

## NUMERICAL MODELING OF WAVE PROPAGATION FOR TRANSVERSELY (VTI) AND TILTED (TTI) ANISOTROPIC MEDIA

Jairo A. Torres<sup>a</sup>, Francisco H. Cabrera<sup>b</sup>, Flor A. Vivas<sup>b</sup> and Herlign Gonzalez<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Programa de Maestría en Ciencias de la Tierra, Universidad Eafit, Medellín, Colombia,  
jtorres6@eafit.edu.co*

<sup>b</sup>*Grupo de Investigación en Geología y Geofísica, “Pangea” Universidad de Pamplona, Pamplona,  
Norte de Santander, Colombia fcabrera61@yahoo.com.br, fvivas73@hotmail.com*

<sup>c</sup>*Grupo de Geofísica, Instituto Colombiano del Petróleo (ICP), Ecopetrol, Piedecuesta, Santander,  
Colombia, herling.gonzalez@ecopetrol.com.co*

**Keywords:** Anisotropic Media. Difference-Finite, Wave Propagation

**Abstract.** Directional dependence of the phase velocity to P, SV and SH waves in a transversely isotropic media (TI) with vertical (VTI) or tilted (TTI) symmetry axis are studied. A comparison of the velocities obtained through the exact formula, the weak anisotropy and the acoustic approximation are presented. The 2D impulse responses (P and SV waves) are obtained solving the elastic and acoustic wave equation using the finite difference approximation. The variation of the numerical results to different measured anisotropy in sedimentary rocks are presented.

## 1 INTRODUCCIÓN

Inicialmente en la exploración sísmica se considera que, los estratos que componen la cuenca a explorar son medios isótropos, cuyas velocidades sísmicas no varían con la dirección en la cual se están propagando las ondas, sin embargo cuando las ondas se propagan en el interior del subsuelo, este exhibe anisotropía. Se define la anisotropía sísmica como la variación de la velocidad con la dirección en la cual se propagan las ondas y esta se presenta en rocas como las arcillas, estratos delgados superpuestos y formaciones con alto grado de fracturamiento (Jones and Wang (1981); Thomsen. (1986); Johnston and Christensen (1995); Leslie and Lawton (1999)).

Entre algunas causas de la anisotropía en rocas sedimentarias se encuentra:

- La secuencia de capas isótropas con escala más pequeña que la longitud de la onda sísmica (Backus (1962))
- La orientación preferencial de los minerales como por ejemplo las arcillas (Winterstein (1990))
- La orientación de las microgrietas de las fracturas (Winterstein (1990)) y los esfuerzos in situ que modifican la forma de los poros y fracturas pre-existentes (Winterstein (1990)).

El tipo de anisotropía más común que se tiene en cuenta en sísmica es la anisotropía polar, la cual posee un eje de simetría perpendicular a la dirección en la cual se depositan los sedimentos, y cuyas velocidades en el plano normal a este eje son idénticas. Cuando el eje de simetría es vertical, la anisotropía es llamada Anisotropía Polar Vertical ó VTI (de las siglas en inglés de vertically transversely isotropic) por lo que la isotropía es limitada al plano horizontal (figura 1.1). Si el eje de simetría no es vertical es llamada Anisotropía Polar Inclinada ó TTI (de las siglas en inglés de tilted transversely isotropic) y por último esta el tipo de anisotropía en la cual el eje de simetría es horizontal comúnmente llamado Anisotropía Azimutal ó HTI (de las siglas en inglés de horizontally tranversely isotropic) (figura 1.1).

Según la disposición y el tipo de roca, un medio VTI se asocia típicamente a series de estratificación conformadas por lutitas y areniscas intercaladas o por un alto contenido de arcillosidad en el medio (Toldi (1999)). En este trabajo solo se estudiara los tipos de anisotropía indicadas anteriormente.

## 2 FUNDAMENTOS BÁSICOS

### 2.1 Teoría de anisotropía polar

La ley de Hooke permite expresar las componentes del tensor de esfuerzos,  $\sigma_{ij}$ , como una combinación lineal de las componentes del tensor de deformación,  $\varepsilon_{ij}$  :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1)$$

Donde  $c_{ijkl}$  son las componentes del tensor de elasticidad o tensor de rigidez, dado que  $i, j, k, l$  varían de 1 a 3, el número de componentes del tensor de elasticidad es  $3^4 = 81$ , pero no todas las 81 componentes son diferentes. Debido a la existencia de la simetría de los tensores de esfuerzo ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) y deformación ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ), y que además por ser un fenómeno adiabático  $c_{ijkl} = c_{klij}$ , esto implica que en el tensor  $c$ , las constantes elásticas independientes se reduzcan a 21 (Love (1927)). En vista de esto, se puede expresar como una matriz de  $6 \times 6$ , si se toman

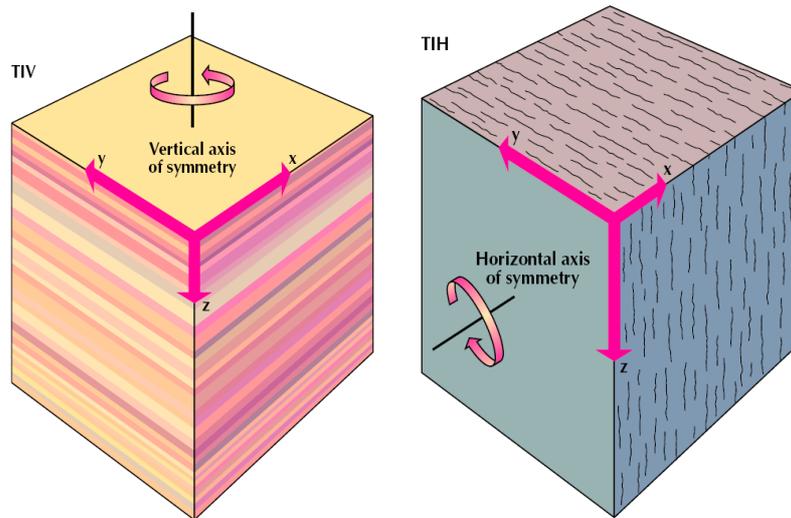


Figure 1: Medio con anisotropía polar vertical (VTI) (izquierda) y anisotropía polar horizontal (HTI) (derecha) (Armstrong (1994))

parejas de los cuatro índices de  $c_{ijkl}$  asignando  $C_{mn}$  y haciendo corresponder  $(i, j)$  con  $m$  y  $(k, l)$  con  $n$  de la siguiente forma según la notación de Voigt (Thomsen, 2001):

$$(1, 1) \rightarrow 1, (2, 2) \rightarrow 2, (3, 3) \rightarrow 3, (2, 3) \rightarrow 4, (1, 3) \rightarrow 5, (1, 2) \rightarrow 6$$

La ecuación (1) se puede expresar de manera matricial como:

Es de notarse que el factor 2 resulta de la doble suma aplicada para cada  $k \neq l$ , que corresponde a 2 posibles combinaciones. Otras consideraciones de tipo energéticas permiten encontrar que  $c_{ijkl} = c_{jikl}$  (Love (1927)), reduciendo así el número de componentes independientes de  $C_{mn}$  a 21.

La matriz queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

El modelo mas general de un medio anisótropo esta representado por 21 componentes independientes, tal y como se muestra en la matriz (2). Un medio con anisotropía polar se caracteriza por 5 constantes independientes,  $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}$  y  $C_{44}$  (Love (1927)), donde:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Con

$$C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}),$$

además en un medio isótropo la matriz (3) depende de 2 coeficientes elásticos  $C_{11}$  y  $C_{44}$ , los cuales se expresan en términos de los parámetros de Lamé;  $\lambda$  y  $\mu$  (Slawinski (2003)) definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\lambda &:= C_{11} - 2C_{44} \\ \mu &:= C_{44},\end{aligned}$$

y según lo anterior, la matriz queda expresada como:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4)$$

A partir de las ecuaciones de movimiento de Cauchy para un elemento infinitesimal del continuo (Aki and Richards (2002)):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (5)$$

donde  $\rho$  es la densidad del medio,  $u_i$  son las componentes del vector desplazamiento,  $f_i$  son las fuerzas de cuerpo,  $t$  es el tiempo, y  $x_i$  son las coordenadas cartesianas, reemplazando la ecuación (1) en la ecuación (5) se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial c_{ijkl} \varepsilon_{kl}}{\partial x_j} = f_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (6)$$

donde el tensor de deformación  $\varepsilon_{kl}$  esta definido por (Slawinski (2003)):

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (7)$$

En la ecuación (6), despreciando las fuerzas de cuerpo ( $f_i = 0$ ) y si el tensor de elasticidad se considera constante, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = 0 \quad (8)$$

Una onda plana tipo armónica se usa para encontrar una solución de prueba de la ecuación (8).

$$u_k = U_k e^{i\omega \left( \frac{n_j x_j}{\nu} - t \right)} \quad (9)$$

Donde  $U_k$  son las componentes del vector polarización  $\mathbf{u}$ ,  $w$  es la frecuencia angular,  $\nu$  es la velocidad de propagación de la onda (comunmente llamada velocidad de fase),  $\mathbf{n}$  es el vector unidad que es ortogonal al plano del frente de onda.

Usando (9) en la ecuación (8), se obtiene a la ecuación de Christoffel para la velocidad de fase  $\nu$  y el vector polarización  $\mathbf{U}$  (Du (2007)):

$$\begin{bmatrix} G_{11} - \rho\nu^2 & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} - \rho\nu^2 & G_{23} \\ G_{13} & G_{32} & G_{33} - \rho\nu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

$G_{ik}$  es la matriz de Christoffel, la cual depende de las propiedades elásticas del medio y de la dirección de propagación:

$$G_{ik} = c_{ijkl}n_jn_l \quad (11)$$

Utilizando estas relaciones en las ecuaciones de movimiento se obtiene una ecuación de onda con tres soluciones independientes, una cuasi-longitudinal ( $qP$ ), una cuasi-transversal ( $qSV$ ) y una transversal ( $SH$ ). Las tres ondas son polarizadas en direcciones mutuamente ortogonales. Daley and Hron (1977) obtuvieron las relaciones de dispersión para las tres tipos de onda.

$$\rho\nu_p^2(\theta) = \frac{1}{2} \left[ C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta + D(\theta) \right] \quad (12)$$

$$\rho\nu_{sv}^2(\theta) = \frac{1}{2} \left[ C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta - D(\theta) \right] \quad (13)$$

$$\rho\nu_{sh}^2(\theta) = C_{66} \sin^2(\theta) + C_{44} \cos^2(\theta) \quad (14)$$

Donde  $\rho$  es la densidad y  $\theta$  es el ángulo entre el frente de onda normal y el eje vertical,  $D(\theta)$  es una notación compacta para la combinación cuadrática:

$$D(\theta) \equiv \left\{ (C_{33} - C_{44})^2 + 2 \left[ 2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44}) \right] \sin^2 \theta + \left[ (C_{11} + C_{33} - 2C_{44})^2 - 4(C_{13} + C_{44})^2 \right] \sin^4 \theta \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Las ecuaciones (12), (13) y (14) denotan la velocidad de fase para la onda P, la onda SV y la onda SH respectivamente, cuando la onda se propaga en la dirección horizontal ( $\theta = 0^\circ$ ) y en la dirección vertical ( $\theta = 90^\circ$ ) la velocidad de fase para la onda P esta dada por las expresiones:

$$\nu_p(0^\circ) = v_{p0} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \quad (16)$$

$$\nu_p(90^\circ) = v_{p90} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad (17)$$

Donde  $v_{p0}$  corresponde a la velocidad de la onda P medida paralela al eje de simetría de un medio TI y  $v_{p90}$  es la velocidad de la onda P vertical al eje de simetría de un medio TI, similarmente para la componente vertical de la onda S se obtiene:

$$v_{sv}(0^\circ) = v_{s0} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (18)$$

$$v_{sv}(90^\circ) = v_{sv90} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (19)$$

La velocidad vertical,  $v_{s0}$  y horizontal,  $v_{sv90}$  son iguales para la onda SV. Para la onda SH se obtiene:

$$v_{sh}(0^\circ) = v_{sh0} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (20)$$

$$v_{sh}(90^\circ) = v_{sh90} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}} \quad (21)$$

La velocidad vertical,  $v_{sh0}$  y horizontal,  $v_{sh90}$  para la onda SH son diferentes y sí se considera un medio isótropo las componentes del tensor de rigidez  $C_{44} = C_{66}$ , esto hace que la ecuación (20) y (21) sean iguales.

Las ecuaciones para la velocidad de fase fueron simplificadas por [Thomsen. \(1986\)](#), quien definió tres parámetros  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  y  $\delta^*$ , los cuales Thomsen, escribió apropiadamente como combinaciones de los coeficientes elásticos del tensor, los definió adimensionales y se reducen a cero en el caso isótropo ([Thomsen. \(1986\)](#)).

Algunos materiales con valores pequeños de anisotropía ( $\ll 0.2$ ) se llaman materiales con anisotropía débil (Ver Tabla 1 en [Thomsen. \(1986\)](#)).

Estos parámetros son definidos de la forma ([Thomsen. \(1986\)](#)):

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}} \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}} \quad (23)$$

En la ecuación (22) y (23) estos parámetros  $\varepsilon$  y  $\gamma$ , permiten describir diferencias entre la velocidad de la onda P y la onda SH en dirección paralela y en dirección perpendicular al eje de simetría del medio para respectivamente, el tercer parámetro carece de significado físico y Thomsen lo definió como:

$$\delta^* \equiv \frac{2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})}{2C_{33}^2} \quad (24)$$

Las ecuaciones (12), (13) y (14) fueron reescritas por Thomsen incluyendo los tres parámetros  $\varepsilon$ ,  $\delta^*$  y  $\gamma$ :

$$\nu_p^2(\theta) = v_{p0}^2 \left[ 1 + \varepsilon \sin^2 \theta + D^*(\theta) \right] \tag{25}$$

$$\nu_{sv}^2(\theta) = v_{sv0}^2 \left[ 1 + \frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} \varepsilon \sin^2 \theta - \left( \frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} \right) D^*(\theta) \right] \tag{26}$$

$$\nu_{sh}^2(\theta) = v_{sv0}^2 \left[ 1 + 2\gamma \sin^2 \theta \right] \tag{27}$$

Donde el factor  $D^*(\theta)$  esta dado por la siguiente expresión:

$$D^*(\theta) \equiv \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right) \left\{ \left[ 1 + \frac{4\delta^* \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left( 1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right)^2} + \frac{4\varepsilon \sin^4 \theta \left( 1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} + \varepsilon \right)}{\left( 1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \tag{28}$$

Es importante tener claridad y distinguir las diferencias entre el ángulo  $\theta$ , y el ángulo  $\phi$ , este primero se refiere al ángulo que forma la dirección de propagación dada por el vector número de onda ( $\mathbf{k}$ ) y el eje de simetría, el segundo es el ángulo que forma el vector velocidad para el rayo ( $v_n$ ), por donde la energía se propaga y el eje de simetría. El frente de onda a nivel local es perpendicular al vector de propagación ( $\mathbf{k}$ ), ya que este apunta en la dirección de la tasa máxima de aumento de la fase, la velocidad de fase  $\nu$  también se llama velocidad del frente de onda, ya que mide la velocidad del frente de onda a lo largo de  $\mathbf{k}$ . En el caso isotropo los ángulos son iguales y por lo tanto se obtienen frentes esféricos (imagen izquierda de la figura 2). Para el caso que existen diferencias entre dirección de la velocidad normal ( $v_n$ ) (equivalente a la dirección del número de onda) y la velocidad del rayo ( $v_{ray}$ ) se presentan frentes no esféricos (imagen derecha en la figura 2).

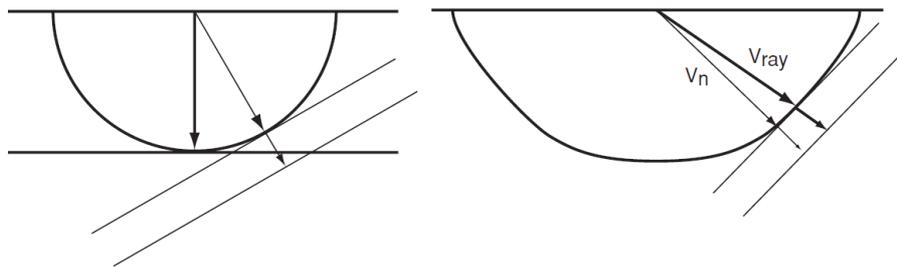


Figure 2: Diferencia entre el frente de onda esférico de un medio isotropo y el anisotropo

El vector número de onda (Berryman (1979))

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z} \tag{29}$$

Donde sus componentes son  $k_x, k_z$ . (2D)

$$k_x = k(\theta) \sin \theta \quad k_z = k(\theta) \cos(\theta) \tag{30}$$

Y su magnitud corresponde a.

$$k(\theta) = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \omega/\nu(\theta) \quad (31)$$

En el caso bidimensional, donde  $\omega$  determina la frecuencia angular de la onda, la velocidad de grupo para el medio dispersivo corresponde a:

$$\vec{V} = \frac{\partial(k\nu)}{\partial k_x} \hat{x} + \frac{\partial(k\nu)}{\partial k_z} \hat{z} \quad (32)$$

tambien muestra que la magnitud escalar de  $V$  es expresada en términos de la magnitud de la velocidad de fase  $\nu$

$$V^2(\psi(\theta)) = \nu^2(\theta) + \left( \frac{\partial(\nu)}{\partial \theta} \right)^2 \quad (33)$$

Para  $\theta = 0$  y  $\theta = 90$  el segundo término de la ecuación (33) desaparece, de tal forma que la velocidad de grupo es equivalente a la velocidad de fase, característica de un medio de no dispersivo.

## 2.2 Anisotropía débil

Thomsen en su artículo de 1986 realizó nuevas consideraciones para obtener unas expresiones mas sencillas de las ecuaciones (25-28), de acuerdo a los resultados experimentales, él notó que las mediciones de sus parámetros en ciertas rocas sedimentarias, estaban por debajo de 0.2 a lo que él llamo rocas con anisotropía débil. Según esto él linealizó las ecuaciones de la velocidad de fase para valores pequeños de  $\varepsilon$  y  $\delta$  mediante una expansión en serie de Taylor, y obtuvo:

$$\nu_p(\theta) = v_{p0}(1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^4 \theta) \quad (34)$$

$$\nu_{sv}(\theta) = v_{s0} \left[ 1 + \frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} (\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \quad (35)$$

$$\nu_{sh}(\theta) = v_{s0} (1 + \gamma \sin^2 \theta) \quad (36)$$

Según lo obtenido por Thomsen la nueva expresión para  $\delta$  (Thomsen. (1986)) quedó de la forma:

$$\delta \equiv \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})} \quad (37)$$

La aproximación obedece al truncamiento de las series de Taylor aplicadas, estas expresiones posibilitan el análisis físico correspondiente a la propagación de la onda en el medio anisótropo, para el caso en que  $\theta = 0$ , se obtiene

$$\nu_p(0) = v_{p0} \quad (38)$$

$$\nu_{sv}(0) = v_{s0} \quad (39)$$

$$\nu_{sh}(0) = v_{s0} \quad (40)$$

Esta expresiones para las velocidades en dirección paralela al el eje de simetría corresponden a las velocidades establecidas en un medio isótropo, según las ecuaciones (16), (18) y (20).

### 2.3 Velocidad de fase en un medio elástico VTI

Tsvankin (1996) reformulo la expresión de la velocidad de fase en un medio elástico con anisotropía polar vertical en términos de los parámetros de Thomsen:

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{1 + \frac{4 \sin^2 \theta}{f} (2\delta \cos^2 \theta - \varepsilon \cos 2\theta) + \frac{4\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2}}, \quad (41)$$

donde  $f$  es:

$$f = \left(1 - \frac{v_{s0}^2}{v_{p0}^2}\right) = \left(1 - \frac{C_{44}}{C_{33}}\right) \quad (42)$$

y  $\theta$  es el ángulo que forma la dirección de propagación con el eje de simetría. En la ecuación (41), el signo “+” esta relacionado con la velocidad de fase para la onda  $P$  y el signo “-” la velocidad de fase para la onda  $SV$ . La ecuación (41) puede ser simplificada bajo la condición de anisotropía débil ( $\varepsilon < 0.2$  y  $\delta < 0.2$ ), al expandir el radical en la ecuación (41) en una serie de Taylor y despreciando los términos cuadráticos en los parámetros  $\varepsilon$  y  $\delta$ , se obtiene para la onda  $P$ :

$$\frac{\nu_p^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + 2\delta \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + 2\varepsilon \sin^4(\theta) \quad (43)$$

Tomando la raíz cuadrada y linealizando la ecuación (43), resulta la expresión dada anteriormente en la ecuación (38), de la aproximación de Anisotropía débil (Thomsen, (1986)). ( $v_{p0} = V_{p0}$ )

$$\frac{\nu_p(\theta)}{v_{p0}} = 1 + \delta \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + \varepsilon \sin^4(\theta) \quad (44)$$

Similarmente para la onda  $SV$ , se obtiene la velocidad de fase teniendo en cuenta la anisotropía débil (Equivalente a la expresión (34)):

$$\frac{\nu_{sv}(\theta)}{v_{p0}} = 1 - f + 2(\varepsilon - \delta) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \quad (45)$$

ó

$$\frac{\nu_{sv}(\theta)}{v_{s0}} = 1 + 2\sigma \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \quad (46)$$

Donde  $\sigma$  es una expresión que combina los parámetros de Thomsen (Tsvankin, 1996):

$$\sigma = \frac{v_{p0}^2}{v_{s0}^2} (\varepsilon - \delta) \quad (47)$$

### 2.4 Velocidad de fase en un medio elástico TTI

Para obtener las velocidades de fase en un medio con anisotropía polar inclinada, se reemplaza  $\theta = \theta - \phi$  en la ecuación (43) (Du (2007)), obteniendo:

$$\frac{\nu^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi) - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{1 + \frac{4 \sin^2(\theta - \phi)}{f} (2\delta \cos^2(\theta - \phi) - \varepsilon \cos 2(\theta - \phi)) + \frac{4\varepsilon^2 \sin^4(\theta - \phi)}{f^2}} \quad (48)$$

De la ecuación (48), se tiene que las expresiones de la velocidad de fase para la onda  $P$  y  $SV$  en un medio con anisotropía débil TI son:

$$\frac{\nu_p^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 + 2\delta \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi) + 2\varepsilon \sin^4(\theta - \phi) \quad (49)$$

y

$$\frac{\nu_s^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 - f + 2(\varepsilon - \delta) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi), \quad (50)$$

donde  $f$  esta relacionado con las velocidades  $v_{s0}$  y  $v_{p0}$ .

## 2.5 Velocidad de fase en un medio acústico VTI y TTI

La ecuación (43) se puede reescribir considerando  $v_{s0} = 0$ , y de esta forma obtener la velocidad de fase de un medio acústico homogéneo con anisotropía VTI (Du (2007)):

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta)^2 - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \quad (51)$$

y para un medio TTI según la ecuación (48) se obtiene:

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi) + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2(\theta - \phi))^2 - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi)} \quad (52)$$

La ecuación (52) esta expresada en términos del ángulo  $\theta$ , el ángulo de inclinación  $\phi$ , de los parámetros de anisotropía y de la velocidad de onda P en dirección paralela al eje de simetría  $v_{p0}$ .

## 3 ECUACIÓN DE ONDA PARA UN MEDIO ACÚSTICO CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL (VTI)

la ecuación de onda acústica homogénea de un medio VTI (Alkhalifah (2000)):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + v_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2\eta v_{nmo}^2 v_{p0}^2 \left( \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial z^2} \right), \quad (53)$$

donde

$$F(x, y, z, t) = \int_0^t \int_0^{t'} P(x, y, z, t) d\tau dt'. \quad (54)$$

La ecuación (53), esta expresada en derivadas parciales de cuarto orden, representa un medio acústico en presencia de anisotropía polar vertical o VTI con la condición,  $v_{s0} = 0$  (Alkhalifah and Tsvankin (1998)).

Cabe aclarar que en la ecuación (53) el parámetro  $v_{nmo}$  (Alkhalifah and Tsvankin (1995)) es la velocidad NMO para un reflector horizontal, dada por la siguiente expresión:

$$v_{nmo}(0) = v_{p0} \sqrt{1 + 2\delta} \quad (55)$$

y el coeficiente de anisotropía esta dado como una combinación de los parámetros de Thomsen:

$$\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{v_h^2}{v_{nmo}^2(0)} - 1 \right) = \frac{\varepsilon - \delta}{1 + 2\delta} \quad (56)$$

La ecuación (53) hace referencia a un hipotético medio acústico con anisotropía donde considera un eje de simetría vertical (VTI) y aunque físicamente es imposible, es una buena aproximación cinemática a la ecuación de onda elástica anisótropa (Alkhalifah and Tsvankin (1998)). Esta ecuación es de cuarto orden y tiene dos conjuntos de soluciones complejas conjugadas, El primer conjunto de soluciones es para la onda acústica, y la segunda describe un tipo de onda que se propaga a una velocidad más lenta que la onda P para un parámetro de anisotropía positivo  $\eta$ , y crece de manera exponencial, llegando a ser inestable para valores negativos de  $\eta$  (Alkhalifah and Tsvankin (1998)). Afortunadamente los valores correspondientes a  $\eta$  en el subsuelo son valores positivos y ubicando la fuente sísmica en una capa isótropa, algo muy común en exploración sísmica marina, elimina la mayor parte de la energía de este tipo de ondas. (Alkhalifah and Tsvankin (1998)). Si en la ecuación (53) se fija  $\eta = 0$  y  $v_{nmo} \neq v_{p0}$  se obtiene la expresión para medios con anisotropía “elíptica” con eje de simetría vertical:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v_{nmo}^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + v_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \quad (57)$$

y si  $v_{nmo} = v_{p0} = v$  la ecuación (57) queda de la forma clásica para un medio acústico homogéneo isótropo:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \quad (58)$$

#### 4 ECUACIÓN DE ONDA PARA UN MEDIO ACÚSTICO CON ANISOTROPÍA POLAR INCLINADA (TTI)

La ecuación diferencial en derivadas parciales para el medio acústico considerando anisotropía polar con el eje de simetría inclinado ó VTI (Zhang (2005)) es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = & \left[ v_{P_0}^2 \sin^2 \phi + (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \cos^2 \phi \right] v_{nmo}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \\ & + \left[ v_{P_0}^2 \cos^2 \phi + (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \sin^2 \phi \right] \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\ & + \left[ v_{P_0}^2 - (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \right] \sin(2\phi) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \\ & - v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta (2 - 3 \sin^2(2\phi)) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} \\ & - \frac{1}{2} v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin^2(2\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} + v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin(4\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial z^3} \\ & - v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin(4\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial z} - \frac{1}{2} v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin^2(2\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x^4}, \end{aligned} \quad (59)$$

donde  $v_{p0}$ , es la componente de la velocidad de la onda P en dirección del eje de simetría del medio,  $v_{nmo}$  es la velocidad NMO (ver ecuación 55),  $\eta$  es el parámetro de anisotropía definido

por Alkhalifah (ver ecuación 56),  $\phi$  es el ángulo de inclinación,  $\theta$  es el ángulo que forma el eje de simetría con la dirección de propagación,  $F$  es un campo auxiliar (ver ecuación 54),  $\varepsilon$  y  $\delta$  los parámetros de Thomsen (Thomsen. (1986)).

## 5 SOLUCIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN ACÚSTICA VTI

La ecuación que modela el campo en un medio acústico 2D considerando anisotropía polar vertical, (ecuación (53)), es resuelta usando la técnica numérica de Diferencias Finitas (FD, de sus siglas en inglés). La derivada con respecto al tiempo de la ecuación (53) se aproxima por medio de un operador explícito en diferencias finitas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \approx \frac{P_{i,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (60)$$

Las derivadas de segundo orden de  $P$  con respecto a  $x$  y  $z$  de la ecuación (53) se aproximan de forma similar:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \approx \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \approx \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta z^2}, \quad (62)$$

para la derivada de cuarto orden cruzada de  $F$  se aproxima con el siguiente operador :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{4F_{i,j} - 2(F_{i-1,j} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i,j+1}) + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1} + F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1}}{\Delta x^2 \Delta z^2}, \quad (63)$$

donde  $x = i\Delta x$ ,  $z = j\Delta z$ , pasos en la malla en dirección  $x$  y  $z$ ,  $N = n\Delta t$ , al paso en el tiempo.  $F$  en la ecuación (53) se calcula usando la siguiente fórmula (Alkhalifah (2000)):

$$F_{i+1}(x, y, z) = 2F_i(x, y, z) - F_{i-1}(x, y, z) + \Delta t^2 P_i(x, y, z), \quad (64)$$

y  $P$  es calculada a través de:

$$P_{i+1}(x, y, z) = 2P_i(x, y, z) - P_{i-1}(x, y, z) + \Delta t^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right)_{i,j} \quad (65)$$

Donde  $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$  es la aproximación en diferencias finitas del nuevo laplaciano en (61). Teniendo en cuenta los operadores diferenciales, descritos por las ecuaciones (60 -65), la ecuación (53) que representa el medio acústico VTI 2D de manera continua, se expresa con el siguiente esquema discreto en diferencias finitas, en el cual la malla se es homogénea ( $\Delta x = \Delta z = \Delta h$ ) junto con los campos calculados en (64) y (65)

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{n+1} = & a_1 C [P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n] + a_2 C [P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n] \\ & - \frac{a_3 C}{\Delta h^2} \left[ 4F_{i,j} - 2(F_{i-1,j} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i,j+1}) \right. \\ & \left. + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1} + F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1} \right] \\ & + 2P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1}, \end{aligned} \quad (66)$$

donde  $a_1 = (1 + 2\eta)v_{nmo}^2$ ,  $a_2 = v_{p0}^2$ ,  $a_3 = 2\eta v_{nmo}^2 v_{p0}^2$  y  $C = \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta h^2}\right)$ , el anterior esquema se programa considerando condiciones de estabilidad y dispersión numérica adecuadas (Zhang (2005)). La ondicula que simula la fuente del pulso está dada por la expresión (Scales (1997)):

$$f_s(t) = \left[1 - 2 \left(\frac{w_0(t - t_0)}{2}\right)^2\right] e^{-\left(\frac{w_0(t - t_0)}{2}\right)^2}, \quad (67)$$

donde  $w_0$  y  $t_0$ , es la frecuencia y el tiempo inicial del pulso.

## 6 SOLUCIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN ACÚSTICA TTI

La ecuación (59) representa la propagación de ondas sísmicas en un medio acústico homogéneo con anisotropía polar con el eje inclinado cierto ángulo  $\phi$  (TTI) (Zhang (2005)).

Para resolver la ecuación, las derivadas de segundo orden de  $P$  con respecto a  $t$ ,  $x$  y  $z$ , se aproximan con operadores en diferencias finitas según las ecuaciones (60-62) respectivamente.

Para las derivadas cuartas de  $F_{i,j}$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^2} = \frac{F_{i+2,j} - 4F_{i+1,j} + 6F_{i,j} - 4F_{i-1,j} + F_{i-2,j}}{\Delta x^2} \quad (68)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2} = \frac{F_{i,j+2} - 4F_{i,j+1} + 6F_{i,j} - 4F_{i,j-1} + F_{i,j-2}}{\Delta z^2}, \quad (69)$$

para la derivada cruzada de  $P$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} = \left[\frac{1}{4\Delta h^2}\right] (P_{i+1,j+1}^n - P_{i+1,j-1}^n - P_{i-1,j+1}^n + P_{i-1,j-1}^n), \quad (70)$$

para las derivadas cruzadas de  $F$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} = \left[\frac{1}{\Delta h^4}\right] (4F_{i,j} - 2(F_{i-1,j} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i,j+1}) + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1} + F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1}) \quad (71)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial z^3} = \left[\frac{1}{4\Delta h^4}\right] (F_{i+1,j+2} - 2F_{i+1,j+1} + 2F_{i+1,j-1} - F_{i+1,j-2} - F_{i-1,j+2} + 2F_{i-1,j+1} - 2F_{i-1,j-1} + F_{i-1,j-2}) \quad (72)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial z} = \left[\frac{1}{4\Delta h^4}\right] (F_{i+2,j+1} - F_{i+2,j-1} + 2F_{i+1,j+1} + 2F_{i+1,j-1} + F_{i-1,j+1} - 2F_{i-1,j-1} - F_{i-2,j+1} - F_{i-2,j-1}) \quad (73)$$

Usando los anteriores operadores en diferencias finitas en la ecuación (59), obtiene un es-

quema explícito para modelar el campo de onda para diferentes valores de  $\phi$ .

$$\begin{aligned}
 P_{i,j}^{n+1} = & b_1 C [P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n] + b_2 C [P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n] \\
 & + \frac{b_3 C}{4} (P_{i+1,j+1}^n - P_{i+1,j-1}^n - P_{i-1,j+1}^n + P_{i-1,j-1}^n) \\
 & - \frac{b_4 C}{\Delta h^2} [4F_{i,j} - 2(F_{i-1,j} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i,j+1}) \\
 & \quad + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1} + F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1}] \\
 & - b_5 C [F_{i,j+2} - 4F_{i,j+1} + 6F_{i,j} - 4F_{i,j-1} + F_{i,j-2}] \\
 & + \frac{b_6 C}{\Delta h^2} (F_{i+1,j+2} - 2F_{i+1,j+1} + 2F_{i+1,j-1} - F_{i+1,j-2} \\
 & \quad - F_{i-1,j+2} + 2F_{i-1,j+1} - 2F_{i-1,j-1} + F_{i-1,j-2}) \\
 & - \frac{b_6 C}{4\Delta h^2} (F_{i+2,j+1} - F_{i+2,j-1} + 2F_{i+1,j+1} + 2F_{i+1,j-1} \\
 & \quad + F_{i-1,j+1} - 2F_{i-1,j-1} - F_{i-2,j+1} - F_{i-2,j-1}) \\
 & - b_5 C [F_{i+2,j} - 4F_{i+1,j} + 6F_{i,j} - 4F_{i-1,j} + F_{i-2,j}]
 \end{aligned} \tag{74}$$

Donde  $b_1 = [v_{P_0}^2 \sin^2 \phi + (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \cos^2 \phi] v_{nmo}^2$ ,  $b_2 = [v_{P_0}^2 \cos^2 \phi + (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \sin^2 \phi]$ ,  $b_3 = [v_{P_0}^2 - (1 + 2\eta) v_{nmo}^2] \sin(2\phi)$ ,  $b_4 = v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta (2 - 3 \sin^2(2\phi))$ ,  $b_5 = \frac{1}{2} v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin^2(2\phi)$ ,  $b_6 = v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin(4\phi)$ , y  $C = \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta h^2}\right)$ . Las condiciones de estabilidad y dispersión numérica fueron obtenidas del trabajo de Zhang (2005).

## 7 CURVAS DE VELOCIDAD DE FASE PARA LAS ONDAS P Y SV

### 7.1 Medio elástico VTI y TTI

Las curvas de velocidad de fase exacta se obtienen según la ecuación (41) y (43), estas curvas son obtenidas para las ondas  $P$  y  $SV$  en un medio elástico con anisotropía polar vertical (VTI) y teniendo en cuenta los siguientes valores para las velocidades,  $v_{p0} = 3000(m/s)$ ,  $v_{s0} = 1500(m/s)$ , los parámetros de anisotropía de Thomsen,  $\varepsilon = 0.25$  y  $\delta = 0.1$  (Ver figura 3).

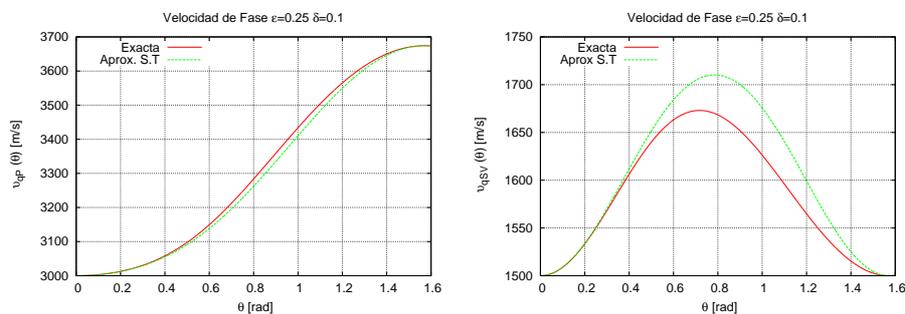


Figure 3: Velocidad de fase exacta (línea roja continua) y la aproximación en serie de Taylor (línea verde a trazos) para las ondas  $P$  (izquierda) y  $SV$  (derecha) con  $v_{p0} = 3000(m/s)$ ,  $v_{s0} = 1500(m/s)$ ,  $\varepsilon = 0.25$  y  $\delta = 0.1$  en un medio VTI.

Se obtiene también las curvas de velocidad de fase según la ecuación (48) y (49) para las ondas  $P$  y  $SV$  en un medio elástico con anisotropía polar inclinada (TTI), teniendo en cuenta

los siguientes valores para las velocidades,  $v_{p0} = 3000(m/s)$ ,  $v_{s0} = 1500(m/s)$ , los parámetros de anisotropía,  $\varepsilon = 0.25$  y  $\delta = 0.1$ . Las curvas se presentan para diferentes valores de  $\phi$ ; para un ángulo  $\phi = 30^\circ$ , para un ángulo  $\phi = 45^\circ$ , para un ángulo  $\phi = 60^\circ$  y para un ángulo  $\phi = 90^\circ$  (Ver figuras (4)-(7)).

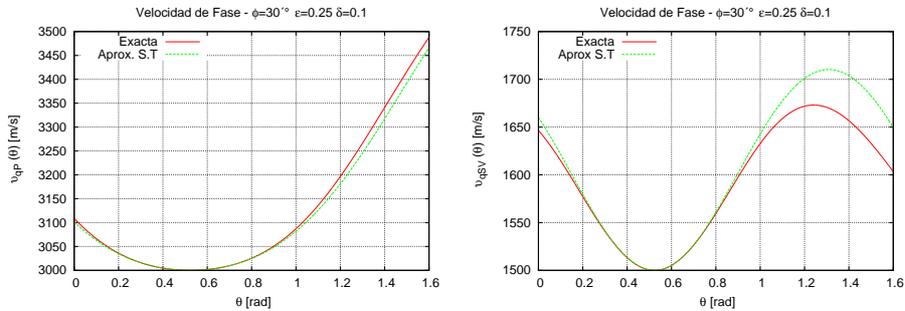


Figure 4: Velocidad de fase exacta (línea roja continua) y la aproximada (línea verde a trazos) para las ondas P (izquierda) y SV (derecha) con  $v_{p0} = 3000(m/s)$ ,  $v_{s0} = 1500(m/s)$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $\delta = 0.1$  y  $\phi = 30^\circ$  en un medio TTI.

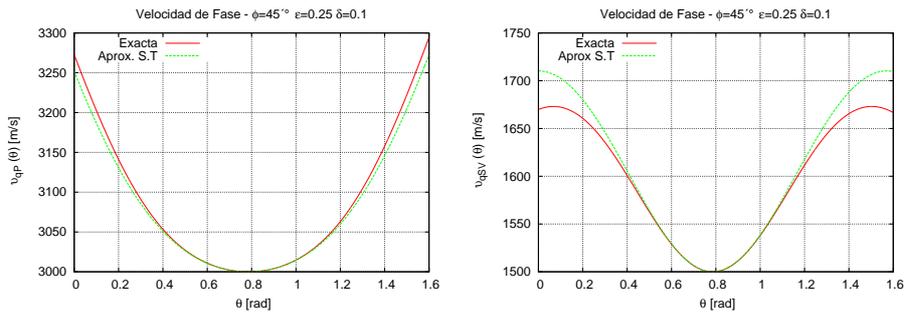


Figure 5: Velocidad de fase exacta (línea roja continua) y la aproximada (línea verde a trazos) para las ondas P (izquierda) y SV (derecha) en un medio VTI con  $v_{p0} = 3000(m/s)$ ,  $v_{s0} = 1500(m/s)$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $\delta = 0.1$  y  $\phi = 45^\circ$  en un medio TTI.

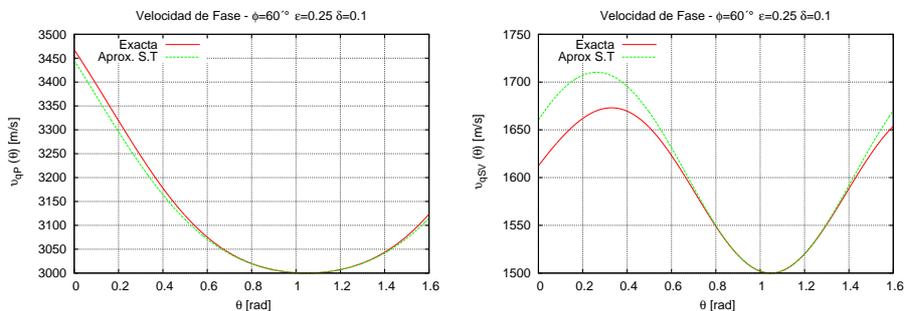


Figure 6: Velocidad de fase exacta (línea roja continua) y la aproximada (línea verde a trazos) para las ondas P (izquierda) y SV (derecha) con  $v_{p0} = 3000(m/s)$ ,  $v_{s0} = 1500(m/s)$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $\delta = 0.1$  y  $\phi = 60^\circ$  en un medio TTI.

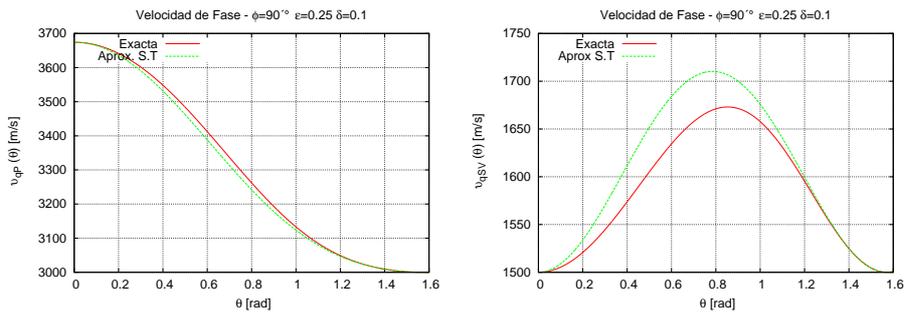


Figure 7: Velocidad de fase exacta (linea roja continua) y la aproximada (linea verde a trazos) para las ondas P (izquierda) y SV (derecha) con  $v_{p0} = 3000(m/s)$ ,  $v_{s0} = 1500(m/s)$ ,  $\epsilon = 0.25$ ,  $\delta = 0.1$  y  $\phi = 90^\circ$  en un medio TTI .

### 7.2 Anisotropía elíptica

Las curvas de velocidad de fase se obtienen de la ecuación (43), en la figura (8) se observa el comportamiento de las velocidades de la onda  $P$  y  $SV$  cuando se considera anisotropía elíptica, ( $\epsilon = \delta$ ) con valores que se encuentran entre  $0 < \epsilon < 0.25$  y  $0 < \delta < 0.25$ , según esto, el frente de onda para la onda  $P$  es elíptico y para la onda  $SV$  es esférico. Se obtiene en la figura (9), las curvas de velocidad de fase de las ondas  $P$  y  $SV$  en el caso donde,  $\epsilon = 0$  y  $0 < \delta < 0.25$ , en la figura (10) se obtiene las curvas de velocidad de fase de las ondas  $P$  y  $SV$  en el caso donde  $\delta = 0$  y  $0 < \epsilon < 0.25$ .

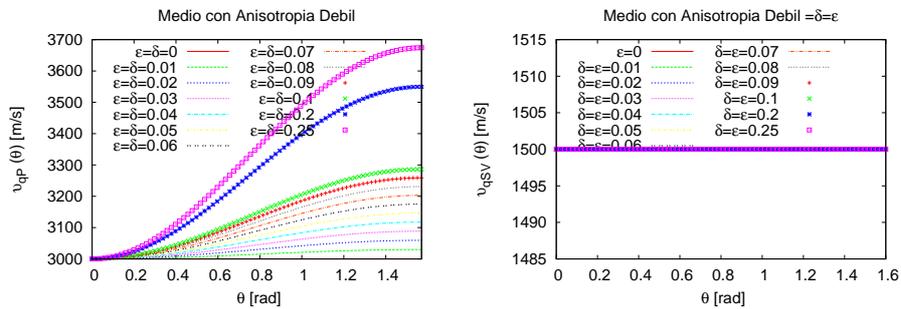


Figure 8: Velocidad de fase de la Onda P (izquierda) y SV (derecha) considerando anisotropía elíptica  $0 < \epsilon = \delta < 0.25$  en un medio VTI.

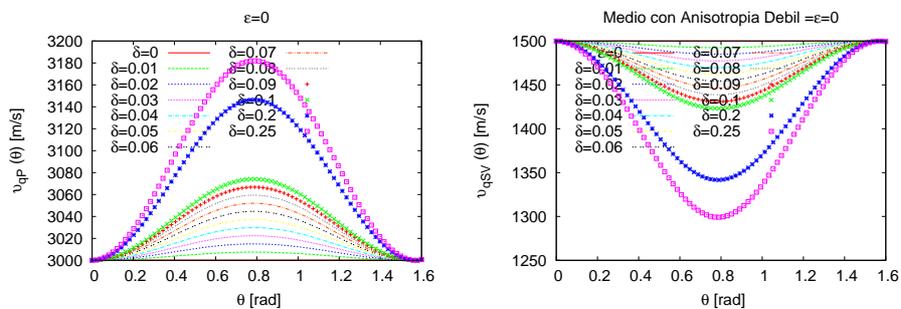


Figure 9: Velocidad de fase de la Onda P (izquierda) y SV (derecha) con  $\epsilon = 0$  y  $0 < \delta < 0.25$  en un medio VTI.

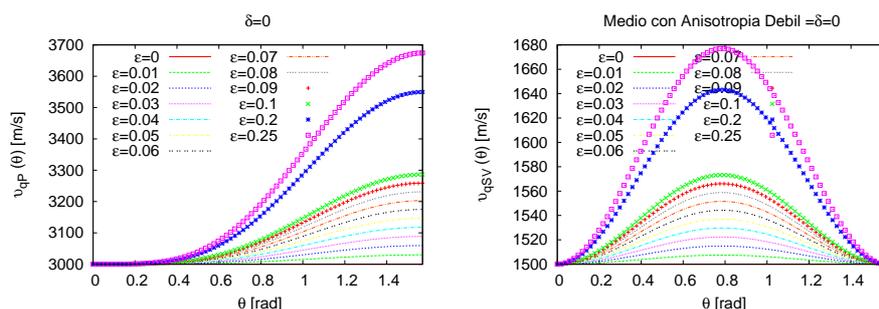


Figure 10: Velocidad de fase de la Onda P (izquierda) y SV (derecha) considerando  $\delta = 0$  y  $0 < \epsilon < 0.25$  en un medio VTI.

### 7.3 Medio acústico homogéneo TTI

En la figuras (11) y (12) se compara las tres velocidades de fase para la onda  $P$  para diferentes valores de inclinación  $\phi = 30^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $\phi = 60^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$  respectivamente; usando la fórmula exacta de la velocidad (ecuación 45), la aproximada (ecuación 46) y la fórmula de Alkhalifah (48). Los valores de anisotropía son  $\epsilon = 0.2$  y  $\delta = 0.1$  y densidad  $\rho = 1000[kg/m^3]$ , velocidad de la onda P  $v_{p0} = 3000(m/s)$  y onda SV  $v_{s0} = 1500(m/s)$ .

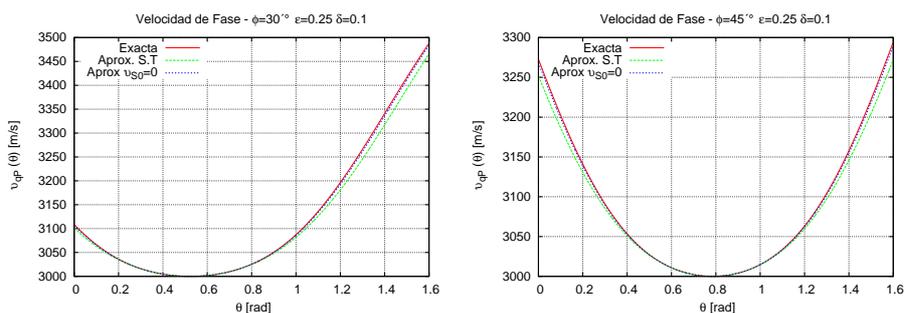


Figure 11: Velocidad de fase exacta (línea roja), la aproximada (línea verde), y fórmula de Alkhalifah (línea azul) para la onda  $P$  en un medio TTI donde  $\phi = 30^\circ$  (izquierda) y  $\phi = 45^\circ$  (derecha).

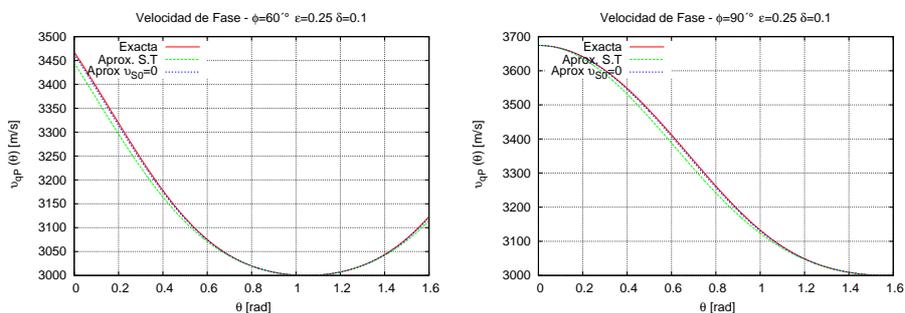


Figure 12: Velocidad de fase exacta (línea roja), la aproximada (línea verde), y fórmula de Alkhalifah (línea azul) para la onda  $P$  en un medio TTI donde  $\phi = 60^\circ$  (izquierda) y  $\phi = 90^\circ$  (derecha).

## 8 RESULTADOS

Considerando el esquema discreto de la ecuación (66) se modela un medio acústico homogéneo considerando anisotropía polar vertical para dos modelos sencillos, el Modelo 1 consiste de una sola capa horizontal homogénea y el modelo 2 consiste de 3 capas horizontales homogéneas.

### 8.1 Modelo 1: una sola capa horizontal

En el primer modelo se considera una sola capa, se obtiene el campo de onda de un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical (VTI) y su registro sísmico, se consideran diferentes valores de anisotropía,  $\eta$ . En todos los casos las dimensiones del modelo son,  $500(m)$  de longitud por  $250(m)$  de profundidad, la ondícula que simuló la fuente se ubica en la posición  $(x_s, z_s) = (250, 125)(m)$ , la frecuencia fundamental de la ondícula es  $60(Hz)$ , el paso en malla es homogéneo,  $dx = dz = 1(m)$ , el paso en tiempo es de,  $dt = 0.1(ms)$  y la componente de la velocidad de la onda P, es de  $v_{p0} = 1000(m/s)$ . En el registro sintético se ubican 350 geófonos a lado y lado de la fuente en una posición  $(g_x, g_z) = (250, 100)(m)$ .

*Caso 1: Medio Isótropo* En el primer caso, se considera un medio acústico homogéneo isótropo (ver ecuación 58). Los valores correspondientes a los parámetros de Thomsen son respectivamente,  $\delta = 0$  y  $\varepsilon = 0$ , las velocidades  $v_{nmo}$ , y  $v_{p0}$ . Se obtiene el frente de onda esférico (ver imagen izquierda en la Figura 13) y el registro sísmico (ver imagen derecha en la Figura 13).

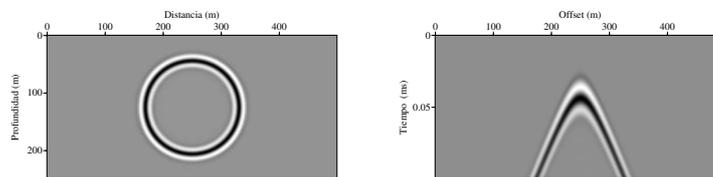


Figure 13: Campo de onda en un medio acústico homogéneo isótropo (izquierda) y el registro sísmico (derecha), en un tiempo de  $0.1(ms)$ . El valor para la velocidad  $v_{p0} = 1000(m/s)$ , y los parámetros de anisotropía son  $\eta = 0$ ,  $\delta = 0$  y  $\varepsilon = 0$ .

#### *Caso 2: Medio con Anisotropía Elíptica VTI*

El segundo caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía “elíptica”, (ver ecuación 57). Los valores de anisotropía de Thomsen son iguales, ( $\delta = 0.2$  y  $\varepsilon = 0.2$ ), y por esta razón  $\eta = 0$ , con la diferencia al caso anterior, de que, las velocidades  $v_{nmo}$ , y  $v_{p0}$  son distintas. Se obtiene el frente de onda elíptico (ver imagen izquierda en la Figura (14) y el registro sísmico para este tipo de medio (ver imagen derecha en la Figura (14) ).

#### *Caso 3: Medio con Anisotropía VTI, $\eta = 0.1$*

El tercer caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical, (ver ecuación (53)). Los valores de anisotropía son:  $\eta = 0.1$ ,  $\delta = 0.2$  y  $\varepsilon = 0.34$ . Se obtiene el frente de onda para la onda compresional, P y la onda con menor velocidad, SV (ver imagen izquierda en la Figura (15)). En el registro se observa la presencia de esta onda SV, con un

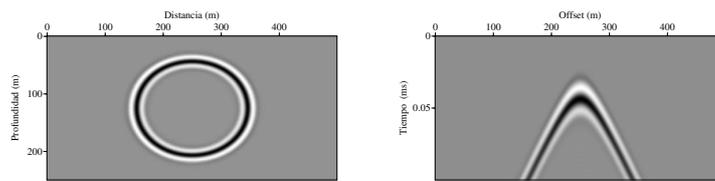


Figure 14: Campo de onda en un medio acústico homogéneo con anisotropía elíptica (izquierda) y el registro sísmico (derecha), en un tiempo de  $0.1(m.s)$ . El valor para la velocidad  $v_{p0} = 1000(m/s)$ , y los parámetros de anisotropía son  $\eta = 0$ ,  $\delta = 0.2$  y  $\varepsilon = 0.2$ .

comportamiento dispersivo, resultado de la condición  $v_{s0} = 0$ , en la aproximación acústica de la ecuación (53).

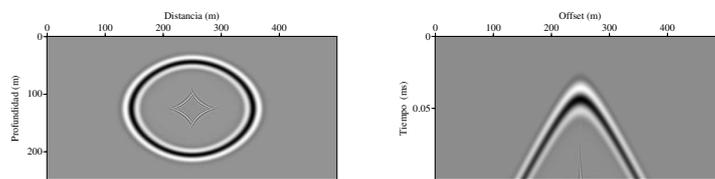


Figure 15: Campo de onda en un medio acústico homogéneo anisótropo VTI (izquierda) y el registro sísmico (derecha), en un tiempo de  $0.1(m.s)$ . El valor para la velocidad  $v_{p0} = 1000(m/s)$ , y los parámetros de anisotropía son  $\eta = 0.1$ ,  $\delta = 0.2$  y  $\varepsilon = 0.34$ .

#### Caso 4: Medio con Anisotropía VTI, $\eta = 0.2$

El cuarto caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical, (ver ecuación (53)). Los valores de anisotropía correspondientes son  $\eta = 0.2$ ,  $\delta = 0.2$  y  $\varepsilon = 0.48$ . Se obtiene el frente de onda para las ondas P y SV (ver imagen izquierda en la Figura (16)) y se observa mas acentuado el efecto inherente de la onda SV en el registro sísmico (ver imagen derecha en la Figura (16)).

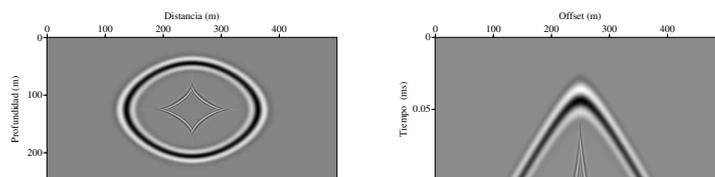


Figure 16: Campo de onda en un medio acústico homogéneo anisótropo VTI (izquierda) y el registro sísmico (derecha), en un tiempo de  $0.1(m.s)$ . El valor para la velocidad  $v_{p0} = 1000(m/s)$ , y los parámetros de anisotropía son  $\eta = 0.2$ ,  $\delta = 0.2$  y  $\varepsilon = 0.48$ .

#### Caso 5: Medio con Anisotropía VTI, $\eta = 0.5$

El quinto caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical, (ver ecuación (53)). Los valores de anisotropía correspondientes son  $\eta = 0.5$ ,  $\delta = 0.2$  y  $\varepsilon = 0.9$ . Se obtiene el campo de onda P y SV (ver imagen izquierda en la Figura (17)) y el correspondiente registro ( ver imagen derecha en la Figura (17)).

#### Caso 6: Medio con Anisotropía VTI, $\eta = 1.0$

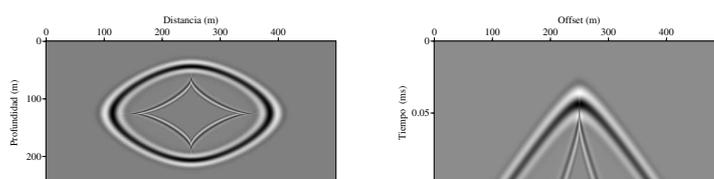


Figure 17: Campo de onda en un medio acústico homogéneo anisótropo VTI (izquierda) y el registro sísmico (derecha), en un tiempo de  $0.1(m.s)$ . El valor para la velocidad  $v_{p0} = 1000(m/s)$ , y los parámetros de anisotropía son  $\eta = 0.5$ ,  $\delta = 0.2$  y  $\varepsilon = 0.9$ .

El último caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical, (ver ecuación (53)). Los valores de anisotropía correspondientes son  $\eta = 1.0$ ,  $\delta = 0.2$  y  $\varepsilon = 1.6$ . Se obtiene el frente de onda para una anisotropía fuerte en las dos ondas P y SV (ver imagen izquierda en la Figura (18)) e igualmente, se observa en el registro ( ver imagen derecha en la Figura (18)).

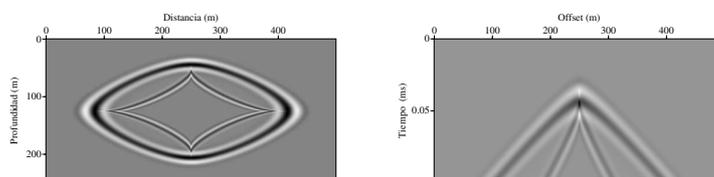


Figure 18: Campo de onda en un medio acústico homogéneo anisótropo VTI (izquierda) y el registro sísmico (derecha), en un tiempo de  $0.1(m.s)$ . El valor para la velocidad  $v_{p0} = 1000(m/s)$ , y los parámetros de anisotropía son  $\eta = 1.0$ ,  $\delta = 0.2$  y  $\varepsilon = 1.6$ .

## 8.2 Modelo 2: tres capas horizontales

Este modelo 2 consiste en tres capas dispuestas horizontalmente, el primer cambio de litología se encuentra a  $100(m)$ , y el segundo a  $250(m)$ . Las dimensiones del modelo son  $1500(m)$  de longitud por  $500(m)$  de profundidad, la ondícula que simula la fuente se ubica en la posición  $(x_s, z_s) = (500, 30)(m)$ , la frecuencia fundamental de la ondícula  $60(hz)$ , el paso en malla es homogéneo ( $dx = dz = 1(m)$ ), el paso temporal de  $dt = 0.1(m.s)$ . Se ubicaron geófonos para registrar la información en una posición  $(g_x, g_z) = (500, 30)(m)$ . *Caso 1: Primera capa horizontal,  $\eta = 0.0$*  El primer caso, se considera un medio acústico heterogéneo con anisotropía VTI, en donde, el valor de velocidad de la primera capa isótropa es de  $v_{p0}^1 = 1000(m/s)$ , la velocidad en la segunda capa  $v_{p0}^2 = 1500(m/s)$  y en la tercera capa  $v_{p0}^3 = 2000(m/s)$ . Los valores de anisotropía son respectivamente  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 0.1$   $\eta_3 = 0.2$ . En todas las capas, el valor de anisotropía de Thomsen,  $\delta = 0.2$ , excepto en la capa isótropa. En la Figura (19) se presenta el campo de onda evacuado para diferentes tiempos, a  $0.1(m.s)$  ( ver imagen superior izquierda), a  $0.2(m.s)$  (ver imagen superior derecha), a un tiempo de  $0.3(m.s)$  ( ver imagen inferior izquierda), y el registro sísmico a  $0.35(m.s)$  (ver imagen inferior derecha). Se puede observar en la Figura (19), que al ubicar la fuente en una capa isótropa, no aparece ningún rastro de la onda SV, ni en el modelado, ni tampoco en el sismograma. *Caso 2: Primera capa horizontal,  $\eta = 0.1$*  Se modela la propagación para tres capas horizontales homogéneas pero con la diferencia en la primera capa, esta capa posee un valor  $\eta = 0.2$  y una velocidad  $v_{p0} = 1000(m/s)$ , la segunda capa posee un valor de anisotropía  $\eta = 0.3$  y una velocidad  $v_{p0} = 1500(m/s)$  y la tercera capa

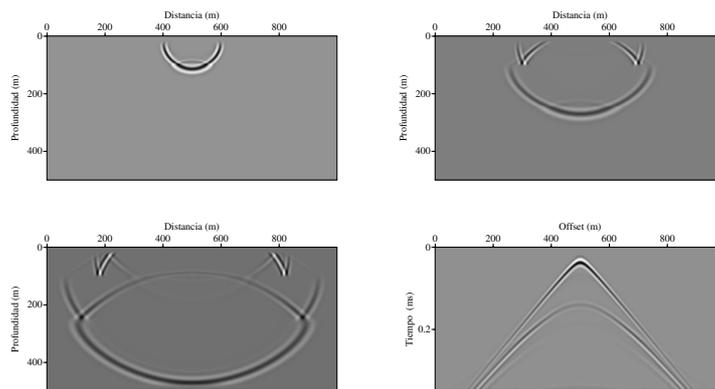


Figure 19: Campo de onda en un tiempo de  $0.1(m/s)$  (arriba izquierda),  $0.2(m/s)$  (arriba derecha),  $0.3(m/s)$  (abajo izquierda) y registro sísmico a  $0.35(m/s)$  (abajo derecha), donde la primera capa es isotropa.

tiene  $\eta = 0.4$  y un valor  $v_{p0} = 2000(m/s)$ . En la Figura (20) se presenta el campo de onda evacuado para diferentes tiempos, a  $0.1(m/s)$  ( ver imagen superior izquierda), a  $0.2(m/s)$  ( ver imagen superior derecha), a un tiempo de  $0.3(m/s)$  ( ver imagen inferior izquierda), y el registro sísmico a  $0.35(m/s)$  ( ver imagen inferior derecha). Se puede observar en la Figura (20) que a diferencia de la figura anterior se observa el efecto inherente de la onda SV, tanto en el campo de onda modelado como, en el registro sísmico, agregando ruido a la señal y deteriorandola.

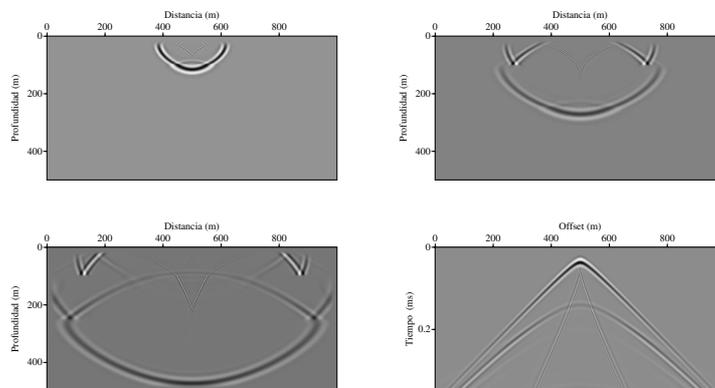


Figure 20: Campo de onda para el modelo 2 en un tiempo de  $0.1(m/s)$  (arriba izquierda),  $0.2(m/s)$  (arriba derecha),  $0.3(m/s)$  (abajo izquierda) y registro sísmico a  $0.35(m/s)$  (abajo derecha), donde la primera capa es anisótropa.

### 8.3 Modelado sísmico de un medio acústico homogéneo TTI

Para modelar el campo de onda en un medio acústico homogéneo TTI se considero un modelo de  $500(m)$  de longitud por  $250(m)$  en profundidad. La ondicula es simulada en  $(x_z, z_s) = (250, 125)(m)$ , el tamaño en el tiempo es  $dt = 0.1(m/s)$  y el tamaño de la celda homogénea es de  $dx = dz = 1(m)$ . El valor de anisotropía para el primer caso es de:  $\eta = 0.1$ , y  $\delta = 0.2$ . La velocidad de la onda P, es  $v_{p0} = 1000(m/s)$ . Se obtiene en la Figura (21) el campo de onda a diferentes inclinaciones;  $\phi = 30^\circ$  ( ver imagen superior izquierda ),  $\phi = 45^\circ$  ( ver imagen superior derecha),  $\phi = 60^\circ$  ( ver imagen inferior izquierda ) y  $\phi = 90^\circ$  ( ver imagen inferior derecha). Para el segundo caso, el valor de anisotropía es de  $\eta = 0.2$ , y  $\delta = 0.2$ . La velocidad de la onda P,

es  $v_{p0} = 1000(m/s)$ . Se obtiene en la Figura (22) el campo de onda a diferentes inclinaciones;  $\phi = 30^\circ$  (ver imagen superior izquierda),  $\phi = 45^\circ$  (ver imagen superior derecha),  $\phi = 60^\circ$  (ver imagen inferior izquierda) y  $\phi = 90^\circ$  (ver imagen inferior derecha). En las Figuras (21) y (22) se observa el efecto de la onda SV, al considerarse la condición,  $v_{s0} = 0$ , dentro de la ecuación (59).

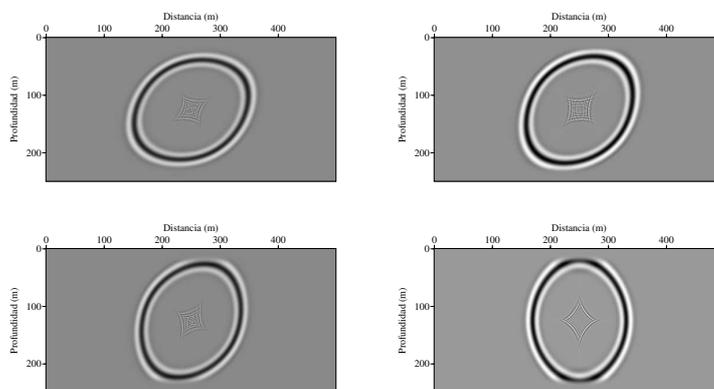


Figure 21: Campo de onda acústico TTI, en un tiempo de  $0.1(ms)$ , para  $\phi = 30^\circ$  (arriba izquierda),  $\phi = 45^\circ$  (arriba derecha),  $\phi = 60^\circ$  (abajo izquierda) y  $\phi = 90^\circ$  (abajo derecha) para un medio TTI considerando  $\eta = 0.1$  y  $\delta = 0.2$ .

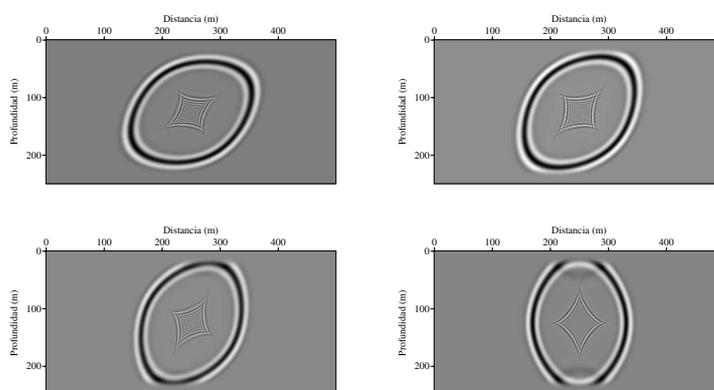


Figure 22: Campo de onda acústico TTI, en un tiempo de  $0.1(ms)$ , para  $\phi = 30^\circ$  (arriba izquierda),  $\phi = 45^\circ$  (arriba derecha),  $\phi = 60^\circ$  (abajo izquierda) y  $\phi = 90^\circ$  (abajo derecha) para un medio TTI considerando  $\eta = 0.2$  y  $\delta = 0.2$ .

## 9 CONCLUSIONES

Se comparó las velocidades de fase para las ondas P y SV, considerando las relación exacta para el medio elástico y la aproximación de anisotropía débil. En donde se pudo observar una mejor aproximación a las curvas exactas en las ondas P, que para la onda SV, cuando se tenia en cuenta anisotropía débil, .

Se comparó las velocidades de fase para la onda P considerando la relación exacta del medio elástico, la aproximación acústica y la aproximación de anisotropía débil. Se pudo observar una mejor aproximación a la velocidad exacta con la aproximación acústica, pese a la consideración impuesta para la onda SV ( $v_{s0} = 0$ ).

Se obtuvo curvas para las velocidades de fase considerando anisotropía elíptica ( $\varepsilon = \delta$ ) y se pudo observar que en este caso, la onda P presenta frentes elípticos y la onda SV presenta frentes de onda esféricos, tal y cual como lo muestra Thomsen en libro de 2002.

Se obtuvo curvas de velocidad de fase, para rocas con ciertos parámetros de Thomsen,  $\varepsilon = 0$  y  $\delta \neq 0$  y para el caso contrario en que  $\delta = 0$  y  $\varepsilon \neq 0$ , y se pudo observar, que se hace necesario una medición de anisotropía de estos dos parámetros a  $45^\circ$  como lo recomienda Thomsen en su trabajo de 2002, y así evitar interpretaciones erróneas.

Se desarrolló algoritmos numéricos que modelan la propagación de ondas sísmicas en medios acústicos homogéneos y heterogéneos con anisotropía polar vertical (VTI) y medios homogéneos con anisotropía polar inclinada (TTI) basados en Diferencias Finitas.

Para evitar los efectos inherentes de la onda SV, en el modelado con la ecuación acústica VTI y TTI completa, es recomendable colocar la fuente sísmica en una capa isotrópica. Cabe aclarar que aún sigue la discusión, del por qué sucede este fenómeno, cuando se modela con este tipo de ecuación de onda.

## 10 AGRADECIMIENTOS

Al Grupo de Geofísica del Instituto Colombiano del Petróleo (ICP), de Ecopetrol por el patrocinio en el programa de Maestría en Ciencias de la Tierra de la Universidad EAFIT y al Departamento de Matemáticas y Física de la Universidad de Pamplona por el apoyo que le dieron a esta investigación.

## REFERENCES

- Aki K. and Richards P. *Quantitative Seismology: Second Edition*. University Science Books, 2002.
- Alkhalifah. An acoustic wave equation for anisotropic media. *Geophysics*, 65:1239–1250, 2000.
- Alkhalifah T. and Tsvankin I. Velocity analysis for transversely isotropic media. *Geophysics*, 63:623–631, 1995.
- Alkhalifah T. and Tsvankin I. Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media. *Geophysics*, 60:1550–1556, 1998.
- Armstrong Phi. e.a. The promise of elastic anisotropy. *Oilfield Review*, 32, 1994.
- Backus G. Long wave elastic anisotropy produce by horizontal layering. *Journal Of Geophysical Research*, 67:4427–4440, 1962.
- Berryman J. Long-wave elastic anisotropy in transversely isotropic media. *Geophysics*, 44:896–917, 1979.
- Daley P. and Hron F. Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media. *Geophysics*, 67:661–675, 1977.
- Du X. Prestack depth migration methods for isotropic and polar anisotropic media,. *PhD Thesis: University of Calgary, Calgary*, 2007.
- Johnston J. and Christensen N.I. Seismic anisotropy of shale. *Journal of Geophysical Prospecting*, 7:158–182, 1995.
- Jones L.E.A. and Wang H.F. trasonic velocities in cretaceous shales from the williston basin:. *Geophysics*, 46:228–297, 1981.
- Leslie J. and Lawton D. Refraction-seismic field study to determine the anisotropic parameters of shales. *Geophysics*, 64:1247–1252, 1999.
- Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity:. *Cambridge University Press*,

*Cambridge*, 1927.

Scales J. Theory of seismic imaging,. *Center of Wave Phenomena, Department of Geophysics, Colorado School of Mines, Golden Colorado, Published by the Samizdat Press*, 1997.

Slawinski M. Seismic wave rays in elastic media. *Handbook of geophysical exploration*, 34, 2003.

Thomsen. L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, 51:1954–1966, 1986.

Toldi J. A.T.B.P.A.J.W.P.y.C.B.. Case of study of estimation of anisotropy. *The Leading Edge*,, 18:588–593, 1999.

Winterstein D. Velocity anisotropy terminology for geophysicist. *Geophysics*, 55:1070–1088, 1990.

Zhang . Finite difference modelling of wave propagation in acoustic tilted ti media,. *Report Anual, Laboratory Berkeley, Berkeley, USA.*, 2005.