

## USO DE WAVELETS EN EL REFINAMIENTO DE SOLUCIONES NUMÉRICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Victoria Vampa<sup>a,b</sup>, María T. Martín<sup>a</sup> and Eduardo Serrano<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina*

<sup>b</sup>*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina*

<sup>c</sup>*Universidad Nacional de San Martín, Buenos Aires, Argentina*

**Keywords:** wavelets, MRA, boundary value problems, B-splines.

**Abstract.** En los últimos años se ha extendido el desarrollo de métodos basados en wavelets para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Estos métodos se basan, en general, en la estructura autosimilar de un análisis multirresolución, utilizando la descomposición del espacio funcional en sub-espacios asociados a escalas espaciales sucesivas.

En ese sentido, una amplia variedad de propuestas realizadas se basan en el método Wavelet-Galerkin para la solución de problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs) y evidencian, en general, buenas propiedades de convergencia. Por otro lado, otros autores han desarrollado métodos que utilizan funciones de escala y wavelets en esquemas de colocación para la solución de problemas de valores de contorno de EDPs.

En base al método de Galerkin, los autores del presente artículo han desarrollado un esquema híbrido que combina ecuaciones variacionales y de colocación. Un adecuado tratamiento de las condiciones de borde, conduce a aproximaciones con buenas propiedades de convergencia. Al mantener la estructura de multirresolución esta estrategia permite definir una aproximación jerárquica a la solución, refinada por escalas. El método fue implementado en primer lugar empleando B-splines y los resultados numéricos obtenidos en distintas aplicaciones fueron presentados en los trabajos mencionados.

La idea del presente trabajo es extender el método híbrido (V.Vampa et al., Appl. Math. Comput. (2010).doi:10.1016/j.amc.2010.08.068) definiendo un esquema que, al aprovechar plenamente las ventajas del análisis multirresolución, permita pasar de la aproximación en una escala a la siguiente más fina con el menor esfuerzo computacional. En base a wavelets sobre intervalos, se presenta una técnica para resolver problemas de borde de segundo orden, que permite mejorar las aproximaciones con una significativa disminución del costo computacional. Se exponen resultados numéricos obtenidos en distintas aplicaciones y se realizan comparaciones con resultados obtenidos con métodos de colocación.

## 1 INTRODUCCION

Numerosos artículos de los últimos años, presentan aplicaciones de elementos finitos con wavelets para la resolución de diversos problemas de ingeniería. Por ejemplo, se han propuesto métodos Wavelet-Galerkin para el problema de Dirichlet (Wells and Zhou, 1995), como también en mecánica estructural se desarrollaron algoritmos numéricos utilizando wavelets para la resolución de ecuaciones diferenciales en problemas de 1 y 2 dimensiones.

En la construcción del elemento basado en wavelets, generalmente la función de escala del análisis multirresolución (MRA) es utilizada como función interpolante. En particular, las funciones spline polinomiales de orden  $m$  proporcionan funciones de escala de un análisis multirresolución de  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  y fueron ya utilizadas en experimentos numéricos logrando en algunos casos rápida convergencia.

J.Han, W. Ren y Y. Huang, utilizaron las funciones de escala splines (Han et al., 2006) como interpoladoras de los desplazamientos al formular elementos para vigas y también elementos en 2D y 3D. Xiang (Xiang et al., 2006) utilizó funciones B-splines wavelets sobre un intervalo para la construcción de elementos planos para problemas de elastomecánica, entre ellos para el modelo de placa de Mindlin-Reissner.

Algunos problemas que presentan discontinuidades, singularidades o gradientes altos, requieren funciones interpolatorias que posean una mayor localización. En estos casos es conveniente utilizar las wavelets de Daubechies, que por sus ventajosas propiedades de ortogonalidad, su soporte compacto mínimo y su condición de varios momentos nulos, garantizan convergencia en una amplia variedad de casos. Pueden citarse los trabajos de J. Ma, J. Xue, S. Yang, Z. He (Ma et al., 2003) y también los de L. Alvarez Díaz, M. T. Martín, V. Vampa (Alvarez et al., 2008, 2009), donde las wavelets ortogonales de Daubechies son utilizadas para resolver ecuaciones correspondientes a problemas de vigas y placas.

Por otro lado, otros autores han desarrollado *métodos de colocación wavelet* para resolver PDEs proponiendo ecuaciones de colocación y diferentes bases wavelets. Bertoluzza (Bertoluzza and Naldi, 1996), por ejemplo, usa funciones de autocorrelación con wavelets de soporte compacto (wavelets de Daubechies) mientras que (Radunovic, 2007) utiliza wavelets spline. Cabe señalar, además, que Cai and Kumar et al., (Cai and Wang, 1996; Kumar and Mehra, 2007), incorporaron técnicas adaptivas con splines cúbicas optimizando la cantidad de funciones base usadas en la solución del problema. Es importante destacar que los métodos de colocación son eficientes pero requieren ciertas condiciones de regularidad y por esta razón los métodos variacionales resultan en muchos casos, una mejor alternativa.

Las singularidades que se presentan al modelar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, como por ejemplo, el caso de ecuaciones elípticas en dominios con esquinas re-entrantes, además de ser fuente de dificultades teóricas, traen dificultades en la convergencia de los métodos numéricos, en el sentido que deterioran la velocidad de decrecimiento del error. Entonces, alcanzar la tolerancia prescripta requiere una solución más refinada y por lo tanto un mayor costo computacional en comparación con soluciones suaves. Es necesario destacar que muchas veces estas singularidades tienen importancia física, como es el caso de concentraciones de tensiones en problemas de elasticidad, o problemas de capas límite en fluidos y entonces es de suma importancia que estén bien aproximadas por el método numérico.

En este sentido, el uso de métodos adaptativos, es una solución natural para mejorar las aproximaciones con un costo computacional razonable. En este contexto, el término "adaptatividad" refleja dos aspectos importantes: en primer lugar la posibilidad de refinar la discretización sólo localmente, en particular, cerca de la singularidad de la solución, y en segundo

la utilización de la información obtenida en un nivel de resolución para deducir la discretización del paso siguiente. El caso más típico es el refinamiento adaptativo basado en estimadores de error a-posteriori en el método de elementos finitos.

En los últimos años, las bases wavelets han aparecido como un método alternativo para el refinamiento adaptativo. En estos métodos, el conjunto de wavelets que describe la solución aproximada, es "actualizado" en cada paso del algoritmo. Intuitivamente, la selección de la base adecuada, juega un rol similar a la elección los puntos de la malla.

El resumen del trabajo es el siguiente: en la Sección 2 se presentan los aspectos básicos del análisis wavelet y una estructura multirresolución. En la Sección 3 se presentan las B-splines con sus propiedades básicas y también el cálculo de productos interiores necesarios en la formulación variacional para la resolución de ecuaciones diferenciales. En la Sección 4 se presenta en primer lugar el método de Galerkin junto con una breve descripción del cálculo de la aproximación en una escala, desarrollado en un trabajo anterior de los autores (Martín et al., 2009; Vampa et al., 2010). En segundo lugar, en la Sección 4, se presenta el método propuesto en este trabajo que consiste en utilización de las wavelets para avanzar en la escala optimizando el costo computacional. En la Sección 5 se analiza la convergencia del refinamiento propuesto en varios ejemplos que presentan algún tipo de singularidad. Por último, en la Sección 6 se exponen las conclusiones y futuras líneas de trabajo.

## 2 ANÁLISIS WAVELET. MULTIRRESOLUCIÓN

Las wavelets son generadas por una *única* función llamada *wavelet madre* mediante operaciones simples de traslación y dilatación. Para especiales elecciones de la función madre, las wavelets dan lugar a una descomposición del espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ , en suma directa de subespacios cerrados  $W_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ , donde hemos llamado  $\psi$  a la *wavelet madre*.

Si definimos los subespacios

$$W_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})}[\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}] \quad (1)$$

se satisface la siguiente relación,

$$L^2(\mathbb{R}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \quad (2)$$

Usando esta descomposición de  $L^2(\mathbb{R})$ , puede obtenerse una sucesión encastrada de subespacios cerrados  $V_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , de  $L^2(\mathbb{R})$ , donde

$$V_j = \cdots \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} . \quad (3)$$

Estos subespacios cerrados  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , forman un *análisis multirresolución* (Chui, 1992; Mallat, 2009) con las siguientes propiedades:

1.  $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \cdots$
2.  $\text{clos}_{L^2}(\cup V_j) = L^2(\mathbb{R})$
3.  $\cap V_j = \{0\}$

4.  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$
5.  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$

Asociado a la wavelet  $\psi$  existe una única  $\phi \in V_0$ , llamada *función de escala*, tal que  $\{\phi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  constituye una base ortogonal de este subespacio, y que por tanto, genera el análisis multirresolución. Si llamamos:

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (4)$$

se deduce que, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de  $V_j$ .

Se demuestra que existe una única sucesión  $\{p_k\}$  que describe la siguiente relación de *dos escalas*:

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(2x - k) \quad (5)$$

Esta relación de autosimilaridad, junto a la invariancia por traslaciones de los espacios  $V_j$ , constituyen la clave de la potencia de los métodos basados en este tipo de wavelets para las diversas aplicaciones.

### 3 B-SPLINES

#### 3.1 Propiedades básicas

Las B-splines son funciones muy regulares que pueden diseñarse de soporte compacto. Una de las ventajas principales con respecto a otras wavelets es que tienen una expresión explícita, lo que facilita su implementación computacional. En otros casos, como ocurre con las wavelets de Daubechies (Daubechies, 1988), deben utilizarse algoritmos que permiten el cálculo y la evaluación de la función y sus derivadas, siendo necesario, a veces, analizar la convergencia de los mismos.

Consideremos las funciones *B-spline de orden*  $m + 1$  es decir, funciones polinomiales a trozos y de grado  $m$  con  $m - 1$  derivadas continuas. Los puntos de ensamble, comúnmente llamados *nodos* están generalmente igualmente espaciados y ubicados en los enteros.

Estas funciones pueden definirse recursivamente mediante convoluciones de la forma siguiente (Chui, 1992):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \chi_{[0,1]}(x) \\ \varphi_{m+1}(x) &= \varphi_m * \varphi_1(x) \end{aligned} \quad (6)$$

y constituyen las funciones de escala de una estructura MRA. Es importante destacar que las B-splines son las funciones de escala de soporte más pequeño y las más regulares para un orden de polinomio dado.

Entre las propiedades que tienen las B-splines, las más importantes son:

- Soporte compacto:  $\text{supp}(\varphi_{m+1}) = [0, m + 1]$ .
- Simetría con respecto a  $x_c = (m + 1)/2$  (para  $m$  impar):

$$\varphi_{m+1}(x) = \varphi_{m+1}(m + 1 - x) \quad (7)$$

- Relación de 2 escalas:

$$\varphi_{m+1}(x) = 2^{-m} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \varphi_{m+1}(2x - k) \quad (8)$$

- Derivadas de orden  $1 \leq k \leq m - 1$  se obtienen directamente por diferencia:

$$\frac{d^k}{dx^k} \varphi_{m+1}(x) = \Delta^k \varphi_{m+1-k}(x) \quad (9)$$

donde  $\Delta^k$  es el operador diferencia de orden  $k$ . Corresponde, entonces, a una reducción en  $k$  del orden de la spline. Similarmente, la integración produce un incremento en el grado de la spline.

- Del producto de convoluciones:

$$\varphi_{m+1} * \varphi_{n+1}(x) = \varphi_{m+n+2}(x) \quad (10)$$

resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{m+1}(x - k) \varphi_{n+1}(x - l) dx &= \varphi_{m+n+2}(n + 1 + l - k) \\ &= \varphi_{m+n+2}(m + 1 + k - l) \end{aligned} \quad (11)$$

Esta última propiedad permite calcular productos internos de las funciones splines con la simple evaluación en los enteros de splines de orden más alto.

Es posible construir un análisis multirresolución MRA con splines considerando  $V_0$  el subespacio generado por traslaciones de la *función de escala*  $\varphi_{m+1}$ . Para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , la familia  $\{\varphi_{m+1,j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ , donde

$$\varphi_{m+1,j,k}(x) := 2^{j/2} \varphi_{m+1}(2^j x - k), \quad (12)$$

es una base de  $V_j$ . Estos subespacios  $V_j$  satisfacen las propiedades descritas en la Sección 2 (Mallat, 2009; Walnut, 2001).

### 3.2 Productos interiores

En las formulaciones variacionales de problemas de ecuaciones diferenciales aparecerán productos entre las funciones y sus derivadas. Como ya se mencionó, cuando se utilizan splines estos productos se calculan fácilmente mediante evaluaciones en los enteros de splines de orden más alto. Para un operador de segundo orden, pueden demostrarse las siguientes relaciones:

$$\langle \varphi_{m+1,j,l}, \varphi_{m+1,j,k} \rangle = \varphi_{2m+2}(m + 1 + l - k) \quad (13)$$

$$\langle \varphi_{m+1,j,l}, \varphi'_{m+1,j,k} \rangle = 2^j \varphi'_{2m+2}(m + 1 + l - k) \quad (14)$$

$$\langle \varphi_{m+1,j,l}, \varphi''_{m+1,j,k} \rangle = -2^{2j} \varphi''_{2m+2}(m + 1 + l - k) \quad (15)$$

Para probar Ec. (13), se hace un cambio de variables y luego se aplica Ec. (11):

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{m+1,j,l}, \varphi_{m+1,j,k} \rangle &= 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi_{m+1}(2^j x - l) \varphi_{m+1}(2^j x - k) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{m+1}(x - l) \varphi_{m+1}(x - k) dx \\
&= \varphi_{2m+2}(m + 1 + l - k)
\end{aligned} \tag{16}$$

Por otro lado, aplicando Ec. (11) y las expresiones de la derivada en Ec. (9) se obtiene Ec. (15),

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{m+1,j,l}, \varphi_{m+1,j,k}'' \rangle &= - \int_{\mathbb{R}} \varphi_{m+1}'(2^j x - l) \varphi_{m+1}'(2^j x - k) dx \\
&= -2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi_{m+1}'(x + l - k) \varphi_{m+1}'(x) dx \\
&= -2^j \int_{\mathbb{R}} [\varphi_m(x + l - k) - \varphi_m(x + l - k - 1)] [\varphi_m(x) - \varphi_m(x - 1)] dx \\
&= -2^j \varphi_{2m+2}''(m + 1 + l - k)
\end{aligned} \tag{17}$$

## 4 MÉTODO DE GALERKIN

### 4.1 Problema general de valores de contorno

Supongamos dado el siguiente problema general de valores de contorno:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{18}$$

donde  $L$  es un operador diferencial lineal definido en un espacio  $V$  y  $\Omega$  es un dominio poligonal cerrado de frontera  $\Gamma$ . Bajo apropiadas hipótesis sobre  $\Omega$  y su frontera  $\Gamma$ , existe una única solución  $u$ , que no siempre es posible o conveniente evaluarla en forma analítica o exacta.

La alternativa es entonces buscar una solución aproximada, siendo el *Método de Galerkin* una técnica clásica comúnmente utilizada para hallarla.

Llamemos  $(\cdot, \cdot)$ , al producto interno de  $L^2(\mathbb{R})$ . Consideremos la forma bilineal  $a(u, v)$  y la funcional  $F(v) = (f, v)$ , asociadas al operador  $L$ . La *formulación variacional o débil* correspondiente al problema de ecuaciones diferenciales (18), puede establecerse entonces, de la siguiente forma:

$$\text{Dado } F \in V', \text{ encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \tag{19}$$

Suponiendo que la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es simétrica, acotada y coerciva sobre  $V$ , entonces el Lema de Lax-Milgram demuestra que existe una única  $u \in V$  que es solución del problema (19), (Ciarlet, 1978).

La idea detrás de todas las técnicas para resolver PDEs, es aproximar el problema diferencial por otro algebraico de dimensión finita. En la aproximación de Galerkin el problema algebraico se construye aproximando el espacio  $V$  por un subespacio de dimensión finita  $V_h \subset V$ . El problema se plantea entonces de la siguiente forma:

$$\text{Dado un subespacio } \textit{finito-dimensional} V_h \subset V \text{ y } F \in V',$$

encontrar  $u_h \in V_h$  tal que:

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (20)$$

Bajo las condiciones ya mencionadas sobre la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$ , y aplicando el Teorema de Representación de Riesz, (Ciarlet, 1978), se prueba que existe una única función  $u_h$  que soluciona el problema de aproximación (20).

Sea  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_h}\}$  una base de  $V_h$ . Entonces la única solución del problema (20) puede escribirse como una combinación lineal de estas funciones  $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \phi_j$ , de modo que el problema (20) puede reescribirse como

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j a(\phi_i, \phi_j) = F(\phi_i) \quad 1 \leq i \leq N_h \quad (21)$$

o matricialmente:

$$K\alpha = R \quad (22)$$

donde  $K_{i,j} = a(\phi_i, \phi_j)$ ,  $R_i = F(\phi_i)$  y  $\alpha = (\alpha_j)_j$ .

El método admite muchas variantes, en particular la elección del subespacio  $V_h$  y de la base  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_h}\}$ . Interesa en principio que:

- la matriz  $K$  sea rala con un número de condición razonablemente pequeño.
- la aproximación  $u_h$  obtenida con la solución del sistema (22), debe ser una buena aproximación de  $u$  y en lo posible, mejorable.

Supongamos por ejemplo, que  $L$  es un operador diferencial de orden  $m = 2$ , con condiciones de borde clásicas sobre los bordes del dominio  $I = [a, b]$ . En este caso la forma bilineal  $a(u, v)$  involucra las derivadas primeras de  $u$  y  $v$ .

La base elegida debe estar formada por funciones soportadas en  $I$ , suficientemente derivables y que verifiquen condiciones de borde nulas. Por otra parte y como ya mencionamos, los elementos de matriz  $a(\phi_i, \phi_j)$  deben ser fáciles de calcular y  $a(\phi_i, \phi_j) = 0$ , si  $|i - j| \gg 0$ .

Esto sugiere combinar soporte pequeño, suavidad y ciertas condiciones de ortogonalidad. La simplicidad del cálculo se incrementa si las funciones básicas  $\phi_i$  son generadas a partir de una o varias funciones. En particular, mediante combinaciones lineales de dilaciones, traslaciones o modulaciones de las funciones *madre* generadoras. Más aún, si las funciones generadoras satisfacen ecuaciones de autosimilaridad o de escala, es posible refinar y ajustar la precisión.

## 4.2 Aproximación en escala $j$

Como caso particular del problema general (18) consideramos el siguiente problema lineal unidimensional de valores de contorno en el intervalo  $I = [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} Lu = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) &= f(x) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $p(x)$ ,  $q(x)$  and  $f(x)$  son funciones continuas en  $I$ .

Muchos procesos físicos pueden describirse con esta ecuación, como la distribución de temperatura a lo largo de una cuerda o los desplazamientos de un resorte en un problema estacionario.

La Ec. (23) puede asociarse con un problema variacional con la siguiente forma bilineal, donde se ha integrado por partes el primer término de la misma:

$$a(u, v) = \int_0^1 -u'(x)v'(x) + p(x)u'(x)v(x) + q(x)u(x)v(x) dx \quad (24)$$

y la forma lineal:

$$l(v) = \int_0^1 v(x)f(x) dx \quad (25)$$

para  $u$  y  $v \in V^0 \subset H^1(I)$ , el subespacio de funciones que satisfacen las condiciones de borde homogéneas.

Como fue mencionado en la Sección 4.1 en los métodos de Galerkin se elige un subespacio adecuado de  $V^0$  de dimensión finita para buscar una aproximación  $\tilde{u}$  de  $u$ . Para construir este subespacio con las funciones de escala spline debe tenerse en cuenta que éstas funciones de escala están definidas en toda la recta real. Entonces, para plantear una aproximación a la solución del problema definido en el intervalo  $I$ , deberá adaptarse el análisis multirresolución MRA definido en la recta real al intervalo  $[0, 1]$ .

Como el problema planteado en este trabajo Ec.(23) es de segundo orden, resultará suficiente la utilización  $B$ -splines de orden  $m = 3$ . Al estar en  $C^2$ , permitirán obtener una aproximación jerárquica de la solución del problema con buena precisión.

### 4.3 Subespacios de splines cúbicas

En el contexto del MRA de las splines cúbicas, la función de escala  $\varphi_4$  tiene soporte en  $[0, 4]$  y sus trasladadas generan  $V_0$ , como se mencionó anteriormente al final de la Sección 3.1.

Recordemos que  $\varphi_{4,j,k}$  son splines en  $\mathbb{Z}/2^j$ . En cualquier escala  $j$ , el paso en la discretización es  $2^{-j}$ , lo que da, para  $j > 0$ ,  $2^j$  segmentos en el soporte de  $\varphi_{4,j,k}$ , o sea en el intervalo  $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+4)]$ . Entonces, para tener al menos una función de escala con su soporte contenido propiamente en  $[0, 1]$ ,  $j$  deberá cumplir  $2^j \geq 4$ .

Para cada  $j \geq 2$  se tienen  $2^j + 3$  funciones que intersecan  $I$ . Las  $2^j - 3$  funciones  $\varphi_{4,j,k}$  para  $0 \leq k \leq 2^j - 4$  son *splines interiores* y  $\varphi_{4,j,k}$  para  $-3 \leq k \leq -1$  y  $2^j - 3 \leq k \leq 2^j - 1$ , son *splines de borde*. En la Figura 1 se muestran las splines interiores y de borde correspondientes a la escala  $j = 3$ . Para hallar una solución aproximada al problema variacional de las Ec. (24)

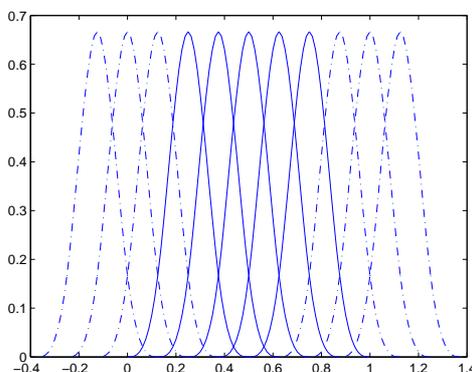


Figure 1: Splines cúbicas interiores y de borde en la escala  $j = 3$

y Ec. (25), se consideran los siguientes espacios de dimensión finita:

$$V_j^I = \text{span}\{\varphi_{4,j,k}, 0 \leq k \leq 2^j - 4\} \tag{26}$$

de dimensión  $2^j - 3$ , y

$$\widehat{V}_j^I = \text{span}\{\varphi_{4,j,k}, -3 \leq k \leq 2^j - 1\} \tag{27}$$

de dimensión  $2^j + 3$ .

Claramente  $V_j^I \subset V_{j+1}^I$  y además, está demostrado que éstos subespacios definen un *análisis multirresolución* en  $L^2(I)$ , (Mallat, 2009; Walnut, 2001; Cammilleri and Serrano, 2001). Sin embargo, como fue analizado en el trabajo (Vampa et al., 2010), resulta más eficiente la utilización del espacio  $\widehat{V}_j^I$ , que incluye las splines interiores y las de borde.

Si consideramos el problema variacional en  $V_j^I$ , debe resolverse un sistema algebraico de dimensión  $(2^j - 3)$  :

$$A_{4,j} \alpha_j = b_{4,j} \tag{28}$$

donde, para  $0 \leq n, k \leq 2^j - 4$ ,

$$A_{4,j}(n, k) = \int_0^1 \varphi'_{4,j,n} \varphi'_{4,j,k} dx + p_j(n, k) \int_0^1 \varphi'_{4,j,n} \varphi_{4,j,k} dx + q_j(n, k) \int_0^1 \varphi_{4,j,n} \varphi_{4,j,k} dx \tag{29}$$

y

$$b_{4,j}(n) = l(\varphi_{4,j,n}) \tag{30}$$

Notar que en la ecuación Ec. (29),  $q_j(n, k)$  y  $p_j(n, k)$  son valores adecuados de las funciones  $p(x)$  y  $q(x)$  elegidos en la intersección no vacía de los soportes de  $\varphi_{4,j,n}$  y  $\varphi_{4,j,k}$ .

Utilizando relaciones de las  $B$ -splines descritas in Eqs. (13)-(15), la expresión anterior, Eq.(29), puede simplificarse y reescribirse como:

$$A_{4,j}(n, k) = -2^{2j} \varphi_8''(4 + n - k) + 2^j p_j(n, k) \varphi_8'(4 + n - k) + q_j(n, k) \varphi_8(4 + n - k) \tag{31}$$

donde, de acuerdo a la notación introducida en la Sección 3.1,  $\varphi_8$  es la  $B$ -spline de orden 7, que tiene soporte en  $[0, 8]$ .

Los pasos a seguir para obtener la aproximación en la escala  $j$ ,  $\widehat{u}_j = \sum_{k=-3}^{2^j-1} \widehat{\alpha}_{j,k} \varphi_{4,j,k}$  son los siguientes (para más detalle ver el desarrollo completo presentado en el trabajo (Vampa et al., 2010))

1. Sistema algebraico- aproximación en la escala  $j$ :

- (a) *Ecuaciones variacionales*: son las obtenidas a partir de la formulación variacional, considerando que la incógnita está en  $\widehat{V}_j^I$ , mientras que la función de prueba  $v$  está en  $V_j^I$ . Esto conduce a un sistema rectangular de dimensión  $(2^j - 3) \times (2^j + 3)$ :

$$\widehat{A}_{4,j} \widehat{\alpha}_j = \widehat{b}_{4,j} \tag{32}$$

Los elementos de la matriz y del término independiente son similares a los que se describen en Ec. (29) y Ec. (30), con  $\varphi_{4,j,k}$  en  $\widehat{V}_j^I$ .

- (b) *Ecuaciones de colocación* : obtenidas a partir del requerimiento que el residuo sea cero en los extremos del intervalo y en los puntos de colocación,  $2^{-j}$  and  $1 - 2^{-j}$ ,

$$\begin{aligned} u''(0) + p(0)u'(0) + q(0)u(0) &= f(0) \\ u''(2^{-j}) + p(2^{-j})u'(2^{-j}) + q(2^{-j})u(2^{-j}) &= f(2^{-j}) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} u''(1 - 2^{-j}) + p(1 - 2^{-j})u'(1 - 2^{-j}) + q(1 - 2^{-j})u(1 - 2^{-j}) &= f(1 - 2^{-j}) \\ u''(1) + p(1)u'(1) + q(1)u(1) &= f(1) \end{aligned}$$

- (c) *Condiciones de borde*: obtenidas del requerimiento de las condiciones que debe cumplir la solución en los extremos del intervalo,

$$\hat{\alpha}_{-3} \varphi_{4,j,-3}(0) + \hat{\alpha}_{-2} \varphi_{4,j,-2}(0) + \hat{\alpha}_1 \varphi_{4,j,-1}(0) = 0 \quad (34)$$

$$\hat{\alpha}_{2^j-2} \varphi_{4,j,2^j-3}(1) + \hat{\alpha}_{2^j-1} \varphi_{4,j,2^j-2}(1) + \hat{\alpha}_{2^j} \varphi_{4,j,2^j-1}(1) = 0$$

2. *Aproximación en  $\hat{V}_j^I$* : Resolviendo el sistema algebraico se hallan los  $2^j + 3$  coeficientes  $\tilde{\alpha}_{jk}$  y se tiene  $\hat{u}_j$ .

#### 4.4 Utilización de las wavelets para pasar a la escala $j + 1$

Una vez obtenida la aproximación en la escala  $j$

$$\hat{u}_j = \sum_{k=-3}^{2^j-1} \hat{\alpha}_{j,k} \varphi_{4,j,k} \quad (35)$$

se quiere avanzar a la escala  $j + 1$ . Una posibilidad es repetir el proceso ya descrito, ahora en la escala  $j + 1$ , obteniendo la siguiente expansión,

$$\hat{u}_{j+1} = \sum_{k=-3}^{2^{j+1}-1} \hat{\alpha}_{j+1,k} \varphi_{4,j+1,k} \quad (36)$$

El sistema algebraico que se resuelve en la escala  $j + 1$  consta de  $2^{(j+1)} - 3$  ecuaciones variacionales

$$\langle L\hat{u}_{j+1}, \varphi_{j+1,n} \rangle = \langle f, \varphi_{j+1,n} \rangle \quad 0 \leq n \leq 2^{(j+1)} - 4 \quad (37)$$

y las 6 ecuaciones de colocación y de borde similares a las ecuaciones (33) y (34) pero en la escala  $j + 1$ .

Si se expande la suma de la Ec. (36),

$$\hat{u}_{j+1} = \sum_{k=0}^{2^{j+1}-4} \hat{\alpha}_{j+1,k} \varphi_{4,j+1,k} + \sum_{k=-3}^{-1} \hat{\alpha}_{j+1,k} \varphi_{4,j+1,k} + \sum_{k=2^{j+1}-3}^{2^{j+1}-1} \hat{\alpha}_{j+1,k} \varphi_{4,j+1,k} \quad (38)$$

el primer término puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\sum_{k=0}^{2^j-4} b_{j,k} \varphi_{4,j,k} + \sum_{k=1}^{2^j} c_{j,k} \psi_{4,j,k} \quad (39)$$

teniendo cuenta la relación:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (40)$$

En esta nueva base las  $2^{j+1} - 3$  ecuaciones variacionales (37) pueden ser reemplazadas por las siguientes:

$$\langle L\hat{u}_{j+1}, \varphi_{j,n} \rangle = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \quad 0 \leq n \leq 2^j - 4 \quad (41)$$

$$\langle L\hat{u}_{j+1}, \psi_{j,n} \rangle = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad 1 \leq n \leq 2^j \quad (42)$$

mientras que las ecuaciones de borde se transforman en otras similares.

#### 4.5 Reducción del número de incógnitas

La aproximación en la escala  $j + 1$  en el espacio  $\hat{V}_{j+1}$ , puede escribirse de la forma siguiente:

$$\hat{u}_{j+1} = \hat{u}_j + [\hat{u}_{j+1} - \hat{u}_j] = \hat{u}_j + \hat{v}_j \quad (43)$$

Ya que  $\hat{v}_j \in \hat{V}_{j+1}$ , tendrá una expansión de la forma:

$$\hat{v}_j = \sum_{k=-3}^{2^{j+1}-1} \gamma_{j+1,k} \varphi_{4,j+1,k} \quad (44)$$

*Nota: Observar que  $\langle \hat{v}_j, \hat{u}_j \rangle \neq 0$ , es decir,  $\hat{v}_j$  y  $\hat{u}_j$ , no son ortogonales.*

Reemplazando Ec. (43) en la Ec. (41), se tiene,

$$\langle L\hat{u}_j, \varphi_{j,n} \rangle + \langle L\hat{v}_j, \varphi_{j,n} \rangle = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \quad (45)$$

Teniendo en cuenta la ecuación variacional de la escala  $j$ ,  $\langle L\hat{u}_j, \varphi_{j,n} \rangle = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle$ , resulta un sistema lineal nulo de  $2^j - 3$  ecuaciones y  $2^{j+1} + 3$  incógnitas,

$$\langle L\hat{v}_j, \varphi_{j,n} \rangle = 0 \quad 0 \leq n \leq 2^j - 4 \quad (46)$$

Reemplazando (44) en (46) se tiene la siguiente ecuación matricial:

$$D_j \gamma_{j+1} = \vec{0} \quad (47)$$

donde  $D_j$  es una matriz rectangular de productos que depende del operador  $L$ .  $\gamma_{j+1} \in Null[D_j]$  y tiene dimensión  $2^{j+1} + 3 - (2^j - 3) = 2^j + 6$ . Por lo tanto es posible construir una matriz  $N_j$  de dimensión  $2^{j+1} + 3 \times 2^j + 6$ , de estructura simple y recursiva tal que

$$\gamma_{j+1} = N_j \alpha_{j+1} \quad (48)$$

De esta forma se reduce la cantidad de incógnitas de  $2^{j+1} + 3$  a  $2^j + 6$ , aproximadamente en un factor 2.

Usando ahora la descomposición (43) en las ecuaciones de la Ec. (42), quedan  $2^j$  ecuaciones variacionales,

$$\langle L\hat{u}_j, \psi_{j,n} \rangle + \langle L\hat{v}_j, \psi_{j,n} \rangle = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (49)$$

donde el primer término es conocido ya que corresponde a la escala  $j$ . Agregando las 6 condiciones de borde, escritas en las nuevas incógnitas  $\gamma_{j+1}$ , se obtiene el sistema algebraico a resolver para obtener los coeficientes de la aproximación en la escala  $j + 1$ .

En resumen, la estructura del MRA permite obtener  $\hat{u}_{j+1}$  en una forma eficiente resolviendo un sistema lineal de dimensión  $2^j + 6$  en la escala  $j + 1$  en el espacio  $V_{j+1}^I$  (ver Ec. (49)).

Es importante destacar que los coeficientes wavelet pueden tratarse como estimadores locales del error. Al brindar una medida del error, permitirán determinar si la aproximación obtenida es suficientemente buena o no. Consecuentemente, un esquema adaptativo podría implementarse refinando la solución en las zonas de interés, evitando así un incremento significativo en la cantidad de wavelets.

## 5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se describen los resultados numéricos en 3 ejemplos del problema de valores de contorno de segundo orden presentado. En ellos se aplicó el refinamiento mediante wavelets descripto en la sección anterior.

Para medir los errores con respecto a la solución exacta se utilizó la siguiente norma:

$$\|v\|_{j,\infty} = \max_{k=0,1,\dots,2^j-1} |v(\frac{k}{2^j})|,$$

Ejemplo 1: Se consideró en primer lugar, el problema de valores de contorno,

$$Lu = u''(x) + \pi^2 u(x) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \tag{50}$$

$$u(0) = 0 \quad u(1) = 0$$

cuya solución exacta es,

$$u(x) = \sin(\pi x) \tag{51}$$

En la Tabla 1 se presentan los resultados numéricos obtenidos para distintas escalas. Se verifica el orden de convergencia teórico,

$$\|u - \tilde{u}_j\|_{j,\infty} = O(2^{-2j})$$

$j$	$\ u - \tilde{u}_j\ _{j,\infty}$
4	$1.2 \times 10^{-5}$
5	$3.1 \times 10^{-7}$
6	$1.1 \times 10^{-7}$
7	$3.7 \times 10^{-10}$
8	$2.5 \times 10^{-11}$

Table 1: Ejemplo 1. Errores relativos para distintas escalas

Ejemplo 2: El problema de convección-difusión,

$$Lu = \varepsilon u''(x) + u'(x) = 0 \tag{52}$$

$$u(0) = 0 \quad u(1) = 1$$

tiene solución exacta,

$$u(x) = (1 - e^{-x/\varepsilon}) / (1 - e^{-1/\varepsilon}) \quad (53)$$

y presenta una capa límite en  $x = 0$  para valores pequeños del parámetro de perturbación  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

En la Tabla 2 y la Figura 2 se muestra la convergencia de las aproximaciones aumentando la escala para el valor del parámetro  $\varepsilon = 10^{-3}$ . La estimación del orden de convergencia es mayor que 2. Se realizó la comparación con los resultados obtenidos por el método de colocación con splines-wavelets de Radunovic presentado en el trabajo (Radunovic, 2007). En la Figura 3 se muestran ambas velocidades de convergencia. La pendiente de la recta continua indica que es más ventajoso el método propuesto en este trabajo.

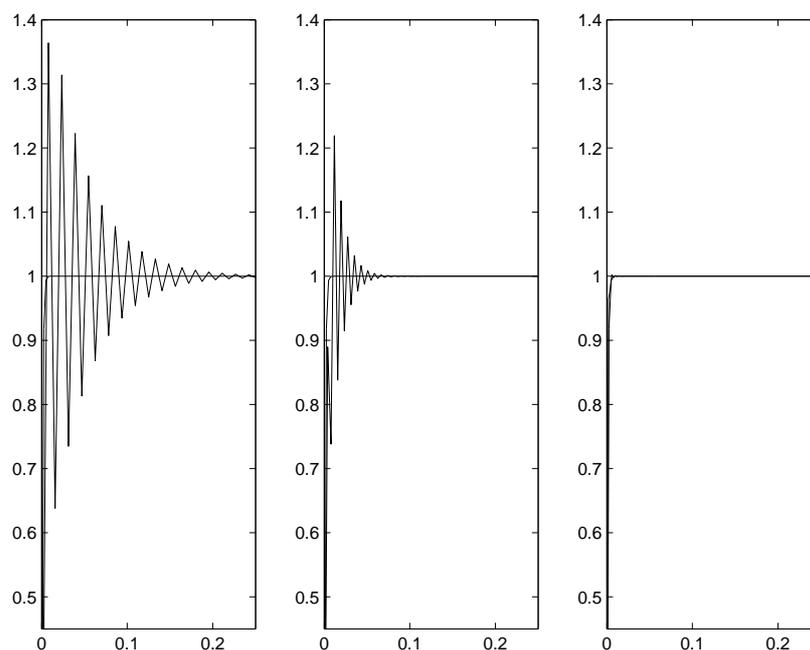


Figure 2: Aproximación a la solución para  $j = 6, 7, 8$

$j$	$\ u - \tilde{u}_j\ _{j,\infty}$
6	$6.0 \times 10^{-1}$
7	$3.6 \times 10^{-1}$
8	$2.6 \times 10^{-1}$
9	$1.1 \times 10^{-1}$
10	$1.5 \times 10^{-2}$

Table 2: Ejemplo 2. Errores relativos para distintas escalas.  $\varepsilon = 10^{-3}$

Ejemplo 3: Como último ejemplo se considera un problema que corresponde a una perturbación de la ecuación de reacción-difusión

$$Lu = \varepsilon u''(x) - u(x) = \cos^2(\pi x) + 2\varepsilon\pi^2 \cos(2\pi x) \quad (54)$$

$$u(0) = 0 \quad u(1) = 0$$

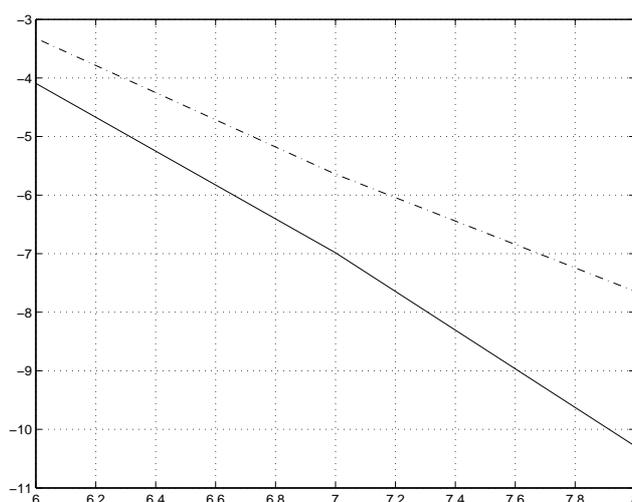


Figure 3: Comparación de órdenes de convergencia: línea de puntos Radunovic y línea continua método propuesto

que tiene solución exacta ,

$$u(x) = \frac{\exp((x-1)/\sqrt{\varepsilon}) + \exp(-x/\sqrt{\varepsilon})}{1 + \exp(-1/\varepsilon)} - \cos^2(\pi x) \quad (55)$$

Este problema tiene capas límite en  $x = 0$  y  $x = 1$ . En 2007 fue resuelto por Kumar (Kumar and Mehra, 2007) utilizando un método de colocación adaptativo. En la Tabla 3 se

$j$	$\ u - \tilde{u}_j\ _{j,\infty}, \varepsilon = 2^{-5}$	$\ u - \tilde{u}_j\ _{j,\infty}, \varepsilon = 2^{-10}$	$\ u - \tilde{u}_j\ _{j,\infty}, \varepsilon = 2^{-15}$
6	$3.3 \times 10^{-5}$	$5.9 \times 10^{-2}$	$3.6 \times 10^{-1}$
7	$5.8 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-2}$	$2.0 \times 10^{-1}$
8	$5.5 \times 10^{-7}$	$1.6 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-1}$
9	$4.6 \times 10^{-8}$	$1.4 \times 10^{-4}$	$2.9 \times 10^{-2}$
10	$2.9 \times 10^{-9}$	$1.1 \times 10^{-5}$	$4.6 \times 10^{-3}$

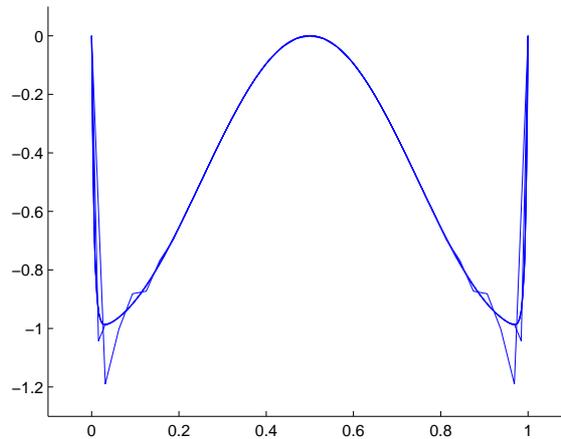
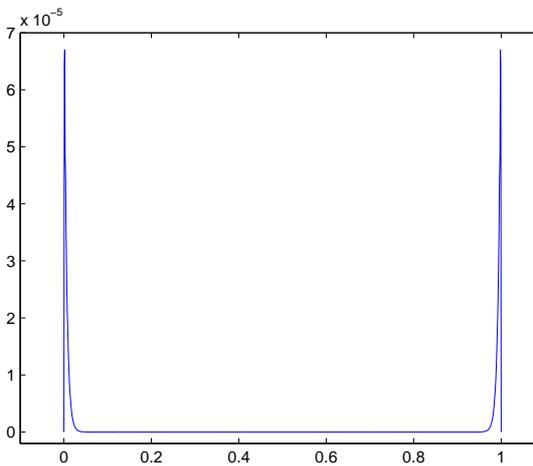
Table 3: Ejemplo 3. Errores relativos para distintas escalas

muestra la convergencia para distintos valores del parámetro  $\varepsilon$ . Los errores obtenidos para las distintas escalas  $j$  evidencian una muy buena performance del método de refinamiento mediante el uso de wavelets, superando las aproximaciones presentadas por Kumar en su trabajo (Kumar and Mehra, 2007).

La Figura 4 muestra la convergencia al aumentar la escala para  $\varepsilon = 2^{-15}$ . Finalmente, en la Figura 5 se muestran los errores puntuales para ese mismo valor del parámetro  $\varepsilon$ . Los valores máximos se alcanzan, como fue previsto, en ambos extremos del intervalo.

## 6 CONCLUSIONES

Es importante destacar que la propuesta combina las ventajas numéricas y computacionales que proporcionan las funciones spline con las capacidades de las wavelets, en el contexto de una estrategia Galerkin-variacional. El análisis en un MRA permite aprovechar la estructura de espacios sucesivamente refinables para interpolar las soluciones hasta alcanzar la precisión deseada. Exponemos en este trabajo una novedosa técnica para el refinamiento de las soluciones que mejora notablemente la complejidad computacional.

Figure 4: Solución aproximada en las escalas  $j = 6, 7, 8$ .  $\varepsilon = 10^{-3}$ Figure 5: Error puntual, escala  $j = 10$ 

El carácter localizado de las wavelets posibilitaría, por otra parte, segmentar apropiadamente el dominio de la ecuación, utilizando los coeficientes wavelets como estimadores locales del error. Estos aspectos serán desarrollados en un futuro trabajo.

## REFERENCES

- Alvarez L., Martín M.T., and Vampa V. Daubechies wavelet beam and plate finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45:200–209, 2008.
- Alvarez L., Martín M.T., and Vampa V. The construction of plate finite elements using wavelet basis functions. *Revista Investigación Operacional, Fac. de Matemática y Computación, Universidad de La Habana*, 30:193–204, 2009.
- Bertoluzza S. and Naldi G. A wavelet collocation method for the numerical solution of partial differential equations. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3:1–9, 1996.
- Cai W. and Wang J. Adaptive multiresolution collocation methods for initial boundary value problems of nonlinear pdes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33:937–970, 1996.
- Cammilleri A. and Serrano E.P. Spline multiresolution analysis on the interval. *Latin American*

- Applied Research*, 31:65–71, 2001.
- Chui C.K. *An introduction to wavelets*. Academic Press, New York, 1992.
- Ciarlet P.G. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, 1978.
- Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. Pure Appl. Math.*, 41:909–996, 1988.
- Han J., Ren W., and Huang Y. A spline wavelet finite-element method in structural mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66:166–190, 2006.
- Kumar V. and Mehra M. Cubic spline adaptive wavelet scheme to solve singularly perturbed reaction diffusion problems. *International Journal of wavelets, multiresolution and information processing*, 5:317–331, 2007.
- Ma J., Xue J., Yang S., and He Z. A study of the construction and application of a daubechies wavelet-based beam element. *Finite Elements in Analysis and Design.*, 39:965–975, 2003.
- Mallat S.G. *A Wavelet Tour of Signal Processing - The Sparse Way*. Academic Press - Elsevier - MA EEUU, 2009.
- Martín M., Serrano E.P., and Vampa V. B-splines and second order boundary value problems. *XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC2009)U.N.Rosario*, 2009.
- Radunovic D. Spline-wavelet solution of singularly perturbed boundary problem. *Matematnykn Bechnk*, 59:31–46, 2007.
- Vampa V., Martín M., and Serrano E.P. *A hybrid method using wavelets for the numerical solution of boundary value problems on the interval*. *Applied Mathematics and Computation*, doi:10.1016/j.amc.2010.08.068, 2010.
- Walnut D. *An Introduction to Wavelet Analysis*. Birkhauser, 2001.
- Wells R. and Zhou X. Wavelet solutions for the dirichlet problem. *Numerische Mathematik*, 70:379–396, 1995.
- Xiang J., Chen X., He Y., and He Z. The construction of plane elastomechanics and mindlin plate elements of b-spline wavelet on the interval. *Finite Elements in Analysis and Design.*, 42:1269–1280, 2006.