

## UM ACOPLAMENTO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE DE DOMÍNIOS REFORÇADOS CONSIDERANDO MODELO DE ADERÊNCIA

Fabio C. da Rocha<sup>a</sup>, Wilson S. Venturini<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Grupo de Mecânica Computacional, Universidade de São Paulo, Campus Av. Trabalhador São Carlense 400, 13566-970 São Carlos - SP, Brasil, fabcivil@sc.usp.br, <http://www.set.eesc.usp.br>*

<sup>b</sup>*Grupo de Mecânica Computacional, Universidade de São Paulo, Campus Av. Trabalhador São Carlense 400, 13566-970 São Carlos - SP, Brasil, venturin@sc.usp.br, <http://www.set.eesc.usp.br>*

**Palavras-Chave:** Método dos Elementos de Contorno, Acoplamento MEC/MEF, Modelo de Aderência.

**Resumo.** O presente trabalho realiza uma combinação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) com o Método dos Elementos Finitos (MEF) em análise bidimensional de sólidos elastostáticos reforçados, sendo considerados modelos de aderência no acoplamento. O Método dos Elementos de Contorno é adotado para modelar o comportamento do domínio, enquanto que o método de Elementos Finitos é utilizado para modelar o enrijecedor. Para a formulação do acoplamento, um polinômio do terceiro grau é adotado para aproximar tanto o campo de deslocamentos quanto às rotações do enrijecedor, enquanto que aproximações lineares são usadas para representar a força de contato entre o domínio e o enrijecedor. Os modelos de escorregamento apresentados são lineares e governados em função do carregamento escrito em termos das forças de contato e o deslocamento relativo. A partir da combinação entre o MEC e o MEF obtém-se uma matriz retangular contendo duas equações para o MEC e uma para o MEF. O resultado das equações algébricas redundantes é eliminado pela aplicação do procedimento dos mínimos quadrados. Exemplo ilustra o bom ajuste, mostrando assim a potencialidade da formulação do acoplamento entre os dois materiais, considerando modelos de aderência ou não.

## 1 INTRODUÇÃO

Em projetos de Engenharia Estrutural a simulação numérica possui um papel de crescente importância. Isto pode ser atribuído ao rápido avanço de poderosos computadores e de softwares de qualidade resultando na diminuição do custo da simulação computacional comparado aos elevados custos e/ou dificuldades práticas dos experimentos. Porém, para complementar ou até mesmo substituir experimentos, a simulação deve ter um elevado grau de eficiência, precisão e confiabilidade. Esse elevado grau de exigência pode não ser dependente somente do modelo físico e matemático que é escolhido para o sistema real que se deseja simular, mas também na escolha da própria ferramenta de simulação, por exemplo, o Método dos Elementos de Contorno, e em habilidades de utilizá-lo.

Para que seja obtido sucesso na resolução numérica do problema é necessário o completo conhecimento da ferramenta numérica que está sendo usada, onde o processo de solução frequentemente não é direto. Vários parâmetros têm que ser escolhidos, alguns dos quais aumentam a velocidade no processo da solução, enquanto outros podem não conduzir a soluções impossíveis ou podem resultar em soluções erradas quando aplicados incorretamente.

Devido à robustez dos dois métodos mais utilizados em problemas de Engenharia, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos finitos (MEF), neste trabalho procurou-se aproveitar o que estes métodos têm de melhor a oferecer. Com este objetivo, este trabalho realiza o acoplamento entre o MEC e o MEF. A técnica do acoplamento realizado neste trabalho é semelhante aos apresentados nos trabalhos de (Botta, 2003) e (Leonel, 2009). A diferença é que nos trabalhos de (Botta, 2003) e (Leonel, 2009) foram utilizados elementos de barra com um único grau de liberdade de deslocamento paralelo ao eixo da barra. Já neste trabalho, utilizam-se elementos com três graus de liberdade por nós, dois para o deslocamento e um para rotação.

A técnica de regularização por mínimos quadrados é utilizada neste trabalho devido às diferentes aproximações das grandezas forças e deslocamentos utilizados no MEF, ocasionando desta forma, mais equações do que incógnitas. E o segundo motivo é devido à utilização de mais pontos internos nos extremos dos enrijecedores com o intuito de suavizar as respostas, gerando assim mais equações

## 2 EQUAÇÕES BÁSICAS

Neste item são abordadas as equações básicas do MEC e do MEF utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

### 2.1 Equações de Elementos Finitos

Para modelar os enrijecedores foi utilizado o elemento finito de pórtico modificado. Este elemento possui três graus de liberdades por nó e a aproximação cúbica para as variáveis de deslocamento e rotação é utilizada. Sendo assim, o elemento possui 4 nós sendo que para cada um dos nós são estabelecidas duas translações (vertical e horizontal) e uma rotação. Foi empregada a cinemática geral de Reissner desenvolvida para elementos laminados (Paccola, 2004), já utilizado anteriormente por (Wutzow e Venturini, 2004).

Para um ponto qualquer de um pórtico as componentes horizontais e verticais dos deslocamentos são dadas por:

$$u_p(x, y) = u_0(x) + \theta_0(x) \cdot y \tag{1}$$

$$V_p(x, y) = V_0(x) \tag{2}$$

Sendo  $x$  e  $y$  o sistema de referência no centro da camada. Para facilitar o entendimento das expressões apresentadas nas eqs. (1) e (2), a Figura 1 ilustra o deslocamento do ponto  $P$  em relação ao eixo do elemento.

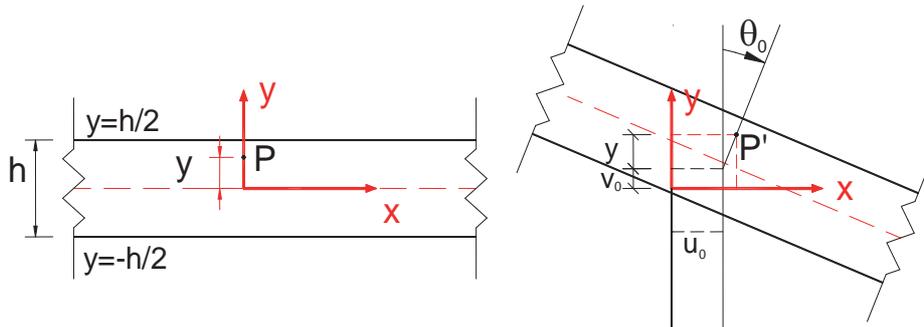


Figura 1 – Cinemática de um ponto “P” qualquer. (Wesley, 2008)

Obtido os deslocamentos através das expressões cinemáticas adotadas para o problema, pode-se então determinar as deformações em função das derivadas das equações cinemáticas.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u_p(x, y)}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x, y) &= 0 \\ \varepsilon_{xy}(x, y) &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_p(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_p(x, y)}{\partial x} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

Aplicando a lei constitutiva para os materiais, obtêm as tensões para o ponto  $P$  do elemento de viga:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E\varepsilon_x \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{4}$$

O equilíbrio é introduzido a partir do Princípio da Mínima Energia Potencial. Assim, tem-se:

$$U_e = \int \left( \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \gamma_{xy} \tau_{xy}) \right) dv \tag{5}$$

$$U_e = \int_{-1}^1 \left( \int_A \left( G \left( \theta_0(\xi) + \frac{2v_0'(\xi)}{L} \right) + \frac{4E \left( u_0'(\xi) + y\theta_0'(\xi) \right)^2}{L^2} \right) dA \right) d\xi \tag{6}$$

A parcela de energia referente ao carregamento distribuído pode ser descrito como sendo:

$$U_p = \int_{-1}^1 (t_x u_0^x + t_y u_0^y) d\xi. \quad (7)$$

Portanto o funcional de energia completo, contendo a parcela de carregamento distribuído, é descrito por:

$$\Pi = U_e - U_p \quad (8)$$

$$\Pi = \int_V \left( \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \gamma_{xy} \tau_{xy}) \right) dV - \int_A (t_x u_0^x + t_y u_0^y) dA \quad (9)$$

Sendo utilizado neste trabalho aproximações cúbicas independentes para os deslocamentos  $u_0$ ,  $v_0$  e  $\theta_0$ , mostradas:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{i=1}^4 \bar{\phi}_i^u u_0^i \\ v_0 &= \sum_{i=1}^4 \bar{\phi}_i^v v_0^i \\ \theta_0 &= \sum_{i=1}^4 \bar{\phi}_i^\theta \theta_0^i. \end{aligned} \quad (10)$$

Sendo  $\bar{\phi}_i^u = \bar{\phi}_i^v = \bar{\phi}_i^\theta = \bar{\phi}_i$ , onde  $\bar{\phi}_i$  são funções de forma apresentadas nas eqs. (11):

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1(\xi) &= -\frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ \bar{\phi}_2(\xi) &= +\frac{27}{16} (\xi + 1) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ \bar{\phi}_3(\xi) &= -\frac{27}{16} (\xi + 1) \left( \xi + \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ \bar{\phi}_4(\xi) &= +\frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi + 1) \end{aligned} \quad \text{com } -1 \leq \xi \leq +1 \quad (11)$$

No referente às forças na interface do acoplamento ( $t_x$  e  $t_y$ ) são adotadas aproximações lineares:

$$t_x = \sum_{i=1}^2 \phi_i^{t_x} t_x^i, \quad t_y = \sum_{i=1}^2 \phi_i^{t_y} t_y^i \quad \text{sendo } \phi_i^{t_x} = \phi_i^{t_y} = \phi_i \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{Onde} \quad \phi_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} \\ \phi_2(\xi) &= \frac{1+\xi}{2} \end{aligned} \quad \text{com } -1 \leq \xi \leq +1 \quad (13)$$

Minimizando a eq. (8) e utilizando as aproximações acima, chega-se ao sistema algébrico de equações dadas da seguinte forma:

$$\left[ K^E \right]_{3NF \times 3NF} \{ U^E \}_{3NF \times 1} = \left[ G^E \right]_{3NF \times 2NF_{extr}} \{ f^E \}_{2NF_{extr} \times 1} + \{ F \}_{3NF \times 1}, \quad (14)$$

Onde:  $\left[ K^E \right]$  é a matriz de rigidez do MEF,

$\left[ G^E \right]$  é a matriz referente às cargas distribuídas,

$\{ U^E \}$  é o vetor com as incógnitas de deslocamento (translações e rotação),

$\{ f^E \}$  é o vetor de forças distribuídas,

$\{ F \}$  é o vetor de forças concentradas nodais,

$NF$  é o número de nós de finitos (quarto por elemento),

$NF_{extr}$  é o número de nós de finitos extremos (dois por elementos).

## 2.2 Equações de Elementos de Contorno

Será agora apresentada a formulação do Método dos Elementos de Contorno utilizado neste trabalho.

O equacionamento do problema elástico via método dos elementos de contorno pode ser efetuado com sucesso e de forma explícita empregando o princípio da reciprocidade de Betti, o qual pode ser apresentado por meio da eq. (15).

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^I \cdot \varepsilon_{ij}^{II} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{II} \cdot \varepsilon_{ij}^I d\Omega \quad (15)$$

Aplicando esta equação para a formulação do método dos elementos de contorno, deve-se substituir um dos estados do problema pelo estado fundamental, ou seja, representado pelas soluções fundamentais. Desenvolvendo a equação integral, obtém-se a equação integral (16).

$$u_i(f) + \int_{\Gamma} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega \quad (16)$$

A equação (16) representa a identidade Somigliana, a qual fornece os valores de deslocamentos e tensões em qualquer ponto do domínio dependendo dos valores dos deslocamentos e forças de superfície, conhecido sobre o contorno, as forças de corpo e das soluções fundamentais.

Como o método dos elementos de contorno pertence à classe das técnicas de contorno, torna-se necessário transformar a equação (16), válida para todo domínio, em uma equação integral válida somente para valores de contorno. A equação abaixo pode ser obtida de forma detalhada na referência (Venturini, 1998). Obtendo assim a expressão da identidade Somigliana escrita para o contorno:

$$c_{il}(f, c) \cdot u_l(f) + \int_{\Gamma} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega \quad (17)$$

Sendo:  $\int$  a integral de valor principal de Cauchy.

O termo  $c_{il}$ , é dependente da geometria do contorno analisado. Conforme apresenta (Venturini, 1998) os valores para esse termo podem ser obtidos empregando-se o seguinte tensor:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} + \frac{\text{Cos}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} & \frac{\text{Sen}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \\ \frac{\text{Sen}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} & \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} + \frac{\text{Cos}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Sendo  $\alpha$  e  $\gamma$  dependente da posição do ponto singular sobre o contorno. A [Figura 2](#) ilustra a obtenção dessas variáveis.

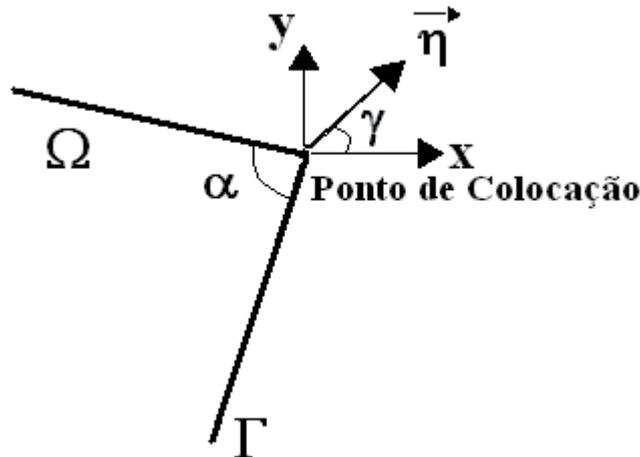


Figura 2 – Parâmetro para cálculo da equação integral sobre o contorno.

Se o ponto de colocação não estiver sob um ponto de angulosidade, ao contrário da [Figura 2](#), o tensor (18) torna-se igual a uma matriz identidade multiplicada por  $1/2$ .

### 3 FORMULAÇÃO DO ACOPLAMENTO MEC/MEF CONSIDERANDO A PERDA DE ADERÊNCIA ENTRE O ENRIJECEDOR E O DOMÍNIO

Neste item será apresentada a formulação utilizada, assim como o modelo utilizado para representar a perda de aderência entre o domínio e o enrijecedor. Convém constatar que a intenção de utilização do modelo de aderência, aqui apresentado, é meramente para apresentar a capacidade da formulação do acoplamento MEC/MEF considerando a perda de aderência.

#### 3.1 Modelo de Aderência

Enrijecedor embutido no domínio pode ser uma importante situação para modificar a rigidez do sólido e a capacidade de suportar carregamento, caso as forças transmitidas entre os dois materiais forem adequadas. A situação ideal onde ocorre a aderência perfeita é impossível na prática, pois na vizinhança das extremidades do enrijecedor onde as forças da interface tendem ao infinito, ocorre o escorregamento.

Para considerar o efeito da perda de aderência entre o enrijecedor/domínio podem ser considerados modelos que descrevem este escorregamento entre os dois materiais. O objetivo deste trabalho é apenas mostrar a viabilidade de inserir qualquer modelo de aderência considerando a formulação descrita abaixo entre o MEC e o MEF. Como exemplo é mostrado um modelo com comportamento linear entre o deslocamento relativo e as forças de transferência.

O modelo apresentado na [Figura 3](#) consiste de dois patamares e uma região de declive. Esta

representação tem como parâmetros os pares  $(S_1, f_{\max})$  e  $(S_2, f_{\text{res}})$ , onde os  $S_i$  para  $i = 1, 2$  são os deslocamentos relativos entre os materiais, e  $f_{\max}$  e  $f_{\text{res}}$  são as forças máximas e residuais do acoplamento, respectivamente. Este modelo simula, em um primeiro momento, situações onde se tem uma aderência perfeita do enrijecedor e o domínio até atingir a  $f_{\max}$ . Atingido este valor ocorre um aumento no deslocamento relativo para uma mesma força aplicada, mas a partir de  $S_1$  as forças de transferências começam a diminuir até atingir um deslocamento relativo  $S_2$ , onde é obtida a força final ou residual do modelo, daí em diante a transferência da força de contato permanece constante e igual à força residual (Rocha, 2009).

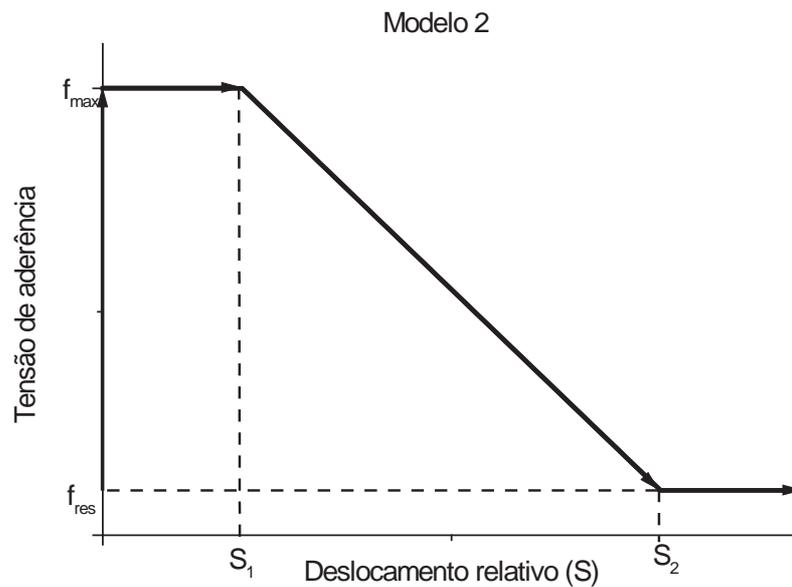


Figura 3 - Gráfico da tensão de aderência pelo deslocamento relativo

### 3.2 Formulação do Acoplamento MEC/MEF com Modelo de Escorregamento

O problema do escorregamento introduz uma variável  $S$ , referente ao escorregamento relativo entre o domínio e o enrijecedor. As equações de compatibilidade agora são expressas por:

$$\{f^D\} = -\{f^E\} = \{f\} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} U^E &= U \\ U^D &= U^E + S \Rightarrow U^D = U + S \end{aligned} \quad (20)$$

Onde:

$f^D$  é a força do domínio do corpo

$f^E$  é a força no enrijecedor

$u^D$  é o deslocamento nos pontos nodais do domínio

$u^E$  é o deslocamento nos pontos nodais do enrijecedor

ou seja, o equilíbrio e a compatibilização são por nó de interface. Para o problema tratado, ou seja,

domínios planos com enrijecedores retilíneos, a reação dos enrijecedores sobre o domínio equivale a uma linha de carga aplicada ao domínio do corpo. Esta linha de carga, por equilíbrio com a força admitida linear no elemento finito, tem a forma de uma seqüência de trechos lineares ligando nós consecutivos, conforme ilustra a Figura 4.

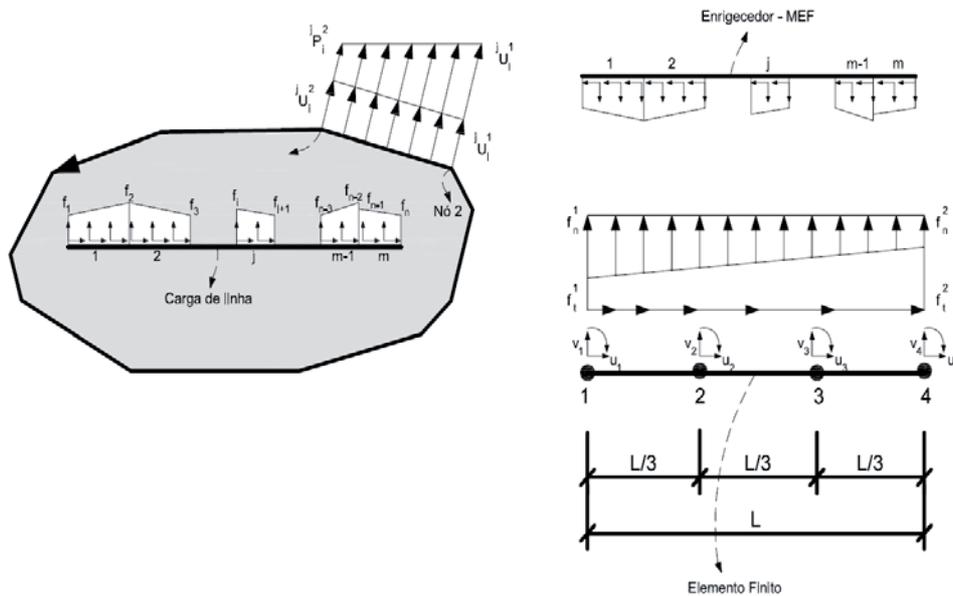


Figura 4 – Discretização do contorno e da linha de carga. Aproximação de forças e dos deslocamentos na interface

A linha de carga aparece nas equações como se fosse uma força de massa aplicada numa área que tende a zero, ou a uma reta, nos casos planos. Utilizando a eq. (16), a última integral referente ao termo de domínio pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} u_{il}^*(f, c) b_l(c) d\Omega = \int_{\Omega} u_{il}^*(f, c) \cdot f^D(c) d\Omega \quad (21)$$

com  $f^D$  a reação da fibra sobre o domínio segundo a direção  $i$  e  $l$  do sistema cartesiano.

A expressão para a determinação das grandezas do contorno é representada na eq. (22)

$$[H_{BB}] \{U_B\} = [G_{BB}] \{P_B\} - [G_{BE}] \{f^D(S)\} \quad (22)$$

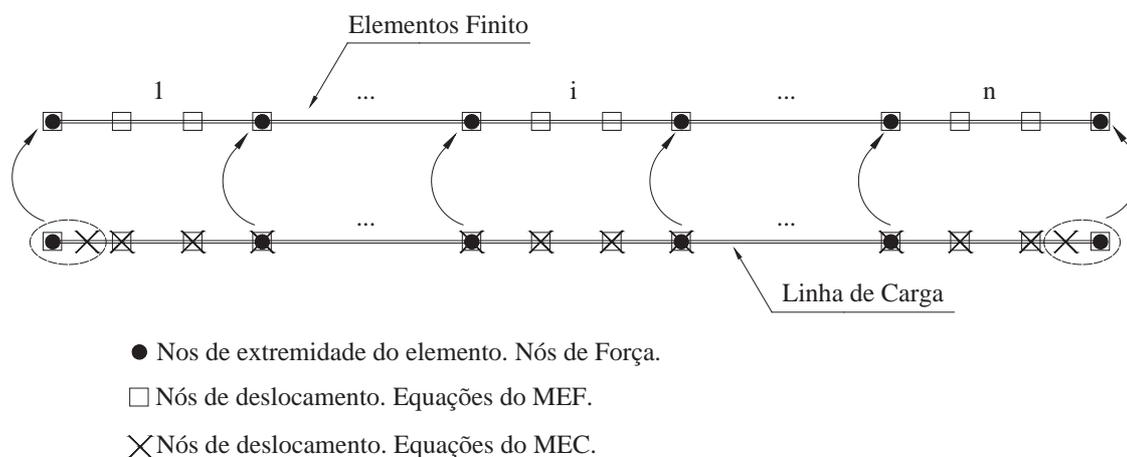
Sendo as matrizes  $[H_{BB}]$  e  $[G_{BB}]$  representando a matriz das integrais do contorno, onde os sub-índices  $B$  indicam contorno. A matriz  $[G_{BE}]$  contém os coeficientes de integração da equação da força de corpo, ou seja, integral realizada dos pontos do contorno em relação ao elemento, sub-índice  $E$ , do enrijecedor.

Para completar as equações necessárias ao acoplamento e portanto para a determinação dos parâmetros do contorno, falta montar as equações algébricas dos deslocamentos dos pontos internos.

A Figura 5, ilustra a representação de um enrijecedor, discretizado em  $n$  elementos finitos, e da linha de carga de domínio, superposta à barra. Os nós de deslocamento para cada elemento finito

estão representados por quadrados nesta figura. As cruces representam os pontos fontes da equação para pontos internos do MEC, que será melhor abordado mais tarde. Observa-se que nas extremidades da fibra, para o primeiro e o último nós, as equações do MEC não são escritas na posição dos nós, mas para uma posição deslocada, interna a linha de carga. Para os demais nós, interno à linha de carga, os pontos fontes da equação do MEC coincidem com os nós de deslocamento dos elementos finitos.

A representação da Figura 5 estende-se, nesta formulação, para todos enrijecedores do domínio. Esta representação tem a vantagem de permitir que as extremidades dos enrijecedores possam chegar ao contorno do corpo, sem que a equação do MEC necessite ser escrita para pontos no contorno.



**Figura 5 – Compatibilização entre os nós do MEC e do MEF.**

Com as posições dos nós definidas na Figura 5, a equação de compatibilização de deslocamento é reescrita como:

$$\{U^D\} = [T]\{U\} + [\bar{T}]\{S\} \quad (23)$$

Onde:

$[T]$  é a matriz que relaciona a posição dos nós de  $\{U^D\}$  e  $\{U\}$ ,

$[\bar{T}]$  é a matriz que relaciona a posição dos nós de  $\{U^D\}$  e  $\{S\}$ .

Os campos com os deslocamentos  $U$  e  $S$  da eq. (20) são independentes entre si, e podem ser aproximados por polinômios diferentes sobre cada elemento de barra. O deslocamento  $U$  é aproximado pelo polinômio cúbico definido no item 2.1 e o deslocamento relativo  $S$  será aproximado linearmente nesta formulação. A razão desta escolha é por ser o mesmo polinômio que aproxima as forças de superfície no elemento. Para este caso, os nós das aproximações das forças de superfície e do escorregamento devem coincidir, com base no modelo de aderência utilizado.

Sabendo que as equações do MEF são desenvolvidas em coordenadas locais, as do MEC em coordenadas globais e tendo as equações do MEC possuindo dois graus de liberdade por nós e o MEF três graus de liberdade, faz-se necessário realizar a compatibilização das dimensões e o sistema de referência. Diante deste fato a eq. (23) pode ser reescrita na seguinte forma matricial:

$$\{U^D\}_{2NF \times 1} = [T]_{2NF \times 3NF} [R]_{3NF \times 3NF} \{U\}_{3NF \times 1} + [\bar{T}]_{2NF \times 2NF_{extr}} \{S\}_{2NF_{extr} \times 1} \quad (24)$$

Onde:  $NF$  é o número de nós de elementos finitos,

$NF_{ext}$  é o número de nós extremos do elemento finito,

$[T]$  é a matriz que relaciona a posição dos nós de  $\{U^D\}$  e  $\{U\}$ ,

$[\bar{T}]$  é a matriz que relaciona a posição dos nós de  $\{U^D\}$  e  $\{S\}$ ,

$[R]$  é a matriz de rotação do sistema local para o global de referência.

Com a introdução do escorregamento relativo  $S$ , a eq. (16) de equilíbrio do MEC para pontos internos ao domínio deve ser reescrita como:

$$[H_{EB}]\{U_b\} + [R][T]\{U^E\} + [R][\bar{T}]\{S\} = [G_{EE}]\{P_b\} + [G_{EE}]\{f^D\}. \quad (25)$$

Utilizando a eq. (14) para o MEF do enrijecedor, a eq. (25) do MEC para pontos internos em coordenadas locais, a eq. (22) e aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$\begin{cases} [A_{BB}]\{X\} = [B_{BB}]\{F_B\} - [G_{EE}][\bar{R}]\{f^E(S)\} \\ [A_{EB}]\{X\} + [R][T]\{U^E\} + [R][\bar{T}]\{S\} = [B_{EB}]\{F_B\} - [G_{EE}][\bar{R}]\{f^E(S)\} \\ [\bar{K}^E]\{U^E\} = \{\bar{G}^E\}\{f^E(S)\} + \{\bar{F}\} \end{cases} \quad (26)$$

onde:  $\{f^D\} = -\{f^E(S)\}$  e  $\{f^E(S)\}$  depende do modelo de aderência que é função do deslocamento relativo  $S$ . E  $\{\bar{F}\}$  representa o vetor de carregamento nodal do MEF. Tendo as matrizes  $[\bar{K}^E]$ ,  $[\bar{G}^E]$  e o vetor  $\{\bar{F}\}$  referenciado ao sistema de coordenadas local (Rocha, 2009).

### 3.3 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Observando-se os vetores com as variáveis nodais do vetor deslocamento (neste vetor estão presente os dois deslocamentos e uma rotação nodal) e forças internas, e das definições para as aproximações desses campos sobre os elementos finitos, constata-se que existem mais variáveis referenciado ao vetor deslocamento do que em forças. O número de variáveis do vetor deslocamento interno é igual a três vezes o número total de nós do elemento finito enquanto que para as forças o número de variáveis é igual a duas vezes o número de nós de extremidades do elemento finito.

Para que o problema possa ser resolvido, utiliza-se um procedimento simples baseado na técnica dos mínimos quadrados. Como o número de equações é maior que o de incógnitas, é necessário reduzi-lo a um número conveniente. A técnica dos mínimos quadrados consiste em obter a melhor solução que aproxima à resposta do sistema de equações, fazendo desta forma a minimização, em uma determinada norma, do vetor residual  $r$ , onde  $r = Ax - b$ . Como consequência desta minimização é reduzido o número de equações, tornando o sistema linear resolvível e ainda podendo minimizar o erro da resposta quando levada ao sistema original (Süli e Mayer, 2007).

Leonel, 2009 utiliza a regularização por Mínimos Quadrados, aplicando para as equações de deslocamentos nos pontos internos do MEC, nas equações proveniente do MEF e a terceira aplicação é realizada sobre o conjunto total de equações do acoplamento. Com esta análise,

(Leonel, 2009) conclui que melhores resultados são obtidos aplicando o Método dos Mínimos Quadrados às equações do MEC dos pontos internos.

Partindo dos resultados obtidos em (Leonel, 2009), o processo de mínimos quadrados será aplicado para tentar regularizar as equações de deslocamentos nos pontos internos. Este processo consiste na pré-multiplicação de todos os termos dessa equação por uma matriz  $[G_{EE}^*]$ . Assim:

$$\begin{aligned} & [G_{EE}^*][A_{EB}]\{X\} + [G_{EE}^*][R][T]\{U^E\} + [G_{EE}^*][R][\bar{T}]\{S\} = \\ & [G_{EE}^*][B_{EB}]\{F_B\} - [G_{EE}^*][G_{EE}][\bar{R}]\{f^E(S)\} \end{aligned} \quad (27)$$

Onde a matriz  $[G_{EE}^*]$  é igual à transposta da matriz  $[G_{EE}]$ .

Desta forma a matriz final do acoplamento com Mínimo Quadrado fica:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [A_{BB}] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{K}^E] & [0] \\ [G_{EE}^*][A_{EB}] & [G_{EE}^*][R][T] & [G_{EE}^*][R][\bar{T}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{U^E\} \\ \{S\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{BB}] \\ [0] \\ [G_{EE}^*][B_{EB}] \end{bmatrix} \{F_B\} + \\ & + \begin{bmatrix} -[G_{EE}][\bar{R}] \\ \{\bar{G}^E\} \\ -[G_{EE}^*][G_{EE}][\bar{R}] \end{bmatrix} \{f^E(S)\} + \begin{Bmatrix} [0] \\ [\bar{F}] \\ [0] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

Neste trabalho foi utilizada a formulação incremental com controle de passos de carga ou deslocamento para poder obter o histórico da evolução da estrutura e verificar se as forças de interação entre o MEC e o MEF estão seguindo o modelo adotado, quando estes atingem suas forças de superfícies máximas. Assim a eq. (28) fica na forma incremental:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [A_{BB}] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{K}^E] & [0] \\ [G_{EE}^*][A_{EB}] & [G_{EE}^*][R][T] & [G_{EE}^*][R][\bar{T}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta X\} \\ \{\Delta U^E\} \\ \{\Delta S\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{BB}] \\ [0] \\ [G_{EE}^*][B_{EB}] \end{bmatrix} \{\Delta F_B\} + \\ & + \begin{bmatrix} -[G_{EE}][\bar{R}] \\ \{\bar{G}^E\} \\ -[G_{EE}^*][G_{EE}][\bar{R}] \end{bmatrix} \{\Delta f^E(S)\} + \begin{Bmatrix} [0] \\ [\Delta F] \\ [0] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

### 3.4 Exemplo

Neste exemplo considera-se a análise da perda de aderência de uma barra embutida num domínio plano. A estrutura considerada é apresentada na Figura 6 a qual é solicitada mediante a prescrição de um carregamento no nó da extremidade do enrijecedor. A carga aplicada na estrutura é equivalente a um deslocamento imposto de valor igual a  $4,0 \cdot 10^{-7} m$ . As dimensões geométricas adotadas foram  $H = 1,0m$ ,  $L_0 = 4,0m$  e  $L = 5,0m$ . Esta análise é realizada com o efeito do escorregamento da barra em um meio elástico.

A discretização utilizada foi de 120 elementos lineares para o Método dos Elementos de Contorno e para o enrijecedor foi utilizado 100 elementos finitos.

As propriedades dos materiais adotadas para o exemplo são as seguintes: para o domínio  $E_D = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\nu = 0,0$  e para o enrijecedor foi adotado  $E_F = 2,8 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $I_F = 1,79 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$  e  $S_F = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ . Foi considerado neste exemplo os seguintes parâmetros para o modelo de escorregamento:  $S_1 = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ ,  $S_2 = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ ,  $f_{\max} = 1,40 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$  e  $f_{\text{res}} = 1,30 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$ .

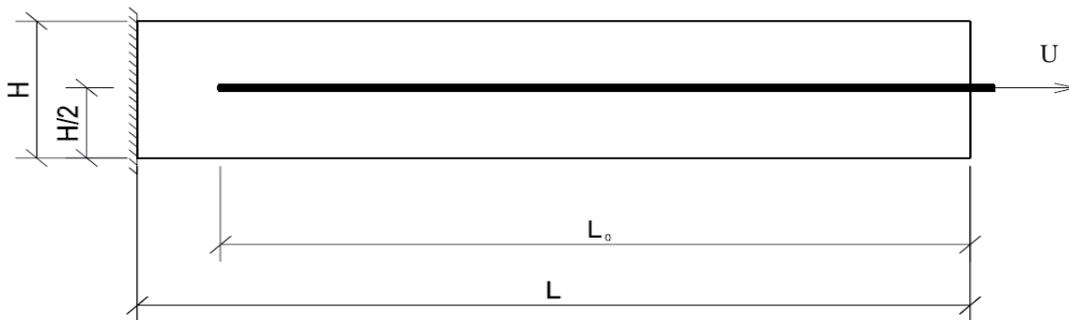


Figura 6 – Estrutura analisada

Na Figura 7 é apresentado as curvas com as forças de superfície ( $\text{N/m}$ ) ao longo do comprimento do enrijecedor por nove valores incrementais diferentes do deslocamento prescrito, mostrando assim a evolução da ação do arrancamento da barra em instantes diferentes.

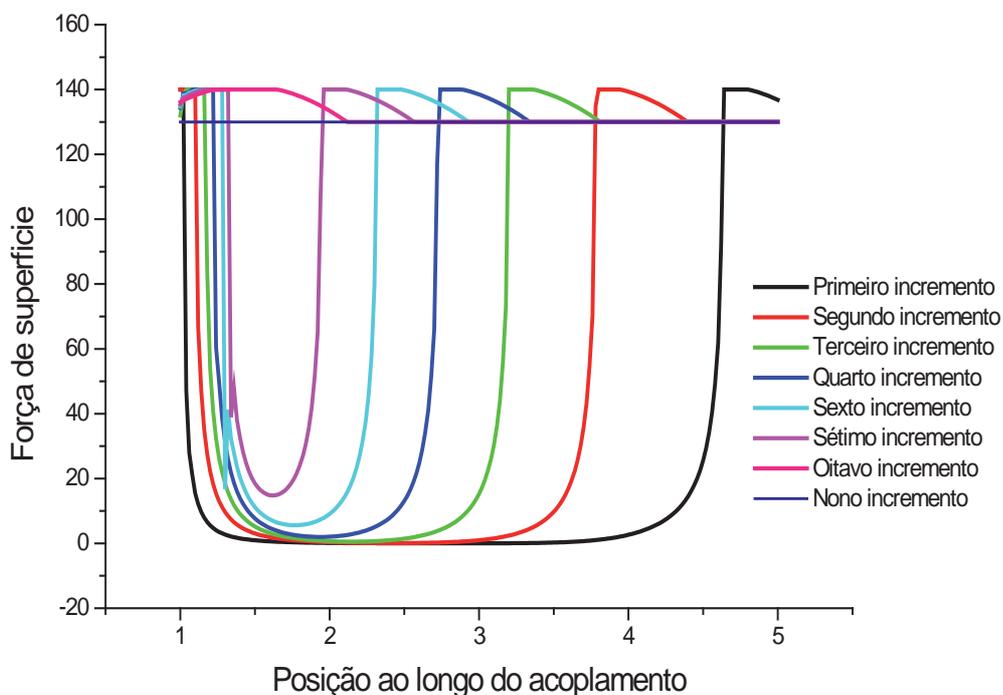
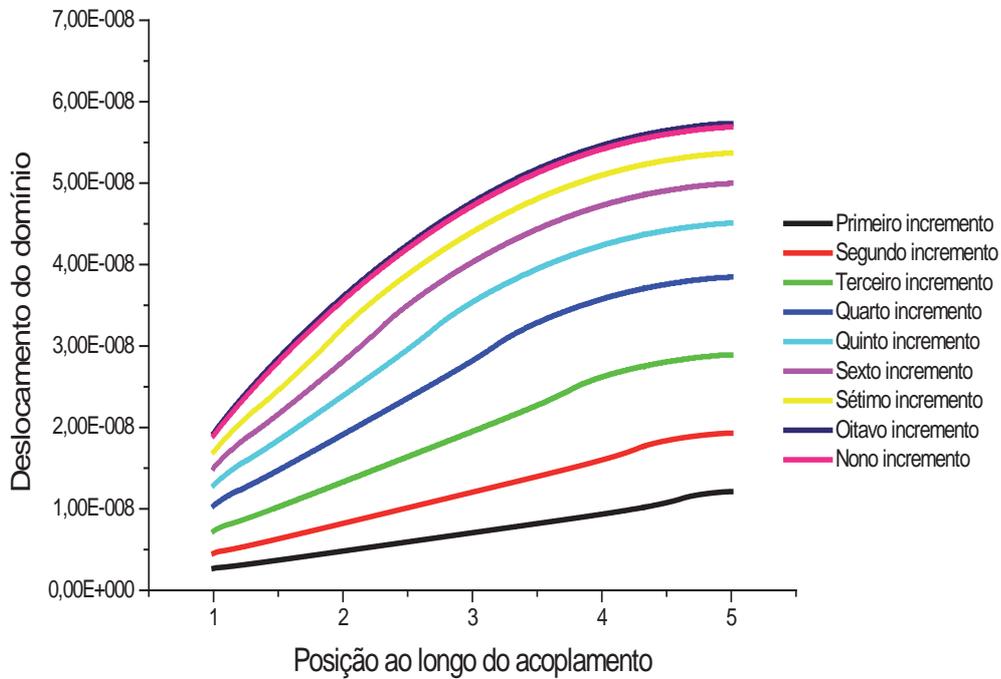


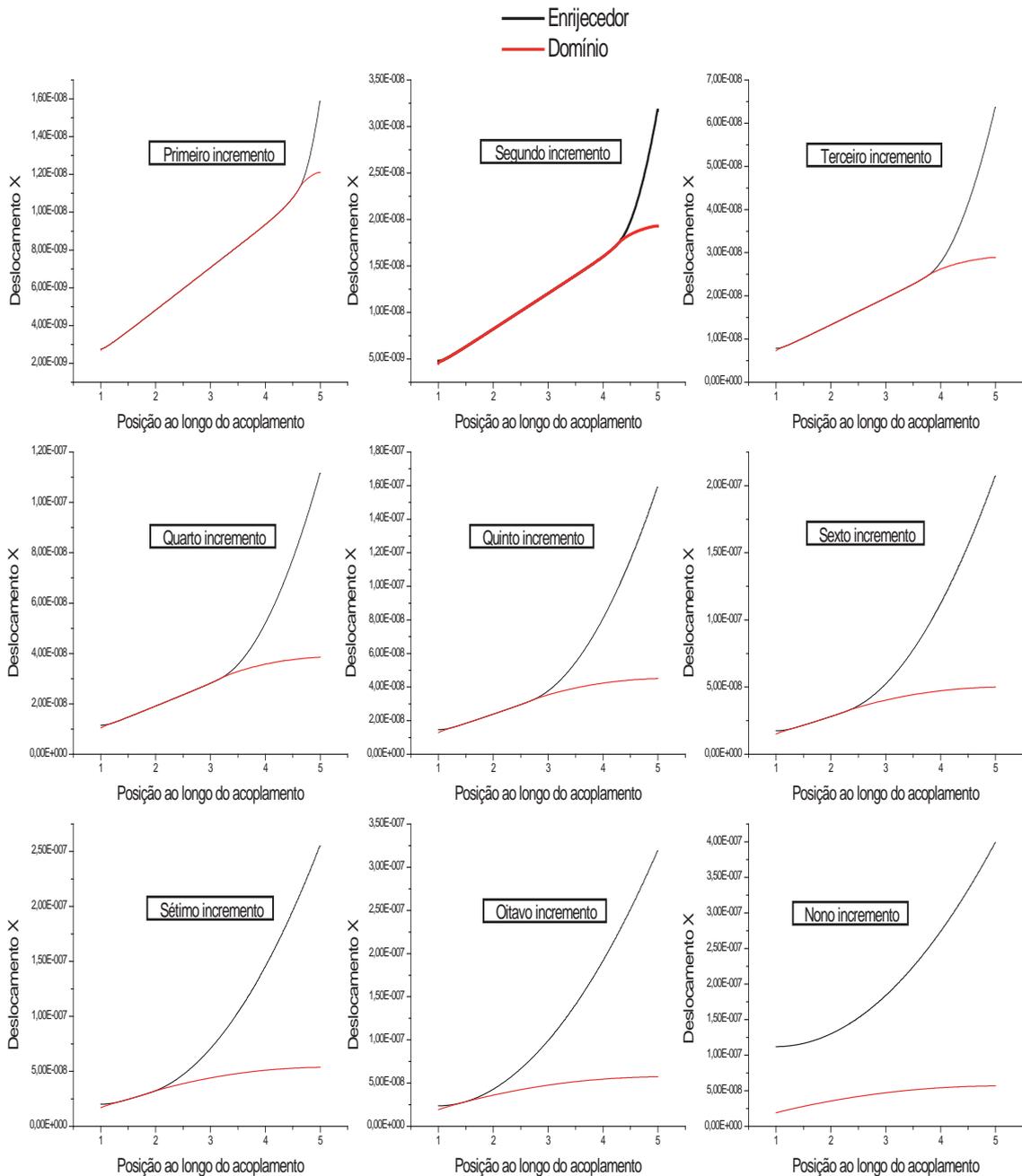
Figura 7 – Gráfico da evolução das forças de superfícies ao longo da região acoplada

Na **Figura 8** são apresentadas as curvas com os deslocamentos, em metros, dos pontos do meio contínuo localizado na interface com o enrijecedor. Verifica-se a diminuição do deslocamento, nos pontos localizados próximos à aplicação da carga, à medida que o carregamento evolui.



**Figura 8 – Evolução dos deslocamentos do domínio ao longo da interface.**

Os gráficos apresentados na **Figura 9** mostram a evolução da perda de aderência, através do desacoplamento dos deslocamentos do domínio e do enrijecedor.



**Figura 9 – Gráfico da evolução do desacoplamento dos deslocamentos do domínio e do enrijecedor.**

A Figura 9 ilustra a evolução da perda de aderência, em que os deslocamentos, em metros, do domínio não são mais iguais aos deslocamentos do enrijecedor. No primeiro incremento de deslocamento, verifica-se quase que todos os nós estão perfeitamente acoplados, exceto os da extremidade. À medida que vai aumentando o deslocamento outros nós começam a desacoplar até chegar à situação do nono incremento quando os deslocamentos do enrijecedor continuam aumentando e do domínio decresce.

Finalmente na Figura 10 são apresentadas as curvas dos deslocamentos relativos, em metros, entre os dois materiais. Pela definição apresentada na eq. (20) os deslocamentos do enrijecedor são

obtidos subtraindo-se os resultados apresentados na Figura 8 ao da Figura 10 mostrada abaixo.

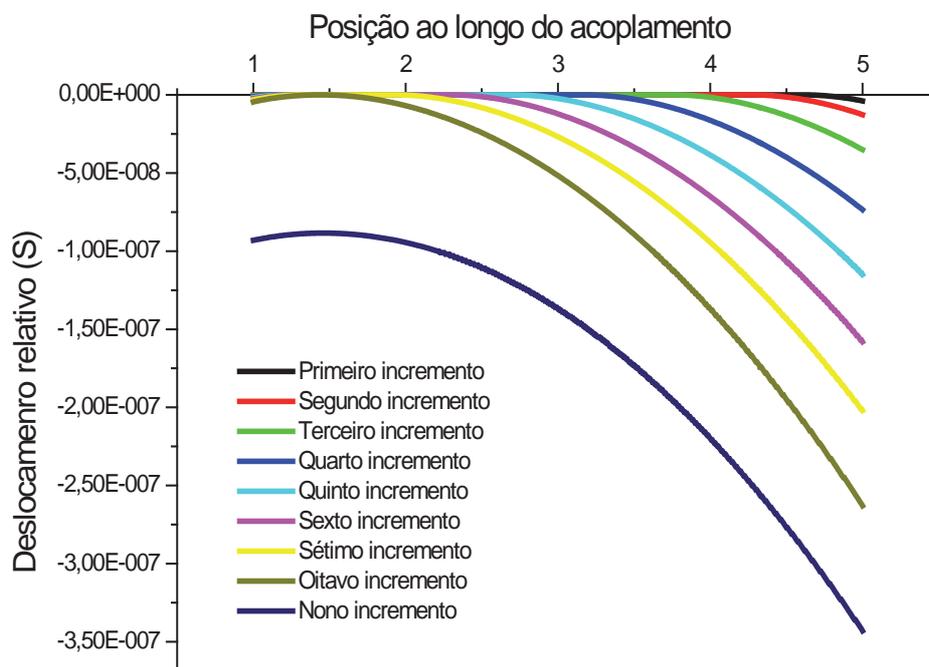


Figura 10 – Gráfico do deslocamento relativo entre o domínio e o enrijecedor.

#### 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho o domínio foi modelado pelo MEC e o enrijecedor pelo MEF. Para o desenvolvimento dos elementos do MEF foi utilizado a cinemática para elementos de pórticos bidimensionais semelhantes a desenvolvida por (Pacolla, 2004). A aproximação cúbica foi utilizada aos deslocamentos e às rotações para o elemento do MEF, sendo estas aproximações independentes, e um polinômio linear para as forças. Devido essa diferença de aproximação entre deslocamentos e forças, foram geradas, na formulação, mais equações que incógnitas tornando o sistema retangular e não resolvível. Para contornar este problema foi utilizado o Método dos Mínimos Quadrados, MMQ, para tornar as matrizes quadradas, e uma melhor regularização das respostas.

O efeito da perda de aderência entre o domínio e o enrijecedor foi considerado no presente trabalho. Esta consideração foi realizada através da inserção de um parâmetro adicional na equação de compatibilidade dos deslocamentos do domínio e do enrijecedor. Este parâmetro adicional foi o deslocamento relativo  $S$ , o qual foi aproximado por polinômios lineares. Esta aproximação foi motivada devido às forças serem aproximadas por polinômios lineares, e como o modelo adotado relaciona estas forças com os deslocamentos  $S$ , foi uma forma cômoda de obter os parâmetros nodais coincidirem.

Para a validação da formulação do acoplamento considerando o efeito do escorregamento, foi apresentado um exemplo. O exemplo constituía de uma barra submetida a uma carga axial simulando o arranque do enrijecedor ao domínio. Neste exemplo foram verificados valores coerentes de deslocamentos aos dois materiais, pois quando era atingida a força máxima do modelo

de aderência ocorria a diferença de deslocamento entre o enrijecedor e o domínio, ocasionado pelo deslocamento relativo  $S$ . E ainda neste exemplo, foi verificado a perfeita obediência das forças de contato na direção da barra quando os seus valores excedem ao preconizado pelo modelo adotado.

## 5 AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao CNPQ (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pela bolsa concedida para o desenvolvimento deste trabalho. Este trabalho foi desenvolvido a partir das idéias do saudoso professor Venturini e a este é cabível o mérito do mesmo.

## 6 REFERÊNCIAS

- Botta, A. S., Método dos Elementos de Contorno para Análise de Corpos Danificados com Ênfase no Fenômeno de Deformações. *Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 185 f., 2003.*
- Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method For Engineers*, London: Pentech Press, 1978.
- Rocha, F. C., Análise de Domínios Reforçados Através da Combinação MEC/MEF Considerando Modelos de Aderência. *Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.*
- Leonel, E. D., Modelos não Lineares do Métodos dos Elementos de Contorno para Análise de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e Otimização em Estruturas Submetidas a Fadiga. *Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.*
- Paccola, R. R., Análise Não Linear Física de Placas e Cascas Anisotrópicas Laminadas Acopladas ou Não Com Meio Contínuo Tridimensional Viscoelástica Através da Combinação entre o MEC e o MEF. *Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 190 f., 2004.*
- Süli, E., e Mayer, D., *An Introduction to Numerical Analysis*, London: Cambridge university Press, 2007.
- Venturini, W. S., Um Estudo sobre o Método dos Elementos de Contorno e suas Aplicações em Problemas de Engenharia. *Tese de livre Docência. Universidade de São Paulo, 1998.*
- Wutzow, W. W., e Venturini, W. S., Análise de Sólidos Enrijecidos 2D Utilizando a Combinação MEC/MEF Regularizada. *XXV CILAMCE – Iberian Latin American Congress on Computational Methods In Engineering, Recife, 2004.*
- Wutzow, W. W., Formulação do Método dos Elementos de Contorno para materiais Porosos Reforçados. *Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.*