu}^{skw} \cdot \boldsymbol{\nu}_{Tu}^{skw} + \\ & + \boldsymbol{\nu}_{N\omega} E_{N\omega} \boldsymbol{\nu}_{N\omega} + \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{sym} \cdot \mathbf{E}_{T\omega}^{sym} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{sym} - \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{skw} \cdot \mathbf{E}_{T\omega}^{skw} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T\omega}^{skw} \end{aligned} \quad (31)$$

$$H^{mic} = \frac{\partial \phi(\xi^{mic})}{\partial \xi^{mic}} \quad (32)$$

Las ecuaciones constitutivas macroscópicas elastoplásticas pueden ser expresadas como

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{ep}^{uu} & \mathbf{E}_{ep}^{u\omega} \\ \mathbf{E}_{ep}^{\omega u} & \mathbf{E}_{ep}^{\omega\omega} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Con los operadores elastoplásticos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ep}^{uu} &= \mathbf{E}_0^{uu} - \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\mathbf{n}}_u \otimes \tilde{\mathbf{m}}_u d\Omega & \mathbf{E}_{ep}^{u\omega} &= -\frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\mathbf{n}}_u \otimes \tilde{\mathbf{m}}_{\omega} d\Omega \\ \mathbf{E}_{ep}^{\omega u} &= -\frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\mathbf{n}}_{\omega} \otimes \tilde{\mathbf{m}}_u d\Omega & \mathbf{E}_{ep}^{\omega\omega} &= \mathbf{E}_0^{\omega\omega} - \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\mathbf{n}}_{\omega} \otimes \tilde{\mathbf{m}}_{\omega} d\Omega \end{aligned} \quad (34)$$

Donde los gradientes modificados se definen como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}}_i &= E_{Ni} \boldsymbol{\nu}_{Ni} + \mathbf{T}^{sym} [\mathbf{E}_{Ti}^{sym} \boldsymbol{\nu}_{Ti}^{sym}] - \mathbf{T}^{skw} [\mathbf{E}_{Ti}^{skw} \boldsymbol{\nu}_{Ti}^{skw}] \\ \tilde{\mathbf{m}}_i &= E_{Ni} \boldsymbol{\nu}_{Ni} + \mathbf{T}^{sym} [\mathbf{E}_{Ti}^{sym} \boldsymbol{\nu}_{Ti}^{sym}] - \mathbf{T}^{skw} [\mathbf{E}_{Ti}^{skw} \boldsymbol{\nu}_{Ti}^{skw}] \quad i = u, \omega \end{aligned} \quad (35)$$

El formato resultante del operador tangente elastoplástico micropolar basado en microplanos es bastante similar al del modelo micropolar clásico (WILLAM, A., DIESTSCHE, A., STEINMANN, P. and IORDACHE, M. M. 1995) con excepción de las integrales que tienen en cuenta las contribuciones microscópicas al operador macroscópico en caso de formulación micropolar de microplanos.

2.4 Modelo de Von Mises Elastoplástico de Cosserat Basado en Microplanos

El modelo clásico o macroscópico elastoplástico de von Mises para continuos Cosserat, está caracterizado por la condición de fluencia

$$\Phi^{mac} = \sqrt{3J_2} - \phi^{mac} = 0 \quad \text{con} \quad \phi^{mac} = \bar{\sigma}_y^{mac} + E_p^{mac} \xi^{mac} \quad (36)$$

Siendo el segundo invariante de tensiones

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\mathbf{s}^s : \mathbf{s}^s + \frac{1}{l_c^2} \boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\mu} \right) \quad \text{con} \quad \mathbf{s}^s = \frac{\mathbf{s} + \mathbf{s}^T}{2} \quad \text{y} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{3} \quad (37)$$

El endurecimiento lineal

$$\phi^{mac} = \phi_0^{mac} + H^{mac} \xi^{mac} \quad (38)$$

y la ley de evolución del parámetro de endurecimiento / ablandamiento

$$\dot{\xi}^{mac} = \sqrt{\frac{1}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \frac{1}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p^T + \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\kappa}}_p \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_p} = \dot{\gamma}^{mac} \quad (39)$$

Asumiendo que el segundo invariante del tensor desviador de tensiones es una

función de los vectores tangenciales de tensiones y momentos tensionales de los microplanos, la condición de fluencia de von Mises en el nivel microscópico puede ser expresada en la forma

$$\Phi^{mic} = \sqrt{\sigma_T^{sym} \cdot \sigma_T^{sym} + \sigma_T^{skw} \cdot \sigma_T^{skw} + \frac{1}{l_c^2} \mu_T^{sym} \cdot \mu_T^{sym} + \frac{1}{l_c^2} \mu_T^{skw} \cdot \mu_T^{skw}} - \phi^{mic} \leq 0 \quad (40)$$

Con las tensiones de fluencia con endurecimiento lineal

$$\phi^{mic} = \phi_0^{mic} + H^{mic} \xi^{mic} \quad (41)$$

Los parámetros de endurecimiento/ablandamiento con la ley de evolución

$$\dot{\xi}^{mic} = \sqrt{\frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{Tp}^{sym} \cdot \dot{\epsilon}_{Tp}^{sym} + \dot{\epsilon}_{Tp}^{skw} \cdot \dot{\epsilon}_{Tp}^{skw} + \dot{\kappa}_{Tp}^{sym} \cdot \dot{\kappa}_{Tp}^{sym} + \dot{\kappa}_{Tp}^{skw} \cdot \dot{\kappa}_{Tp}^{skw}} = \dot{\gamma}^{mic} \quad (42)$$

el cual, de forma similar a la descripción macroscópica, coincide con el multiplicador plástico.

2.5 Modelo de Drucker Prager Elastoplástico de Cosserat Basado en Microplanos

El modelo clásico o macroscópico elastoplástico de Drucker Prager para continuos Cosserat, está caracterizado por la condición de fluencia

$$\Phi^{mac} = \alpha^{mac} I_1 + \sqrt{3 \cdot J_2} - \phi^{mac} = 0 \quad \text{con} \quad \phi^{mac} = \bar{\sigma}_y^{mac} + E_p^{mac} \cdot \xi^{mac} \quad (43)$$

donde el primer invariante de tensiones

$$I_1 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} = tr[\boldsymbol{\sigma}] \quad (44)$$

Este Modelo de dos parámetros está caracterizado por el ángulo de fricción α^{mac} y la tensión de fluencia $\bar{\sigma}_y^{mac}$, que puede expresarse en función de las resistencias de tracción y compresión del material

$$\alpha^{mac} = \frac{f_c - f_t}{3} \quad \bar{\sigma}_y^{mac} = \frac{f_c \cdot f_t}{3} \quad (45)$$

3 ANÁLISIS NUMÉRICO

En esta sección analizamos las predicciones del modelo elastoplástico de von Mises y de Drucker Prager para continuos Cosserat basados en microplanos para ensayos de tracción y compresión uniaxial y corte simple, desarrollado en una descomposición en 42 direcciones de microplanos de la esfera representativa del punto material. La **Figura 3** ilustra las condiciones de borde de los ensayos que se realizan en estado plano de deformaciones. Se usaron elementos finitos Standard cuadriláteros bilineales con cuatro puntos de integración.

La formulación de elementos finitos de problemas micropolares se obtiene por

medio de discretizaciones de la forma débil de las ecuaciones de balance conforme al principio variacional de Dirichlet (WILLAM, A., DIESTSCHE, A., STEINMANN, P. and IORDACHE, M. M. 1995). De esa forma, los desplazamientos y rotaciones, y sus variaciones, son aproximados con las mismas funciones de forma de acuerdo con el método Galerkin-Bubnov.

En el ensayo de corte simple, se consideraron restricciones totales de desplazamientos y rotaciones en los nodos localizados en la base del elemento cuadrilátero mientras sólo los desplazamientos verticales se restringen en los otros nodos.

Por otra parte, en el caso de tracción y compresión uniaxial, la restricción total de desplazamiento y rotación ha sido solo considerada en un nodo del elemento como se indica en la Figura 3 mientras sobre otros nodos tienen solo una posibilidad de desplazamiento.

Las rotaciones son restringidas de forma similar al del ensayo de tracción uniaxial de probetas cilíndricas, considerando la doble simetría del problema.

Los parámetros elásticos de Cosserat en microplanos para el análisis numérico se muestran en Tabla 1.

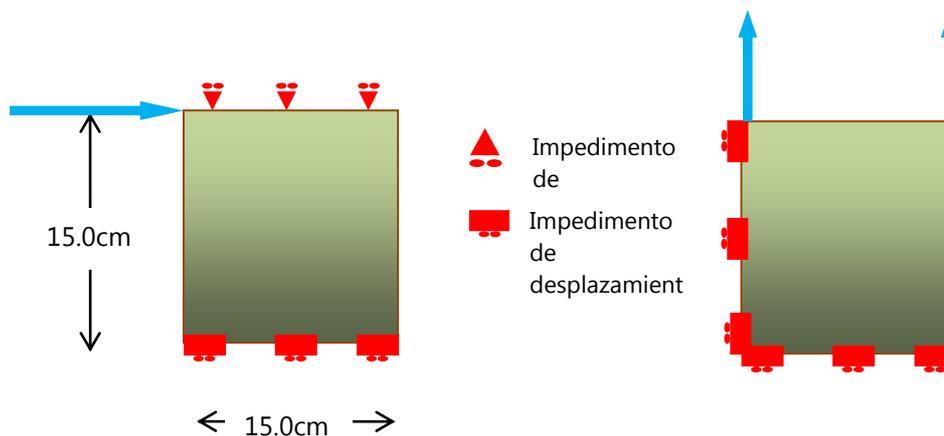


Figura 3: Condiciones de borde. Ensayos de corte simple y tracción simple en deformaciones planas

E	30.000 N/mm^2
ν	0.2
G	12.500 N/mm^2
G_c	6.250 N/mm^2
l_c	15 mm
E_{N_u}	12.500 N/mm^2
$E_{T_u}^{sym}$	21.667 N/mm^2
$E_{T_u}^{skw}$	12.500 N/mm^2
$E_{T_\omega}^{sym}$	12.500 N/mm^2
$E_{T_\omega}^{skw}$	12.500 N/mm^2

Tabla 1. Parámetros Materiales

El campo de tensiones no simétricas en el caso de continuo micropolar y la forma compleja resultante del segundo invariante J_2 impiden desarrollar un procedimiento analítico para obtener la relación entre las tensiones de von Mises y Drucker Prager microscópicas ϕ^{mic} y macroscópicas ϕ^{mac} , respectivamente.

En consecuencia y para el análisis numérico en este trabajo, las tensiones han sido elegidas para obtener similares predicciones de la máxima resistencia tipo J_2 correspondientes a los ensayos de tracción y compresión uniaxial y corte simple, para el modelo micropolar microscópico y macroscópico.

De la calibración numérica se obtienen los valores de $\phi_0^{mic} = 23,5 N/mm^2$ y $\phi_0^{mac} = 50,00 N/mm^2$ para el ensayo de extensión axial, siendo estos valores $\phi_0^{mic} = 29,00 N/mm^2$ y $\phi_0^{mac} = 50,00 N/mm^2$ para el ensayo de corte simple.

3.1 Ensayo de Tracción Uniaxial

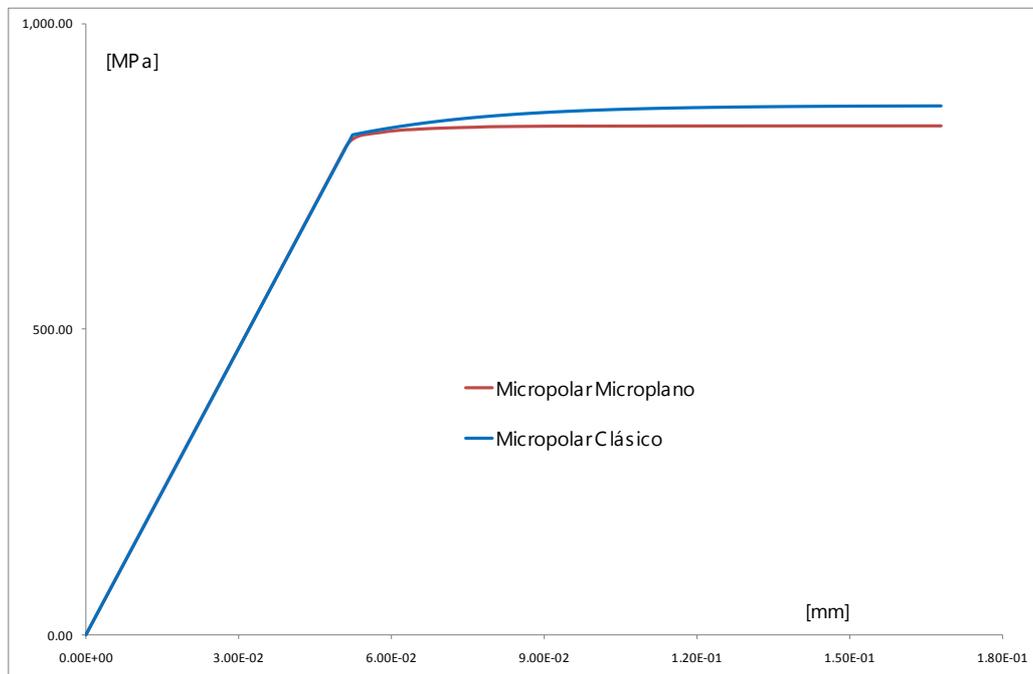


Figura 4. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos. Régimen de Plasticidad Perfecta.

La **Figura 4** compara las predicciones numéricas de ensayo de tracción uniaxial con el modelo elastoplástico de microplanos micropolar con el modelo elastoplástico micropolar clásico.

La observación que surge es que el comportamiento de respuesta durante el rango elástico concuerda muy bien. También las predicciones globales de ambos modelos resultan muy similares.

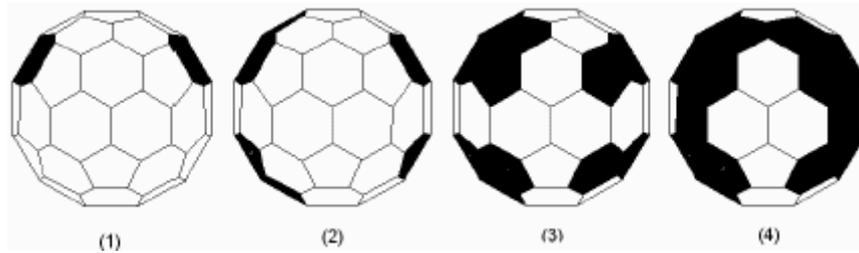


Figura 5. Proceso de evolución plástica de los microplanos en el ensayo de tracción uniaxial

El modelo macroscópico permite un análisis mucho más detallado del mecanismo de falla y su evolución como puede observarse en la **Figura 5** que muestra el desarrollo espacial del proceso plástico en el caso del ensayo de tracción uniaxial predicho por el modelo micropolar de microplanos con endurecimiento lineal. Si bien las tensiones volumétricas son idénticas en el caso del ensayo de tracción, la influencia de las tensiones tangenciales simétricas y asimétricas que se desarrollan y la componente normal no equilibrada no volumétrica de los tensores evaluados, lleva a la plastificación de los planos que se grafican en inclinaciones de aproximadamente 45 grados. Estos entran en fluencia en primer lugar mientras se mantienen en el período elástico las otras direcciones.

Es decir que durante la historia de carga puede reconocerse una tendencia hacia la evolución de la textura. Bajo tracción uniaxial, el comportamiento plástico se desarrolla en los planos localizados con ángulos de alrededor de 45° con el eje de carga en el plano de carga.

Similar efecto fue observado por Kuhl *et al.* (KULH, E., STEINMAMM, P., CAROL, I.2001) en las predicciones del ensayo de tracción uniaxial en el modelo elastoplástico de micro planos en continuos de Boltzman.

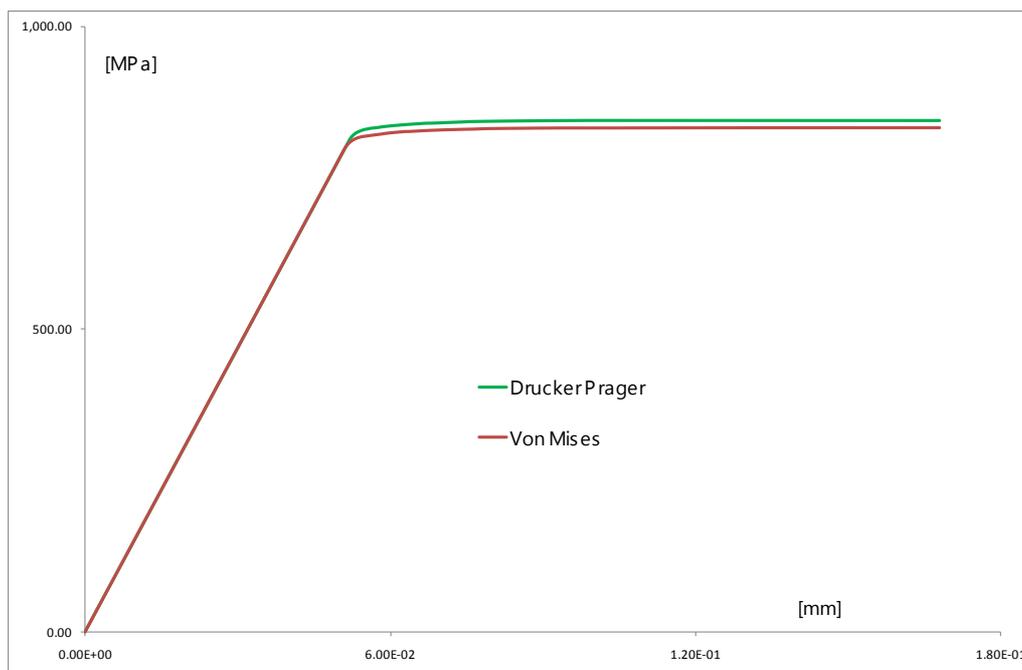


Figura 6. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Plasticidad Perfecta.

El modelo micropolar de microplanos con plasticidad perfecta conduce a una evolución del tensor de tensiones macroscópico durante el ensayo de tracción uniaxial caracterizado por una respuesta de ablandamiento suave de J_2 y el subsiguiente plató.

La **Figura 6**, **Figura 7** y **Figura 8** muestran los resultados de los ensayos de tracción uniaxial para el Modelo de Plasticidad de Microplanos de Von Mises y de Drucker Prager, en régimen de plasticidad perfecta, ablandamiento y endurecimiento lineal. Se ve que las tensiones que predice la formulación de Drucker Prager son siempre superiores a las de Von Mises para todos los escenarios de carga.

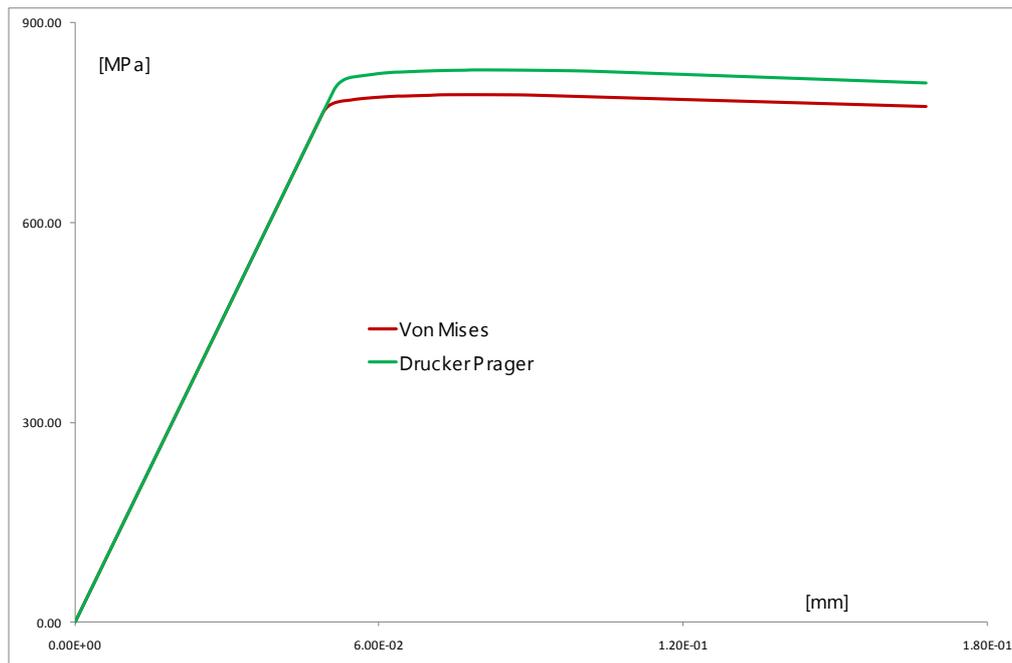


Figura 7. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Ablandamiento Lineal.

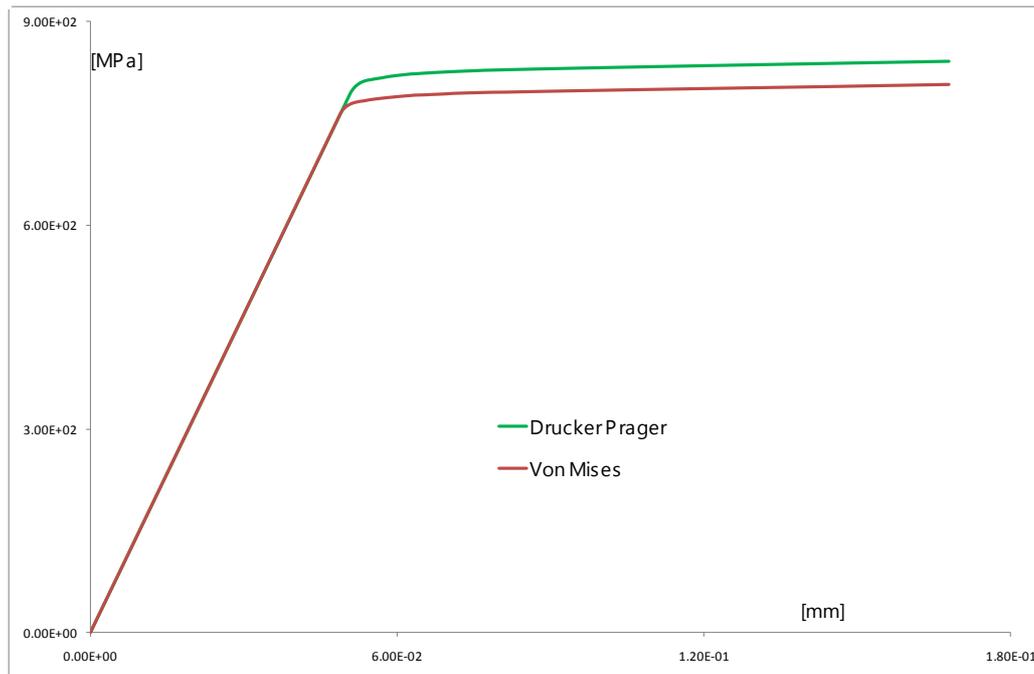


Figura 8. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Endurecimiento Lineal.

3.2 Ensayo de Corte Simple

Las predicciones numéricas del modelo de Cosserat basado en microplanos para el ensayo de corte simple y la comparación con las correspondientes predicciones del modelo clásico micropolar se muestran en la [Figura 9](#).

Es importante notar que en el ensayo de corte simple contrariamente con el ensayo de tracción uniaxial, se activan las microrotaciones. La [Figura 10](#) ilustra el desarrollo de la falla que predice el modelo de microplanos micropolar con endurecimiento lineal. De nuevo se puede reconocer la evolución de la textura. Sin embargo en el caso del ensayo de corte simple, el proceso de deformación inelástica tiene lugar en los microplanos superior, inferior, izquierdo y derecho. Esta distribución de falla pronunciada en microplanos el comportamiento más dúctil que predice el ensayo de corte simple del modelo micropolar de microplanos cuando se compara con las predicciones correspondientes del ensayo de tracción uniaxial.

Los resultados de la [Figura 9](#) también indican que el modelo micropolar de microplanos con plasticidad perfecta conduce, como se esperaría, a un plató de la fuerza externa de corte, al igual al modelo clásico de Cosserat.

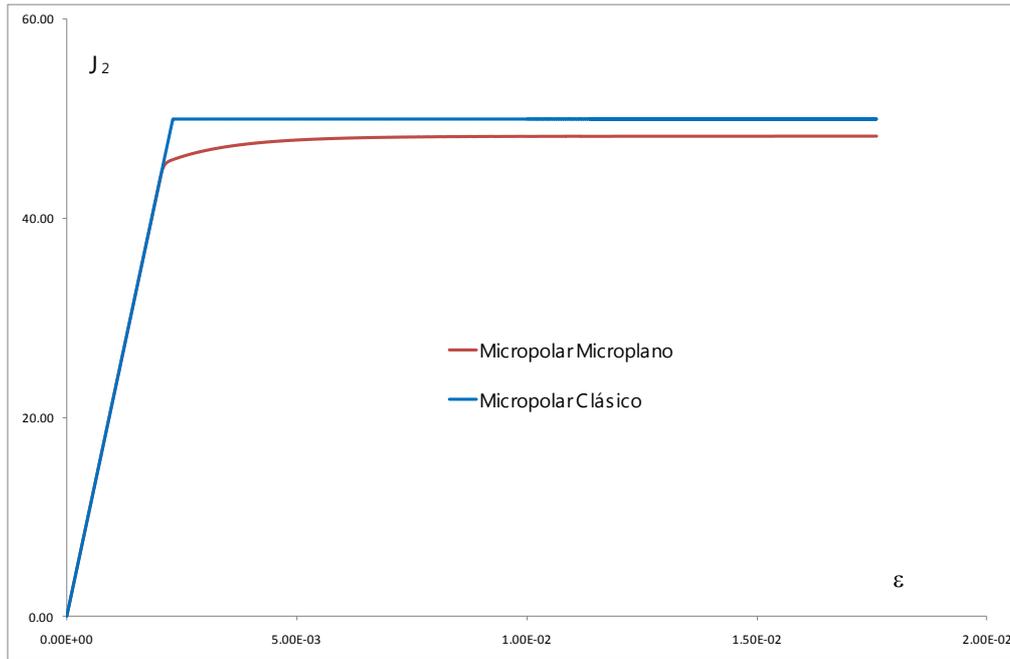


Figura 9. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos. Régimen de Plasticidad Perfecta.

En la **Figura 10** se muestra la evolución de la plasticidad en los microplanos en que ha sido discretizada la esfera representativa del punto material. Aquí se tendrán nulos los valores de las tensiones volumétricas que integran las tensiones normales y el inicio de la plastificación estará en función de los valores de tensiones tangenciales en planos situados arriba, abajo a derecha y a izquierda, es decir a 45 grados con la normal al plano de cargas como se espera del esfuerzo de corte implementado.

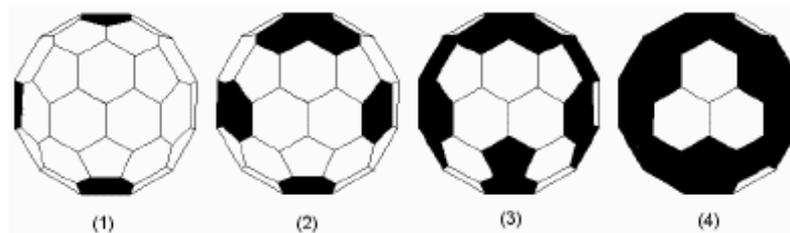


Figura 10. Evolución del proceso plástico en microplanos. Ensayo de corte simple.

En la **Figura 11**, **Figura 12** y **Figura 13** se muestran los valores que arroja el ensayo de corte simple para las funciones de fluencia de Von Mises y Drucker Prager, y se puede observar que a la inversa del ensayo de tracción uniaxial la predicción del ensayo arroja valores de tensiones mayores para la primera formulación de plasticidad.

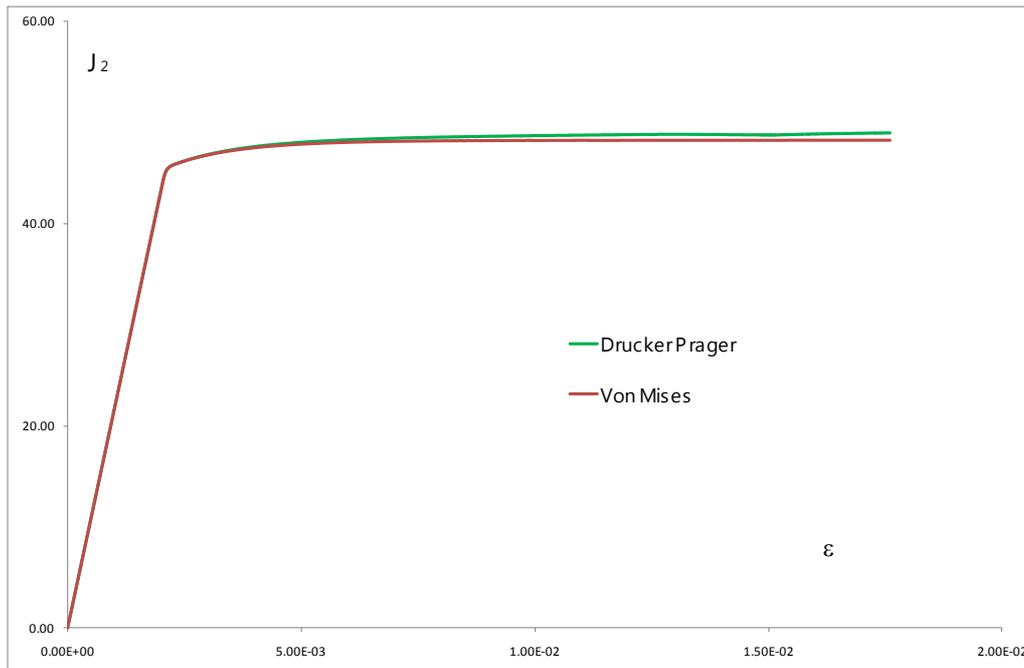


Figura 11. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Plasticidad Perfecta.

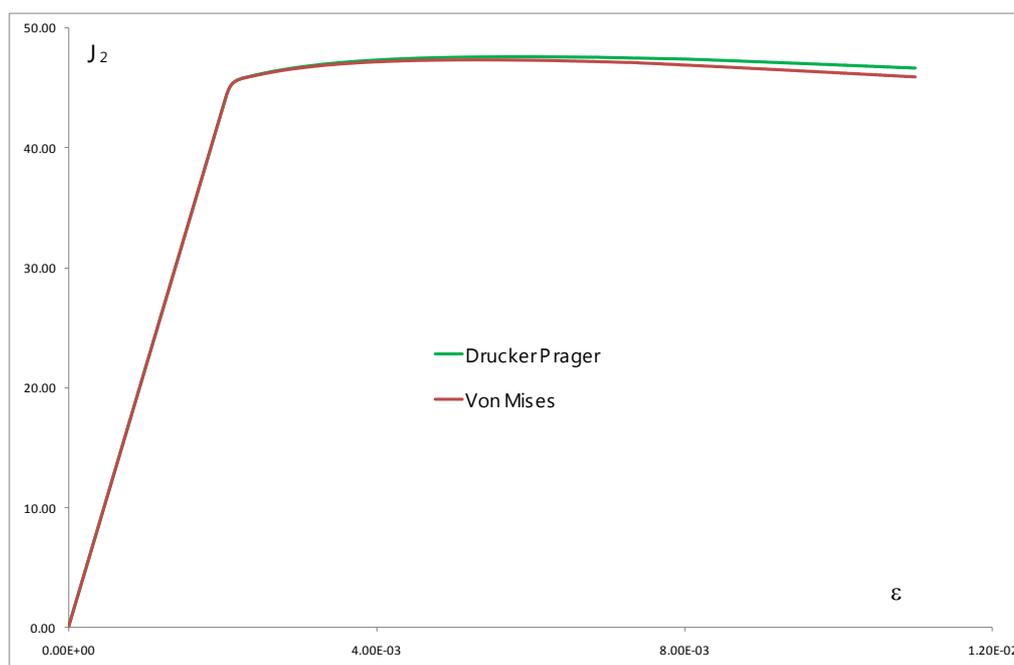


Figura 12. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Ablandamiento Lineal.

La evaluación numérica de las dos condiciones de localización que se estudian en los modelos micropolares se muestra en la **Figura 14**. En la misma se compara la localización que se obtiene en el modelo de Cosserat con plasticidad de Von Mises clásico (Modelo Macro Cosserat) con los valores de localización del Modelo de Microplanos con la misma función de fluencia integrada en la esfera discretizada en 42 direcciones.

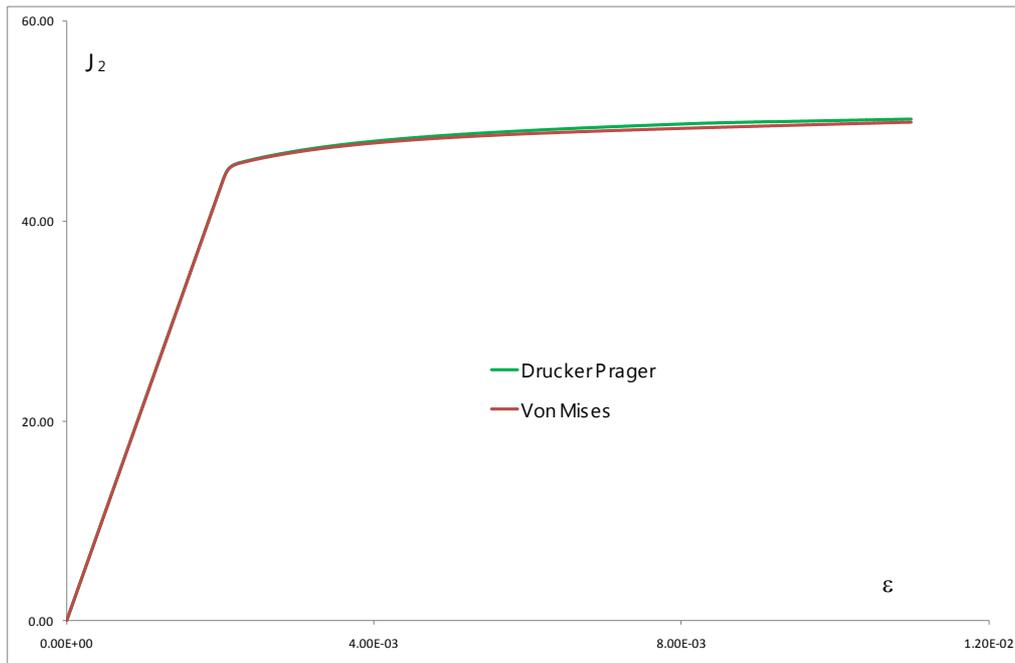


Figura 13. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Endurecimiento Lineal.

En ella se comparan los modelos macro y microplano de Cosserat en estado de deformaciones planas. El menor valor del determinante del tensor acústico se presenta en $\alpha = 36^\circ$ y $\alpha = 144^\circ$ en ambos casos. La segunda condición de localización se cumple para $\alpha = 0^\circ$.

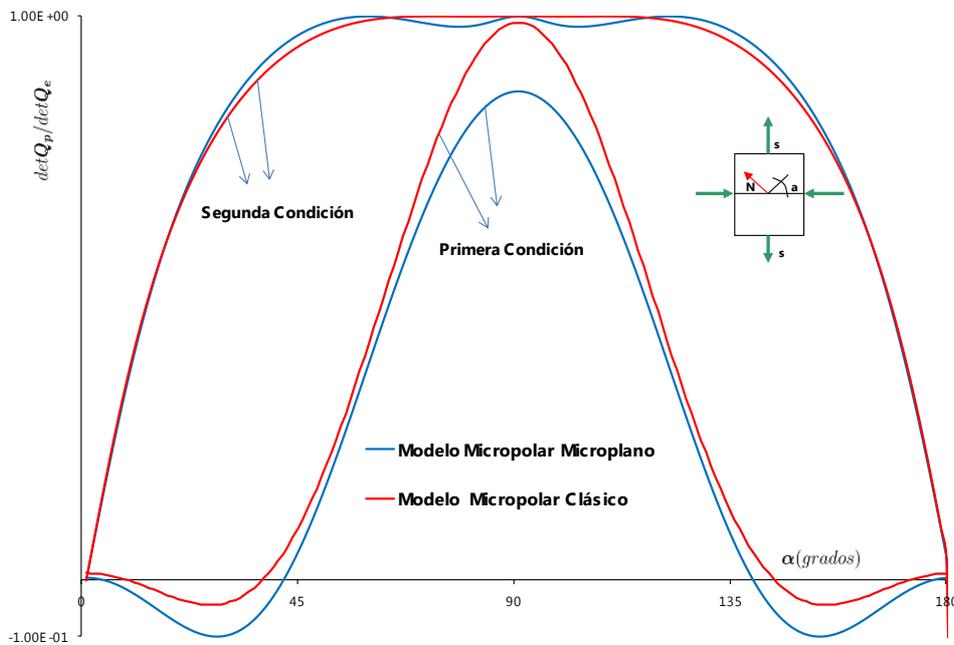


Figura 14. Determinante del tensor acústico del Modelo Micropolar Cásico y del Modelo Micropolar de Microplanos en corte.

La segunda condición de localización que resulta del balance del momento de la cantidad de movimiento, se presenta de igual manera en ambos modelos, en los que la condición de falla se da en el valor $\alpha = 0^\circ$ que no se corresponde con el ángulo en el que se cumple la primera condición. La consideración del módulo de corte de Cosserat $G_c \neq 0$ lleva a que no se cumplan simultáneamente ambas condiciones de localización. El modo de Falla I será posible solo cuando este parámetro sea nulo, y en ausencia de momentos tensionales, solo una condición se satisface.

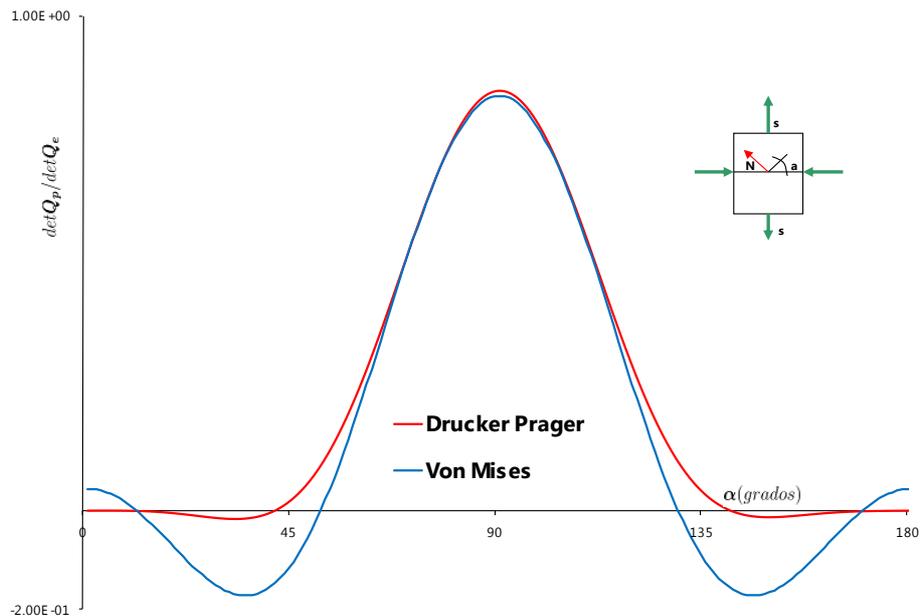


Figura 15. Determinante del tensor acústico del Modelo Von Mises y Drucker Prager en corte

La **Figura 14** muestra que si bien hay coincidencia de valores extremos de ambos modelos, los valores relativos son menores en el modelo de Micropolar de Microplanos cuando se evalúa la primera condición de falla.

La **Figura 15** compara el desarrollo de las dos condiciones de localización en los medios micropolares para función de plasticidad tipo Von Mises y tipo Drucker Prager. El valor mínimo del determinante del tensor acústico se presenta en el mismo ángulo en ambos modelos $\alpha = 42^\circ$.

4 CONCLUSIONES

En este trabajo ha sido reformulada para continuos micropolares de Cosserat elásticos e inelásticos, la aproximación termodinámicamente consistente para derivar formulaciones constitutivas de microplanos de Carol, Jirasek \- Bazant (Carol, I., Jirasek, M., Bazant, Z.P.2001) y por Kuhl, Steinmann, Carol (KULH, E., STEINMAMM, P., CAROL, I. 2001). Como en trabajos previos, la principal suposición es la incorporación de la energía libre microscópica de Helmholtz en todos los microplanos, los cuales incluyen en el presente caso las contribuciones

de los grados de libertad adicionales y la rigidez de los continuos de Cosserat, representados por las microrotaciones y los momentos tensionales. También, se considera una forma desacoplada de la energía libre en términos de las contribuciones "membrana" y "viga".

De las ecuaciones constitutivas resultantes para el modelo micropolar elástico basado en microplanos se obtiene una solución explícita para la longitud característica en términos de la relación entre el módulo de viga elástico tangencial y el módulo de corte de Cosserat. Las soluciones para el modelo micropolar elastoplástico basado en microplanos incluye la formulación explícita macroscópica del módulo constitutivo tangencial en términos de las contribuciones microscópicas. La formulación general elastoplástica del modelo micropolar basado en microplanos se ha particularizado para elastoplasticidad tipo von Mises y tipo Drucker Prager.

Los resultados numéricos en este trabajo muestran las predicciones del modelo elastoplástico tipo J_2 para el ensayo tracción uniaxial y de corte simple, indicando también las principales diferencias con las predicciones del modelo clásico de Cosserat macroscópico elastoplástico. La teoría constitutiva propuesta permite la formulación de modelos materiales basados en diferentes y relevantes aspectos de la microestructura de los materiales de la Ingeniería. Estos exceden la capacidad del marco teórico desarrollado hasta ahora por el modelado macroscópico de comportamientos anisotrópicos de materiales heterogéneos cohesivos-friccionales como el hormigón.

REFERENCIAS

- Bazant, Z.P. and Oh, B.H. (1986), Efficient numerical integration on the surface of a sphere, ZAMM Vol. 66 (1) Pag.. 37 – 49.
- Bazant, Z.P. and Oh, B.H. (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock, J. Eng. Mech. Vol. 111 Pag.. 559 – 582.
- Bazant, Z.P. and Gambarova, P.G. (1984). "Crack shear in concrete: Crack band microplane model." *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 110. Pag.. 2015 - 2036.
- Bazant, Z.P. (1976). Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Vol. 102. Pag. 331 - 344.
- Carol, I., Bazant, Z.P., Prat, P. (1991) Geometric damage tensor based on microplane model, J. Eng. Mech. Vol. 117. Pag.. 2429 – 2448.
- Carol, I., Bazant, Z.P., Prat, P. (1992) New explicit microplane model for concrete: theoretical aspects and numerical implementation, Int. J. Solids Struct. Vol. 29. Pag.. 1173 – 1191.
- Carol, I., Jirasek, M., Bazant, Z.P. (2001) A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part I: free energy and consistent microplane stresses, Int. J. Solids Struct. Vol. 38. Pag.. 2921 – 2931.
- COSSERAT, E y F. (1909).- *Théorie des Corps Déformable*..París
- de Borst, R. (1991) Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. Eng. Comput., Vol. 8. Pag.. 317 – 332.

- ETSE G., NIETO M., STEINMAN P., CAROSIO A. (2003). A micropolar microplane theory. *Int. Journal on Mechanics of Cohesive- Frictional Materials. Int. Journal of Engineering Sciences*. Pergamon. ISSN 00207225. Vol. 41. Pag.. 1631 – 1648.
- ETSE G., NIETO M..(2004) Cosserat continua-based micropolar modeling. *Latin American Applied Research*. ISSN 03270793 Vol.34. N°4. Pag. 229 - 240.
- KULH, E., STEINMAMM, P., CAROL, I. (2001). A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part II: Dissipation and inelastic constitutive modeling, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 38. Pag. 2933 – 2952.
- KULH, E. RAMM, E.. (1998) On the linearization of the microplane model. *Mech. Cohes.-Frict. Mater.* Vol. 3. Pag. 343 - 364.
- KULH, E. RAMM, E. WILLAM, K. (2000) Failure analysis of elasto-plastic material models on different levels of observation, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 37. Pag. 7259 – 7280.
- KULH, E., STEINMAMM, P., CAROL, I. (2001). A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part II: Dissipation and inelastic constitutive modeling, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 38. Pag. 2933 – 2952.
- TAYLOR,G.I. (1938) Plastic strain in metals, *J. Inst. Metals*, Vol. 62 . Pag. 307 - 324.
- WILLAM, A., DIESTSCHE, A., STEINMANN, P. and IORDACHE, M. M. (1995). Localization in micropolar continua, in: H.-B. Mühlhaus (Ed.), *Continuum Models for Materials with Microstructure*, John Wiley and Sons. Pag. 297 – 339.