

## PROPOSTA DE UMA EQUAÇÃO DE CAMPO VETORIAL ELÁSTICO PARA MEIOS CONTÍNUOS COM IRREGULARIDADES

Lucas M. Alves<sup>a,b</sup>, Luiz A. De Lacerda.<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*GTEME – Grupo de Termodinâmica, Mecânica e Eletrônica dos Materiais, Departamento de Engenharia de Materiais, Setor de Ciências Agrárias e de Tecnologia, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Av. Gal. Carlos Calvalcanti, 4748, Campus UEPG/Bloco L – Uvaranas – Ponta Grossa-PR, Brasil, CEP. 84030.000, Cx. Postal 1007, lmalves@uepg.br; <http://dgp.cnpq.br>*

<sup>b</sup>*LACTEC - Instituto de Tecnologia para o Desenvolvimento, DPEC/DVPE - Divisão de Pesquisas em Estruturas Cíveis, Centro Politécnico da Universidade Federal do Paraná, Cx. P. 19067, Curitiba, PR, Brazil, [alkimin@lactec.org.br](mailto:alkimin@lactec.org.br); <http://www.lactec.org.br/pt/>*

**Palavras Chave:** equação de movimento, equação constitutiva, porosidade, rugosidade, densidade generalizada, fluxo generalizado.

**Resumo.** Neste trabalho propõem-se uma equação de movimento e uma equação constitutiva para materiais frágeis com irregularidades (porosidade no volume, rugosidade nas superfícies de contorno, que podem ser fractais ou não). Soluções numéricas desta equação são avaliadas por (Método de Diferenças Finitas - MDF e Métodos de Elementos Finitos - MEF) em um problema estático de um campo de tensão e deformação na ponta de uma trinca rugosa. Os resultados com e sem rugosidade foram comparados e analisados. Também se comparou os resultados com diferentes propostas da literatura para o campo de tensão na ponta da trinca rugosa. Concluiu-se que a singularidade do campo de tensão na ponta da trinca rugosa não possui uma única dimensão fractal de rugosidade, mas depende da posição na frente da ponta da trinca.

## 1 INTRODUCTION

A descrição de fenômenos físicos que nos dão a idéia de movimento, como o fluxo de calor, o movimento de uma partícula, a deformação de um corpo, o escoar de um fluido, o crescimento de uma trinca, etc. podem ser unificados pela Teoria Geral do Campo Contínuo Clássico. Essa teoria geral de campo procura unificar os aspectos elementares e reducionistas da mecânica, com os aspectos gerais da termodinâmica. Todo potencial contido em partículas ou ao redor de corpos na forma de campos produzem algum tipo de movimento. Neste sentido sabe-se que todo “movimento” parte da diferença de algum tipo de “potencial” entre dois pontos a qual pode ser chamado de “potencial generalizado”. No caso do fluxo de calor a diferença de potencial corresponde à diferença de temperatura entre dois pontos. No caso do movimento de uma partícula a diferença de potencial mecânica, elétrica ou magnética pode ser atribuída à aplicação de uma força, e assim por diante, na lista dos fenômenos que podem ser unificados pela teoria dos campos escalares e vetoriais e tensoriais.

O campo externo ao redor de uma partícula, ou ao redor de um corpo com forma regular de campo interno uniforme em questão, apresentará linhas de mesmo potencial (equipotenciais) que acompanharão o contorno do corpo. As linhas de fluxo desse campo estarão dirigidas para fora na direção perpendicular às linhas equipotenciais e será dado pelo gradiente do seu potencial entre dois pontos, cujo vetor estará apontado na direção normal às linhas de mesmo potencial. Mesmo, quando os campos envolvidos são campos dinâmicos cuja descrição envolve diretamente o conceito de velocidade e de movimento de uma partícula, como no caso de deformações elásticas e/ou plásticas de um sólido, ou taxas de deformações de um fluido, novamente, surge a idéia de campo potencial associado a diferenças de potenciais, as quais são responsáveis pela formação de gradientes de potencial e por sua vez responsáveis pelo movimento das partículas imersas nesses campos. Nesses casos os campos são de potenciais vetoriais ou tensoriais. Mesmo assim, para todas as situações descritas até agora, é possível generalizar o conceito de posição, velocidade, quantidade de movimento, força, potencial, diferença de potencial, etc. com a finalidade de descrever matematicamente o campo clássico de uma forma unificada.

No caso de corpos com formas irregulares e se considera que o seu campo interno é uniforme, as linhas equipotenciais externas nos fenômenos exemplificados acima acompanharão as formas irregulares do seu contorno, conforme mostra [Figura 1](#). Até este ponto a complicação da irregularidade dos contornos pode ser trabalhada por soluções numéricas e as correções que surgem em relação ao caso regular são apenas geométricas. Em todo o sentido pode-se sempre adotar que o fluxo deriva do potencial a partir do seu gradiente da seguinte forma:

$$\vec{J} = \begin{cases} -k\nabla T & (\text{prob. térmico}) \\ -\sigma\nabla\varphi & (\text{prob. elétrico}). \\ \text{etc,} \end{cases} \quad (1)$$

onde  $k$ , e  $\sigma$  são as condutividades térmicas e elétricas e  $T$  e  $\varphi$  são os potenciais térmicos (temperatura) e elétrico, respectivamente. Ou seja, as linhas de fluxos são perpendiculares às linhas equipotenciais, sejam elas de potencial elétrico, térmico ou de outra natureza qualquer dentro dessa mesma classe de fenomenologia.

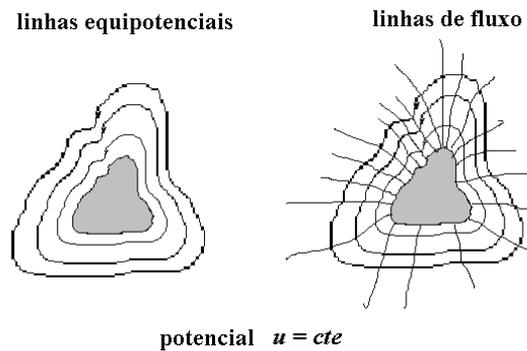


Figura 1. Linhas equipotenciais e de campo em torno de um corpo irregular uniformemente carregado.

Contudo, quando as irregularidades de campo envolvem também a parte física do campo, no sentido de haver campos não uniformes, fontes de campo aleatoriamente dispersas no meio, volumes porosos, efeitos não lineares geométricos e físicos, etc., a solução das equações de campo pode se tornar muito trabalhosa ou analiticamente impraticável. Neste ponto, é preciso recorrer a algum tipo de geometria que possa tratar das discontinuidades geométricas e seus efeitos sobre o valor dos campos dos potenciais. Além do que, é necessário generalizar tanto a descrição geométrica da forma dos objetos e do contorno de suas superfícies, como a descrição geométrica dos campos envolvidos, junto com seus efeitos dinâmicos. Porque, além de uma generalização geométrica e fenomenológica, é preciso também fazer a inserção destas nos modelos praticáveis por uma teoria de campo generalizada. Portanto, um dos objetivos deste artigo é formular uma teoria do contínuo que envolva a *rugosidade* da superfície de contorno e o *complementar da porosidade* do interior do volume do corpo. De forma mais direta, as conseqüências desta nova formulação teórica serão utilizadas no estudo da Mecânica da Fratura.

A teoria do campo contínuo clássica utiliza a geometria euclidiana na descrição dos fenômenos de transferência de calor, massa, momentum, etc. Com esta geometria é possível descrever apenas os fenômenos que acontecem em formas regulares sem considerar os efeitos da *rugosidade* das superfícies, ou da *porosidade* do interior dos volumes. Mesmo quando as formas são cheias de detalhes geométricos, utilizam-se modelos numéricos e cálculos aproximados (Blyth 2003, Xie 2003, Hyun 2004). Na fratura, por exemplo, esta quase nunca acontece sem o surgimento de superfícies rugosas. Os casos de fratura com superfícies lisas aparecem normalmente em processos de clivagem de monocristais e no interior de alguns grãos do material. No caso de fratura de materiais policristalinos com considerável *rugosidade* (cujas pontas da trinca rugosa interage no processo de fratura) o uso da geometria euclidiana deixa a desejar. Pois os resultados não são completos e os cálculos não são exatos, e ainda não se consegue explicar diversos fenômenos da fratura quase-estática e dinâmica em que a *rugosidade* é presente (Fineberg 1991, 1992, Xie, 1995; Alves 2005, Alves et al 2010). A descrição matemática do crescimento da curva J-R de resistência a fratura, por exemplo, só pode ser explicado se for levado em conta o aparecimento da *rugosidade* durante o processo de propagação ou crescimento de uma trinca (Alves 2001, Alves et al 2010). Isto significa que o modelo geométrico da *rugosidade* precisa ser incluído no cálculo analítico da integral-J de Eshelby-Rice (Su et al, 2000; Weiss, 2001; Rupnowski, 2001; Alves 2001, Alves et al 2010). Um outro fenômeno na fratura que envolve o surgimento de *rugosidade* é a propagação de trincas rápidas, onde surgem instabilidades com ramificação de trincas e oscilações na velocidade de crescimento da trinca, a partir de uma velocidade crítica (Fineberg 1991, 1992).

## 1.1 O surgimento de teorias do campo contínuo com a inclusão de irregularidades

A presença de irregularidades de forma e de microestrutura na superfície e no interior de materiais sujeitos as fenomenologias é uma realidade na natureza e também nos materiais desenvolvidos pelo homem. Não é de agora que existe a necessidade de se tratar com as irregularidades e os defeitos presentes em um material. Para isso têm surgido ao longo dos anos tópicos específicos das ciências exatas que tratam de irregularidades geométricas e microestruturais nas superfícies e no interior dos materiais (Bammann, 1982; Forest, 1998; Trovalusci, 1998; Duda, 2007; Engelbrecht, 2009). Desde que surgiu a teoria fractal, grande tem sido os esforços em descrever as formas irregulares da natureza como também o seu efeito sobre os fenômenos físicos e químicos e nos materiais (Hornbogen 1989, Panin, 1992, Lazarev, 1993). Hornbogen (1989) enumerou diferentes aspectos da microestrutura de materiais que podem ser tratados pela geometria fractal. Panagiotopoulos (1992) propôs a utilização da geometria fractal na descrição da estrutura dos sólidos irregulares, Panin (1992) descreveu os fundamentos da meso-mecânica de um meio com estruturas, Tarasov (2005) descreveu uma mecânica do contínuo para meios fractais utilizando o calculo fracional. Yavari (2006) descreveu as leis de equilíbrio covariantes espaciais e materiais na elasticidade. Outras abordagens estão sendo elaboradas por diversos cientistas e publicadas na literatura especializada, e dizem respeito a uma teoria especificamente fractal envolvendo o cálculo fracional em múltipla escala (Dyskin, 2005, Carpinteri, 2009). Dyskin (2005) têm publicado vários trabalhos no sentido de utilizar a teoria fractal e o calculo fracional para descrever uma mecânica de múltipla escala. Carpinteri (2009) et al utilizaram o calculo fracional como uma forma de incluir a teoria fractal na descrição de fenômenos de elasticidade e fratura envolvendo a *rugosidade* e o efeito de escala. Todas estas são propostas de uma mecânica que possa tratar inclusivamente a irregularidade de forma e de microestrutura no seu contexto matemático.

## 1.2 Importância da inclusão da rugosidade na teoria do campo contínuo clássica

Análises geométricas de superfícies rugosas de fratura em materiais específicos, como madeira, vidro, cimento, argila, demonstram que as *rugosidades* nesses materiais são características de cada tipo de material (Morel 1998, Ponson 2006, Alves 2004). Os aspectos geométricos de superfícies rugosas de fratura em argamassa de cimento, por exemplo, apresentam semelhança entre si. Assim como as superfícies rugosas de fratura obtidas em argilas ou tijolos de argilas também possuem aspectos semelhantes entre si, diferindo, contudo, dos aspectos geométricos das superfícies de fratura do cimento. Ou seja, cada tipo de material define uma classe de superfícies de fratura, cujos aspectos geométricos são semelhantes para as superfícies de fratura da mesma classe de material. Isto nos ajuda a pensar que a *rugosidade* deve depender do tipo de material e deve ser incluída na equação constitutiva do mesmo para o estudo dos fenômenos do contínuo (calor, elasticidade, fratura, etc).

Portanto, vamos fazer algumas modificações na equação de movimento e nas equações constitutivas básicas começando com a teoria do campo escalar (calor, eletrostática) depois passando para a teoria do campo vetorial (elasticidade, eletrodinâmica, fluidos, etc.) até a fratura de materiais frágeis elasticamente lineares. A idéia de se fazer estas modificações de forma evolutiva, em grau de complexidade do fenômeno (campos escalares primeiro e depois campos vetoriais) é para poder se aprender com os resultados que cada modificação pode fornecer. Isto permitirá obter a melhor consistência possível na descrição matemática dos fenômenos do contínuo, que envolve a participação da *rugosidade* no processo, tanto de

transferência de calor como nos processos de mecânicos de elasticidade e fratura.

Procura-se descrever os fenômenos físicos em termos de uma descrição matemática mais autêntica, que leva em conta os aspectos irregulares ou a *rugosidade* das estruturas. Uma metodologia de transcrição dos fenômenos descritos na geometria euclidiana para uma geometria irregular torna-se necessária. A idéia básica consiste em trocar os comprimentos, áreas e volumes projetados, isto é, lisos (denotado neste trabalho pelo subscrito “0”) pelos comprimentos, áreas e volumes que apresentam *rugosidades* reais. Matematicamente, isto significa passar, simplesmente, o contorno liso  $d\Gamma_0$  para o contorno rugoso,  $d\Gamma$ , da seguinte forma:

$$d\Gamma(x, y) = \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} d\Gamma_0. \quad (2)$$

usando apenas uma simples transformação de coordenadas pela regra da cadeia.

Esta simples transformação matemática é a causa de grandes mudanças no paradigma das superfícies rugosas, introduzindo uma nova visão para os fenômenos da mecânica da fratura, como foi visto nas seções anteriores. Ela também poderá ser bem aproveitada nos Métodos Numéricos de Elementos de Contorno, por exemplo, na simulação de uma trinca rugosa, como será visto nos resultados deste trabalho. Nas outras áreas da Mecânica do Contínuo tais como Calor, Elasticidade, Fluidos fica a proposta para trabalhos de futuros.

A solução encontrada por alguns cientistas ([Irwin 1948](#), [Muskhelishvili 1954](#), [Barenblatt 1962](#), [Rice 1968](#)) para se descrever alguns fenômenos que estão associados a geometrias irregulares (comprimentos, superfícies e volumes) foi utilizar uma relação energética entre a superfície irregular e a superfície de projeção euclidiana de tal forma que esta é escrita como:

$$\frac{dU}{d\bar{A}_0} = \frac{dU}{d\bar{A}}. \quad (3)$$

onde  $U$  é a energia envolvida na superfície de área rugosa  $\bar{A}$ , e na superfície projetada de geometria euclidiana de área  $\bar{A}_0$ . Relações deste tipo pressupõem que a superfície irregular não influencia no fenômeno. Isto pode ser visto se expressarmos a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{dU}{d\bar{A}_0} = \frac{dU}{d\bar{A}} \frac{d\bar{A}}{d\bar{A}_0}. \quad (4)$$

Observe que comparando a expressão Eq. (3) com a Eq. (4) vemos que a relação entre a área rugosa ou irregular  $\bar{A}$  e a área de projeção  $\bar{A}_0$  é igual unidade para o caso em que a equivalência energética é considerada. Contudo, quando a relação entre a  $d\bar{A}/d\bar{A}_0$  é diferente da unidade, a equivalência energética Eq. (3) não é válida. Nesta situação há duas alternativas; (i) ou, se reescreve as relações diretamente em termos da geometria irregular  $\bar{A}$  construindo-se uma nova fenomenologia, (ii) ou, se mantém a equivalência energética na forma da relação Eq. (4) com o termo  $d\bar{A}/d\bar{A}_0 \neq 1$ . Dependendo da fenomenologia e de sua larga aplicabilidade, uma ou outra, alternativa é necessária. Neste trabalho, optamos por fazer as correções necessárias da teoria fenomenológica com base na geometria euclidiana, acrescentando-se nas derivadas o termo de correção  $d\bar{A}/d\bar{A}_0 \neq 1$  em todas as equações. Neste sentido, nós vamos desenvolver os cálculos que serão úteis na descrição dos fenômenos que

envolvem potenciais escalares e vetoriais para problemas de Elementos de Contorno Rugoso, os quais serão descritos pela geometria fractal.

Portanto, observa-se a necessidade de haver uma teoria matemática do contínuo com irregularidades (poros, *rugosidade*, etc.) que siga um método de solução do problema irregular diretamente a partir das equações diferenciais governantes do campo clássico com irregularidades. Desta forma, uma transição do meio contínuo regular clássica para o meio irregular se faz necessária, a qual será vista nesse artigo.

Observa-se, então, que é necessário modificar a teoria do campo contínuo desde a teoria dos campos escalares até os campos tensoriais passando pela teoria do calor, teoria da elasticidade, fratura, por exemplo, para envolver na sua descrição matemática o efeito da *rugosidade* descrevendo-a e explicando o seu surgimento com seus efeitos e conseqüências. Portanto, vamos agora neste artigo propor as modificações desejadas na teoria do campo contínuo de forma a incluir a *rugosidade* das superfícies e o *complementar da porosidade* dos volumes, onde estaremos designando esses meios materiais com o nome de Meios Irregulares.

Neste artigo propomos uma modificação espacial e material das leis da mecânica do contínuo através de volumes porosos e superfícies rugosas, considerando que essas irregularidades geométricas introduzem uma “transformação covariante” na mecânica do contínuo clássica que pode ser fractal ou não. Neste sentido a transformação é introduzida por um tensor  $\xi \rightarrow \mathbf{F}$ <sup>(1)</sup> de *rugosidade* responsável por um certo tipo de “estiramento” ou variação da superfície rugosa em relação a superfície média aparente projetada no espaço euclidiano, onde:

$$\xi \equiv \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_0} = \frac{dA}{dA_0} (\hat{n} \otimes \hat{n}_0). \quad (5)$$

A nossa proposta não se limita a uma irregularidade fractal, podendo ser este apenas um dos modelos a serem utilizados na teoria proposta.

Após esta pequena (ou breve) introdução ao problema de potenciais com *rugosidade*, vamos elaborar um desenvolvimento matemático geral para a teoria da *rugosidade* e do *complementar da porosidade*.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA MECÂNICA DOS MEIOS IRREGULARES

Para descrever o processo de dissipação de energia em um caminho rugoso é necessário a partir de agora, considerar que as funções vetoriais e escalares que definem as superfícies  $\vec{A} = \vec{A}(x, y)$  e os volumes  $V = V(x, y, z)$  irregulares, respectivamente. Essas são funções descritas por algum modelo (como o modelo fractal, por exemplo) capaz de fornecer funções analíticas e diferenciáveis nas vizinhanças dos pontos genéricos de coordenadas  $P = P(x, y, z)$ , a fim de que seja possível calcular as grandezas que se propõem, tais como, *rugosidade* e *porosidade*.

<sup>1</sup> o tensor de estiramento na mecânica do contínuo é comumente denotado pela letra **F** em negrito

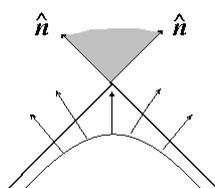


Figura 2. Vetores normais a uma quina suave e a um “bico” ou quina brusca.

Ao contrário de utilização das funções fractais não-diferenciáveis onde se utiliza o cálculo fracional e a teoria da renormalização para contornar o problema da não diferenciabilidade, nosso intento é evitar a não-diferenciabilidade dessas funções. Vamos considerar que sempre é possível definir um vetor normal em “bicos” e quinas e que as cúspides são consideradas inexistentes na escala natural dos fenômenos, conforme mostra a [Figura 2](#). Do contrário uma teoria que envolve sub-diferenciais para definir uma família de vetores normais em “bicos” e “quinas” torna-se necessária. Mas esta proposta é mais complexa e sai fora da proposta desse nosso modelo.

## 2.1 A Teoria mecânica dos meios irregulares em outras áreas

A fundamentação teórica das transformações matemáticas das equações de diversos fenômenos descritos em termos da geometria euclidiana, para uma geometria irregular (fractal ou não), passa por uma abordagem do entendimento das densidades e dos fluxos generalizados em termos dessa nova geometria. Com isso é preciso estabelecer quais transformações matemáticas são necessárias em termos das coordenadas, dos comprimentos, das áreas das superfícies e dos volumes irregulares. É importante elaborar um tratamento matemático da Elasticidade e Fratura em objetos com superfícies rugosas ou com múltiplos vazios no seu volume para aplicação em problemas de contato térmico, convecção, *porosidade*, deformações mecânicas e fratura.

Na elasticidade, [P. D. Panagiotopoulos \(1992\)](#) percebeu a necessidade de reformular a Mecânica dos Sólidos com base na teoria fractal. Paralelamente na Mecânica da Fratura, [Arash Yavari \(2000, 2002, 2006\)](#) reformulou o campo elástico ao redor de uma trinca usando o escalonamento fractal e descobriu novos modos de fratura e uma equação para a curva J-R fractal. Todos estes esforços vêm corroborar a idéia da existência de um novo campo a ser pesquisado e desenvolvido na ciência que unirá em um único ramo os problemas do campo contínuo com as irregularidades físicas e geométricas.

Dentro do contexto desse trabalho observou-se que todas as correções feitas ao campo clássico (escalar, vetorial ou tensorial), quer em problemas de fluxo de calor, de elasticidade e de fratura poderiam ser incluídas em um único contexto de uma Mecânica do Contínuo de Meios Irregulares.

## 2.2 Características básicas da microestrutura de um meio irregular

Entende-se por irregularidades quaisquer acréscimos físicos ou geométricos feitos ao meio contínuo tais como: poros, *rugosidades* superficiais, inclusão de partículas, zonas plásticas, zonas fundidas, trincas internas, etc. Nesta nova roupagem a Mecânica dos Meios Irregulares se reduz a Mecânica do Contínuo quando as irregularidades não existem. Por outro lado a teoria fractal se insere neste contexto quando a opção pela modelagem das irregularidades for utilizando modelos fractais por causa da invariância por transformação de escalas dessas irregularidades. A Mecânica dos Meios Irregulares poderá neste sentido incluir a Mecânica

dos Meios Desordenados quando as equações do contínuo Irregular forem transformadas em equações discretas com irregularidades.

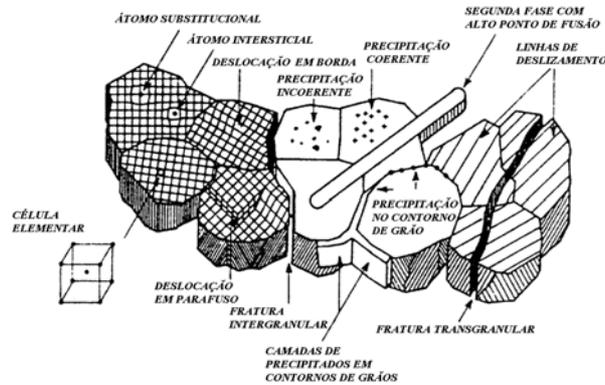


Figura 3. Diferentes tipos de defeitos e irregularidades presentes num material que agem como concentradores de tensão e influenciam na formação da superfície de fratura.

Na microestrutura de um material sólido, por exemplo, encontra-se diferentes tipos de defeitos, entre eles estão, as inclusões, os precipitados, as discordâncias, microtrincas, fraturas, etc. conforme mostra a [Figura 3](#).

Todas essas irregularidades básicas e/ou geométricas podem ser devidamente incluídas na teoria do campo contínuo clássico, na forma de defeitos pontuais, lineares, superficiais e volumétricos, desde que uma representação matemática apropriada seja elaborada de forma a descrever a cinética ou a dinâmica destes defeitos. Para isso vamos iniciar a nossa proposta incluindo na Mecânica do Contínuo apenas a influência geométrica dos defeitos.

Para se obter uma teoria matemática de campo com irregularidades vamos definir algumas grandezas necessárias a obtenção da equação de movimento generalizada.

### 2.3 Densidades e potenciais generalizadas em termos de geometrias irregulares (rugosas ou porosas)

A hipótese de um meio contínuo permite transformar as grandezas da Mecânica Clássica e da Mecânica dos Sólidos em densidades generalizadas, fazendo as grandezas originais se tornarem em grandezas por unidade de volume. Desta forma, uma grandeza  $\mathbf{X}$  qualquer, que pode ser massa,  $M$ , momento linear,  $\vec{p}$ , Força,  $\vec{F}$ , Energia,  $U$ , etc., deverá ser transformada na sua respectiva densidade da seguinte forma:

$$\rho_X \equiv \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta X}{\delta V}. \quad (6)$$

onde  $X = m, \vec{p}, \vec{F}, U, etc$  (massa, momento, força, energia, etc.) que podem ser grandezas escalares, vetoriais, tensoriais, etc.; ou seja qualquer coisa pode ser utilizada para definir uma densidade generalizada da seguinte forma:

$$\rho_X \equiv \frac{dX}{dV} = \frac{dX}{dm} \frac{dm}{dV} \rightarrow \rho_X = \rho \frac{dX}{dM}. \quad (7)$$

Considere o seguinte volume irregular encapsulado, ou inscrito, dentro de um volume euclidiano regular aparente, conforme mostra a [Figura 4](#).

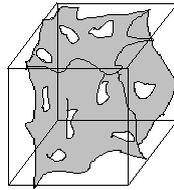


Figura 4. Volume irregular  $V$  encapsulado, ou inscrito, dentro de um volume euclidiano regular aparente  $V_0$ .

Este volume aparente pode ser qualquer sólido ou forma regular que apresente um volume definido.

## 2.4 O conceito escalar do complementar da porosidade

Definindo as densidades generalizadas  $\rho$  e  $\rho_0$  em termos da geometria euclidiana e irregular (que pode ser fractal, ou não), respectivamente, temos:

$$\rho_{x_0} = \frac{dX}{dV_0}. \quad (8)$$

e a densidade dentro do volume irregular (rugoso ou poroso) é dada por:

$$\rho_x = \frac{dX}{dV}. \quad (9)$$

mas pela regra da cadeia podemos escrever:

$$\rho_{x_0} = \frac{dX}{dV} \left( \frac{dV}{dV_0} \right). \quad (10)$$

Logo, a expressão da densidade euclidiana em termos da densidade no volume irregular (rugoso ou poroso) pode ser expressa como:

$$\rho_{x_0} = \rho_x \frac{dV}{dV_0}. \quad (11)$$

observe que o seguinte termo é válido para a conservação da massa, quando a grandeza  $X \equiv m$  é dada por esta. obtendo:

$$\rho_0 dV_0 = \rho dV = dm. \quad (12)$$

diz que a massa dentro do volume considerado permanece constante:

Chamando de complementar da porosidade  $\zeta$  ao seguinte termo:

$$\zeta = \frac{dV}{dV_0}. \quad (13)$$

logo temos que:

$$\rho_{x_0} = \rho_x \zeta. \quad (14)$$

as densidades reais e a aparente estão relacionadas uma com a outra pelo complementar da porosidade local.

Esta última equação será utilizada dentro de outras equações que se seguem para se fazer

as correções necessárias para os termos de rugosidade de superfícies e volumes.

## 2.5 Conceito tensorial de rugosidade

O conceito de rugosidade que descreveremos, a seguir, permite o desenvolvimento de uma teoria de campo contínuo contendo irregularidades onde os teoremas fundamentais (Teorema da Divergência e Teorema de Gauss, etc) podem ser inseridos nesta teoria, de forma análoga a teoria de campo contínuo clássico regular (escalar, vetorial ou tensorial) da qual já estamos acostumados.

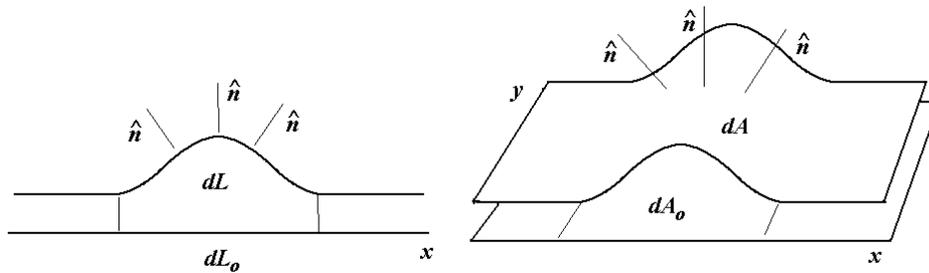


Figura 5. Rugosidade de uma linha ou de uma superfície em relação a uma projeção média lisa de referência.

Consideremos uma linha ou superfície rugosa se esta apresenta qualquer desvio ou “deformação” relativa a uma reta ou a um plano médio de projeção dito liso, isto é, sem rugosidade, conforme mostra a Figura 5.

Observe que a rugosidade pode ser localizada ou distribuída. Quando esta “rugosidade” for do tipo volumétrica, isto é, se achar no interior de um volume qualquer, chamá-la-emos de porosidade volumétrica. Pois em termos de uma generalização dimensional esta idéia é consistente com a teoria fractal, por exemplo.

É preciso não confundir a rugosidade tensorial que será definida a seguir com o tensor gradiente de deformação  $\mathbf{F} = \partial x / \partial X$  da Mecânica do Contínuo Clássica. Este último é um dos tensores que transforma as coordenadas não deformadas em coordenadas deformadas.

É necessário obter uma expressão matemática que defina a rugosidade de forma local, ou seja, dependente das coordenadas. Neste sentido, podemos definir e equacionar a rugosidade de uma superfície irregular da seguinte forma:

$$[\xi] = \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_0} = \frac{dA}{dA_0} (\hat{n} \otimes \hat{n}_0). \quad (15)$$

o símbolo “ $\otimes$ ” denota o produto tensorial entre dois vetores, ou seja,  $\vec{a} \otimes \vec{b} = [a_i b_j] \equiv A_{ij}$  que é uma matriz correspondendo a um tensor de ordem 2, onde  $d\vec{A}$  é o elemento de área sobre a superfície rugosa e  $d\vec{A}_0$  é o elemento de área sobre a superfície lisa.

Observe que o elemento de área rugosa  $d\vec{A}$  e o elemento de área sobre a superfície lisa  $d\vec{A}_0$  podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= dA \hat{n} \\ d\vec{A}_0 &= dA_0 \hat{n}_0 \end{aligned} \quad (16)$$

ou seja, estes elementos de superfícies estão relacionados ao vetor normal em cada ponto das superfícies rugosa e projetada, respectivamente. Portanto, cada um destes elementos depende

das coordenadas das superfícies:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{A}(x, y) \\ \vec{A}_0 &= \vec{A}_0(x, y)\end{aligned}\quad (17)$$

A operação diferencial em Eq. (17), na verdade, dá origem a um “tensor de rugosidade” que pode ser chamado de “gradiente de superfície” e este por sua vez está relacionado ao *tensor de curvatura* ou a variação do vetor normal com a posição sobre a superfície rugosa (Mariano, 2003).

O tensor de rugosidade em 3D pode ser escrito explicitamente em coordenadas cartesianas como:

$$[\xi] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial z} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A Eq. (17) pode ser reescrita como:

$$\vec{A} = \int_s [\xi] \cdot d\vec{A}_0. \quad (19)$$

Esta relação nos ajuda a obter valores de área rugosas em termos da rugosidade.

## 2.6 Taxas, fluxos e equações de movimento generalizados em termos de geometrias rugosas

Na natureza algumas grandezas dinâmicas podem ser representadas por meio de taxas e fluxos generalizados. Entre eles está a taxa e o fluxo de massa, o fluxo de calor, o fluxo de momento linear, etc., que atravessa um corpo, por exemplo.

Definimos a taxa de uma determinada grandeza  $\mathbf{X}$  como sendo:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}. \quad (20)$$

a derivada temporal de uma grandeza  $\mathbf{X}$  define uma grandeza chamada de derivada material no contínuo.

De forma geral o fluxo de uma grandeza generalizada  $\mathbf{X}$  que atravessa uma área infinitesimal,  $d\vec{A}_0$ , em um intervalo infinitesimal de tempo,  $dt$ , é definido como:

$$\mathbf{J}_{x_0} \equiv \frac{d\dot{\mathbf{X}}}{d\vec{A}_0} = \frac{d}{d\vec{A}_0} \left( \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right). \quad (21)$$

Esta grandeza,  $\mathbf{X}$ , é de natureza geral e pode ser um escalar (*massa M, carga elétrica q, calor Q, energia U entropia S*, etc.) ou um vetor (*momento  $\vec{p}$ , velocidade  $\vec{v}$* , etc.) ou um tensor (*tensão  $\sigma$ , Polarização P*, etc.). O sobrescrito “0” indica que a geometria considerada é a geometria euclidiana regular.

## 2.7 O Fluxo de generalizado, $J_{X_0}$ , através de uma superfície rugosa

Considere a superfície irregular  $\vec{A}$  e a sua respectiva projeção  $\vec{A}_0$  no plano euclidiano, pelas quais passam o fluxo de alguma grandeza  $X \equiv X_0$ , pois sua medida absoluta não depende da rugosidade da superfície.

Seja  $\vec{J}_{X_0}$  o fluxo generalizado da grandeza  $X$

$$\vec{J}_{X_0} = \frac{d}{d\vec{A}_0} \left( \frac{dX_0}{dt} \right). \quad (22)$$

onde  $\vec{A}_0$  é a área de projeção euclidiana de  $\vec{A}$ , conforme mostra a [Figura 6](#).

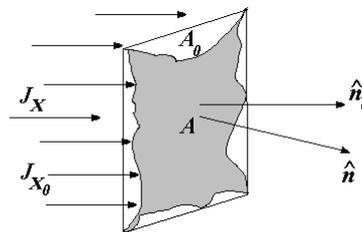


Figura 6. Fluxo através de uma superfície irregular  $A$  contida em uma superfície euclidiana regular aparente projetada  $\vec{A}_0$ .

Vamos a partir de agora definir o fluxo generalizado,  $J_{X_0}$ , das grandezas generalizadas,  $X_0$  consideradas anteriormente, como sendo:

$$J_{X_0} = \frac{d}{dA} \left( \frac{dX_0}{dt} \right) \frac{dA}{dA_0}. \quad (23)$$

onde  $X_0 = m, \vec{p}_0, \vec{F}_0, \vec{U}_0, etc.$

Desde que  $dX/dt$  é uma derivada material para as grandezas  $X = Q$  (calor),  $q$  (carga elétrica),  $C$  (concentração),  $p$  (momento), etc. O fluxos correspondentes podem ser definidos como  $J_X = J_Q$  (fluxo de calor),  $J_q$  (fluxo de corrente elétrica),  $J_p$  (fluxo de massa),  $J_p$  (fluxo de momento = pressão + tensão tangencial), etc, dados respectivamente pelas lei de Fourier, Ohm, Fick, Newton, etc.

Normalmente o fluxo  $\vec{J}_{X_0}$  está associado a uma densidade  $\rho_{X_0}$  e a uma velocidade  $\vec{v}_{X_0}$  do processo ou fenômeno em questão:

$$\vec{J}_{X_0} \equiv \frac{d}{d\vec{A}} \left( \frac{dX_0}{dt} \right) \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_0} \rightarrow \vec{J}_{X_0} = \rho_{X_0} \vec{v}_{X_0}. \quad (24)$$

Observa-se que mesmo uma densidade (como no caso da tensão mecânica que é uma densidade de energia por unidade de volume) esta também pode ser o fluxo de uma outra grandeza (no caso da tensão mecânica é um fluxo de momento). Assim densidades, fluxos e velocidades generalizadas estão associadas umas as outras. Logo para o caso onde se escolhe a grandeza  $X_0 \equiv \vec{p}_0$  correspondendo ao momento linear da partícula tem-se que o seu fluxo correspondente é dado por:

$$\vec{J}_{\bar{p}_0} \equiv \frac{d}{d\bar{A}} \left( \frac{d\bar{p}_0}{dt} \right) \frac{d\bar{A}}{d\bar{A}_0} \rightarrow \vec{J}_{\bar{p}_0} = \sigma_0. \quad (25)$$

onde  $\vec{J}_{\bar{p}_0} = \sigma_0$  é também relacionado ao tensor das tensões o qual será utilizado mais adiante. Veja também que na escolha da grandeza  $X_0 \equiv \bar{p}_0$  igual ao momento linear o fluxo  $\vec{J}_{\bar{p}_0}$  do momento linear corresponde à densidade volumétrica de forças ou ao gradiente do tensor das tensões:

$$\vec{f}_{X_0} \equiv \rho_{\bar{F}_0} = \nabla \vec{J}_{\bar{p}_0}. \quad (26)$$

ou seja todas essas são formas de expressar a mesma grandeza ou a relação entre elas.

Se a área  $\bar{A}_0$  que o fluxo  $\vec{J}_{X_0}$  atravessa é a área de projeção euclidiana, para passar esta equação para a descrição irregular (fractal ou não) basta incluir a derivada em relação a área de superfície rugosa da seguinte forma:

$$\vec{J}_{X_0} = \frac{d}{d\bar{A}} \left( \frac{dX_0}{dt} \right) \frac{d\bar{A}}{d\bar{A}_0}. \quad (27)$$

Observe que na Eq. (27) manteve-se a descrição fenomenológica em termos da área projetada onde apenas a correção da rugosidade foi acrescentada. Desta forma o fluxo em termos da superfície de área rugosa é dado de forma análoga a Eq. (22), como:

$$\vec{J}_X = \frac{d}{d\bar{A}} \left( \frac{dX_0}{dt} \right). \quad (28)$$

Observe que embora as grandezas  $X \equiv X_0$  sejam equivalentemente as mesmas, os seus fluxos generalizados  $\vec{J}_X$  e  $\vec{J}_{X_0}$  não são.

Portanto, podemos escrever Eq. (27) da seguinte forma:

$$\vec{J}_{X_0} = \vec{J}_X \frac{d\bar{A}}{d\bar{A}_0}. \quad (29)$$

onde definindo-se o tensor rugosidade  $[\xi]$  dado em Eq. (17) por:

$$[\xi] \equiv \frac{d\bar{A}}{d\bar{A}_0} = \frac{dA}{dA_0} (\hat{n} \otimes \hat{n}_0). \quad (30)$$

logo, a equação do fluxo atuante na superfície rugosa é:

$$\vec{J}_{X_0} = \vec{J}_X [\xi]. \quad (31)$$

## 2.8 A equação de movimento generalizada

Para descrever o processo de dissipação de energia em um caminho rugoso é necessário:

I) Postular que a energia para criar uma superfície no caminho rugoso é a mesma que a energia no caminho projetado,  $L_0$ , então,  $U_{v_0} = U_v$  e  $\Pi_0 = \Pi$  (esta é a equivalência previamente proposta por Irwin).

II) Postular que os formalismos matemáticos da Mecânica do Contínuo são invariantes, isto é, são os mesmos em um caminho de rugoso e em um caminho projetado.

Mantendo-se a relação entre as taxas temporais da grandeza  $X$  inalterada, a partir de Eq. (28) e Eq. (29) temos que:

$$\frac{dX}{dt} = \int \vec{J}_{x_0} d\vec{A}_0 = \int \vec{J}_x \cdot d\vec{A}. \quad (32)$$

Definindo-se o divergente como sendo:

$$\nabla \cdot \vec{J}_{x_0} \equiv \frac{d}{dV_0} \left( \frac{dX}{dt} \right). \quad (33)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{J}_x \equiv \frac{d}{dV} \left( \frac{dX}{dt} \right). \quad (34)$$

Aqui é importante observar como o teorema da divergência pode ser escrito a partir de Eq. (29) e Eq. (32) em termos de volumes que envolvem ou não rugosidades ou irregularidades, fractais, obtendo-se:

$$\int \vec{J}_{x_0} d\vec{A}_0 = \int \nabla \cdot \vec{J}_{x_0} dV_0. \quad (35)$$

e

$$\int \vec{J}_x \cdot d\vec{A} = \int \nabla \cdot \vec{J}_x dV. \quad (36)$$

Substituindo Eq. (35) e Eq. (36) em Eq. (22) ou Eq. (32), temos:

$$\frac{dX}{dt} = \int \nabla \cdot \vec{J}_{x_0} dV_0 = \int \nabla \cdot \vec{J}_x \cdot dV. \quad (37)$$

Trocando a ordem das derivadas Eq. (33) e Eq. (34) pela regra de Schwartz para funções com derivadas contínuas podemos escrever:

$$\nabla \cdot \vec{J}_{x_0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dV_0} \right). \quad (38)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{J}_x = \frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dV} \right). \quad (39)$$

substituindo Eq. (8) e Eq. (9) nas Eqs. (38) e (39), respectivamente, temos:

$$\nabla \cdot \vec{J}_{x_0} = \frac{d}{dt} \rho_{x_0}. \quad (40)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{J}_x = \frac{d}{dt} \rho_x. \quad (41)$$

Escrevendo a Eq. (38) ou (40) da continuidade em termos da Eqs. (29) e (11)

$$\nabla \cdot \left[ \bar{J}_x \frac{dA}{dA_0} (\hat{n} \otimes \hat{n}_0) \right] = \frac{d}{dt} \left[ \rho_x \frac{dV}{dV_0} \right]. \quad (42)$$

ou em termos do tensor rugosidade  $[\xi]$  dado na Eq. (17) e do complementar da porosidade  $\zeta$  dada na Eq. (13) temos:

$$\nabla \cdot (\bar{J}_x [\xi]) = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta). \quad (43)$$

Definimos a equação da continuidade na nova roupagem geométrica para várias fenomenologias que dependem de geometrias irregulares. Neste conjunto de fenomenologias estão os fenômenos: da difusão, transferência de calor, escoamento viscoso, deformação de sólidos, mecânica da fratura, eletromagnetismo, etc.

A equação de movimento Eq. (43) pode ser ainda generalizada, porque as forças de superfícies sempre podem ser escritas como divergentes de fluxos, da seguinte forma:

$$\sum \bar{f}_s = \nabla \cdot (\bar{J}_x [\xi]). \quad (44)$$

logo temos:

$$\sum \bar{f}_v + \sum \bar{f}_s = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta). \quad (45)$$

onde,  $\sum \bar{f}_v$ , é a somatória da densidade de forças de volume, e  $\sum \bar{f}_s$  é a somatória da densidade das forças de superfície.

## 2.9 Modificação da equação constitutiva de potenciais vetoriais – caso elástico

Para os propósitos deste trabalho vamos estudar os fenômenos de potencial vetorial como a teoria da elasticidade e a mecânica da fratura.

Robert Hooke descobriu a relação entre tensão e deformação de um material elástico. Na versão generalizada de sua lei para o campo de tensão-deformação para meios irregulares com porosidade devemos ter:

$$\bar{J}_{x_0} = \lambda \nabla \cdot \rho_{x_0} + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_{x_0} + \nabla^T \rho_{x_0}). \quad (46)$$

Observe que embora a expressão original da Lei de Hooke seja escrita em termos do gradiente de deformação aqui ela foi escrita de forma generalizada em termos da densidade que além de incluir originalmente o gradiente de deformação inclui também o efeito das irregularidades geométricas. Logo, com a correção das irregularidades (porosidades) temos:

$$\bar{J}_{x_0} = \lambda \nabla \cdot \left( \rho_x \frac{dV}{dV_0} \right) + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \left( \rho_x \frac{dV}{dV_0} \right) + \nabla^T \left( \rho_x \frac{dV}{dV_0} \right) \right]. \quad (47)$$

explicitando a operação do gradiente sobre os termos entre parêntesis temos:

$$\begin{aligned} \bar{J}_{x_o} = & \lambda \left[ \nabla \cdot \rho_x \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_0} \right) \right] + \\ & + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \rho_x \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \nabla^T \rho_x \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \rho_x \nabla^T \left( \frac{dV}{dV_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (48)$$

ou seja, a equação do fluxo de campo escalar com irregularidades atuante no volume poroso:

$$\begin{aligned} \bar{J}_{x_o} = & \lambda [\zeta \nabla \cdot \rho_x + \rho_x \nabla \zeta] + \\ & + \frac{\mu}{2} [\zeta \nabla \rho_x + \rho_x \nabla \zeta + \zeta \nabla^T \rho_x + \rho_x \nabla^T \zeta] \end{aligned} \quad (49)$$

reorganizando os termos dessa equação tem-se:

$$\bar{J}_{x_o} = \zeta \underbrace{\left[ \lambda (\nabla \cdot \rho_x) + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right]}_{\text{Energética}} + \rho_x \underbrace{\left[ \lambda (\nabla \zeta) + \frac{\mu}{2} (\nabla \zeta + \nabla^T \zeta) \right]}_{\text{Geométrica}}. \quad (50)$$

ou para as superfícies rugosas

$$\bar{J}_{x_o} = \left( \lambda \nabla \cdot \rho_x + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right) [\xi]. \quad (51)$$

Neste conjunto de fenomenologias que seguem a equação da continuidade estão os fenômenos, do escoamento viscoso, a deformação de sólidos, mecânica da fratura, eletromagnetismo, etc.

## 2.10 Equação do potencial vetorial para porosidades no domínio

Para se escrever uma equação de movimento para o campo elástico com irregularidades, podemos substituir Eq. (14) na Eq. (47) ou a Eq. (49) e Eq. (11) na Eq. (40) temos:

$$\nabla \cdot \left\{ \lambda \nabla \cdot \left( \rho_x \frac{dV}{dV_0} \right) + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \left( \rho_x \frac{dV}{dV_0} \right) + \nabla^T \left( \rho_x \frac{dV}{dV_0} \right) \right] \right\} = \frac{d}{dt} \left( \rho_x \frac{dV}{dV_0} \right). \quad (52)$$

ou desenvolvendo os operadores internos a partir de da Eq. (52)

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left\{ \lambda \left[ \nabla \cdot \rho_x \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_0} \right) \right] \right\} + \\ & + \nabla \cdot \left\{ \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \rho_x \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \nabla^T \rho_x \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \rho_x \nabla^T \left( \frac{dV}{dV_0} \right) \right] \right\} = \frac{d}{dt} \left( \rho_x \frac{dV}{dV_0} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

para  $\lambda, \mu = cte$  temos:

$$\begin{aligned} & \lambda \nabla \cdot \left[ \nabla \cdot \rho_x \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_0} \right) \right] + \\ & + \frac{\mu}{2} \nabla \cdot \left[ \nabla \rho_x \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \nabla^T \rho_x \left( \frac{dV}{dV_0} \right) + \rho_x \nabla^T \left( \frac{dV}{dV_0} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left( \rho_x \frac{dV}{dV_0} \right) \end{aligned} \quad (54)$$

executando o cálculo do gradiente e do Laplaciano com irregularidades no domínio tem-se:

$$\lambda \left[ \nabla^2 \rho_x \zeta + 2 \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \rho_x \nabla \cdot (\nabla \zeta) \right] + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \cdot (\nabla \rho_x) \zeta + 2 \nabla \rho_x \nabla \zeta + \nabla^{2T} \rho_x \zeta + 2 \nabla^T \rho_x \nabla^T \zeta + \rho_x \nabla^{2T} \zeta \right] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta) \quad (55)$$

ou

$$\lambda \left[ \nabla^2 \rho_x \zeta + 2 \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \rho_x \nabla \cdot (\nabla \zeta) \right] + \frac{\mu}{2} \left[ \zeta \nabla \cdot (\nabla \rho_x) + 2 \nabla \rho_x \nabla \zeta + \rho_x \nabla \cdot (\nabla \zeta) + \zeta \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x) + \nabla^T \rho_x \nabla \zeta + 2 \nabla \cdot \rho_x \nabla^T \zeta + \rho_x \nabla \cdot \nabla^T \zeta \right] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta) \quad (56)$$

ou agrupando em termos semelhantes tem-se:

$$\underbrace{\left\{ \lambda \nabla^2 \rho_x + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x) \right] \right\}}_{\text{Energética}} \zeta + \underbrace{\left\{ \lambda \nabla \cdot (\nabla \zeta) + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \cdot (\nabla \zeta) + \nabla \cdot (\nabla^T \zeta) \right] \right\}}_{\text{Geométrica}} \rho_x + \underbrace{2 \lambda \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \mu \left( \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \nabla \cdot \rho_x \nabla^T \zeta \right)}_{\text{Termos de Interação}} = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta) \quad (57)$$

Esta é uma proposta de equação de movimento para um meio elástico com irregularidades. Utilizando-se a equivalência entre rugosidade e o complementar da porosidade dado na Eq. (13) para descrever o potencial vetorial  $\rho_x$  na superfície do material.

Observe que a parte energética possui forma análoga à parte geométrica, ou seja, isoladamente as soluções são análogas, a menos do termo de interação. É certo que a solução de uma equação do tipo mostrada na Eq. (57) é muito complexa, por isso precisamos recorrer a métodos alternativos ou aproximados. Uma das alternativas é acrescentar correções do termo de porosidade ponto a ponto no domínio a partir da solução primitiva sem irregularidades (problema euclidiano), ou seja, corrige-se a solução do problema elástico sem irregularidades acrescentando-se termos de correções ponto a ponto no domínio para se obter a solução com irregularidades. Outra alternativa é corrigir a solução sem irregularidades com modelos geométricos fractais desde que a geometria do problema seja fractal que possa aceitar tais correções.

Para o caso estático tem-se  $d(\rho_x \zeta) / dt = 0$ , logo:

$$\left\{ \lambda \nabla^2 \rho_x + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x) \right] \right\} \zeta + \left\{ \lambda \nabla \cdot (\nabla \zeta) + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \cdot (\nabla \zeta) + \nabla \cdot (\nabla^T \zeta) \right] \right\} \rho_x + 2 \lambda \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \mu \left( \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \nabla \cdot \rho_x \nabla^T \zeta \right) = 0 \quad (58)$$

## 2.11 Equação do potencial vetorial para as superfícies rugosas

Para se escrever uma equação de movimento para o campo elástico com irregularidades, podemos substituir a Eq. (51) na Eq. (43) e obter:

$$\nabla \cdot \left[ \left( \lambda \nabla \cdot \rho_x + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right) [\xi] \right] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta) \quad (59)$$

Logo

$$\begin{aligned}
& [\xi] \nabla \cdot (\lambda \nabla \cdot \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x \nabla [\xi] + [\xi] \nabla \cdot \left( \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right) \\
& + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \nabla [\xi] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta)
\end{aligned} \tag{60}$$

ou reescrevendo temos:

$$\begin{aligned}
& [\xi] \left[ \nabla \cdot (\lambda \nabla \cdot \rho_x) + \nabla \cdot \left( \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right) \right] + \\
& + \left[ \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x \right] \nabla [\xi] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta)
\end{aligned} \tag{61}$$

E finalmente

$$\begin{aligned}
& [\xi] \left[ \lambda \nabla^2 \cdot \rho_x + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x)) \right] + \\
& + \left[ \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x \right] \nabla [\xi] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta)
\end{aligned} \tag{62}$$

Esta é uma proposta de equação de movimento para um meio elástico com rugosidades na superfície.

Para o caso estático tem-se  $d(\rho_x \zeta) / dt = 0$ , logo:

$$\begin{aligned}
& [\xi] \left[ \lambda \nabla^2 \cdot \rho_x + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x)) \right] + \\
& + \left[ \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x \right] \nabla [\xi] = 0
\end{aligned} \tag{63}$$

Reescrevendo esta equação temos:

$$\frac{\lambda \nabla^2 \cdot \rho_x + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x))}{\frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x} + \frac{\nabla [\xi]}{[\xi]} = 0. \tag{64}$$

O que resulta em duas equações separadas:

Uma para problema elástico sem rugosidade:

$$\lambda \nabla^2 \cdot \rho_x + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x)) - k \left( \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x \right) = 0. \tag{65}$$

e outra apenas para a rugosidade:

$$\nabla [\xi] + k [\xi] = 0. \tag{66}$$

Isto nos faz acreditar que o problema que apresenta apenas rugosidade na superfície com interior do domínio sólido, pode ser resolvido apenas com funções de correção geométrica, como no caso de uma trinca rugosa como será mostrado mais adiante nos resultados.

A solução da Eq. (66) é do tipo:

$$[\xi] = [\xi]_0 \exp(-k \cdot \bar{r}). \quad (67)$$

Isto significa que o efeito da rugosidade sobre o campo do potencial em questão é atenuado exponencialmente à medida que um observador se afasta da borda rugosa ( $\bar{r} = 0$ ) para o interior do domínio do campo ( $\bar{r} \rightarrow \infty$ ).

### 3 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL E METODOLOGIA

Neste artigo vamos definir o problema sem irregularidades (será chamado de P1) e com irregularidades (será chamado de P2) e vamos solucioná-los por pelos menos dois métodos numéricos (Diferenças Finitas e Elementos Finitos) para obter um crivo numérico seguro que possa garantir a correta solução desses problemas. Depois procuraremos inferir a solução P2 a partir de P1 por alguma aproximação ou correção a qual chamaremos esse de problema equivalente (será chamado de PE). Desta forma poderemos obter o conhecimento da influência das irregularidades em um problema elástico.

### 4 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Analisando-se agora o efeito da rugosidade de uma trinca sobre o campo de tensão elástico em um material frágil, observa-se o que era esperado pelas Eqs. (65) e (66), ou seja, uma perturbação geométrica na intensidade do campo ao redor da falha, mas que se atenua à medida que se afasta da rugosidade da trinca na direção do interior do material conforme mostra a [Figura 7](#) para a componente  $\sigma_{xx}$ .

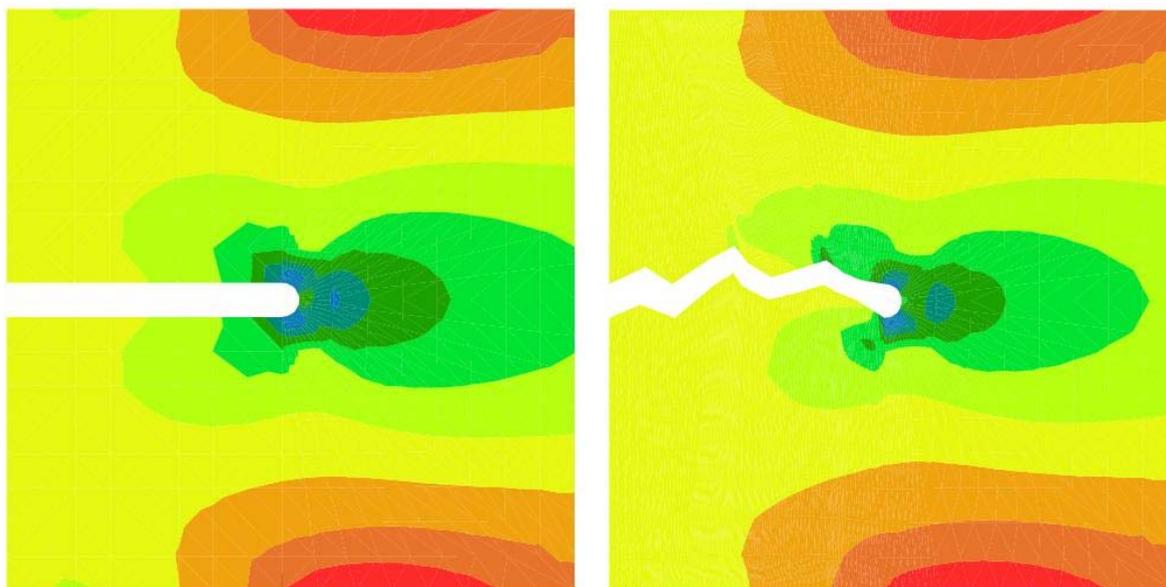


Figura 7. Imagem do resultado da simulação numérica do campo de tensão sem rugosidade. Sigma XX sem rugosidade e com rugosidade.

Para grandes distancias longe do efeito da rugosidade superficial espera-se que os valores do campo elástico para o caso sem e com rugosidade se aproxime um do outro. O mesmo observa-se para as outras componentes do campo como no caso do cisalhamento dado pela intensidade da componente  $\sigma_{xy}$ , conforme mostra a [Figura 8](#).

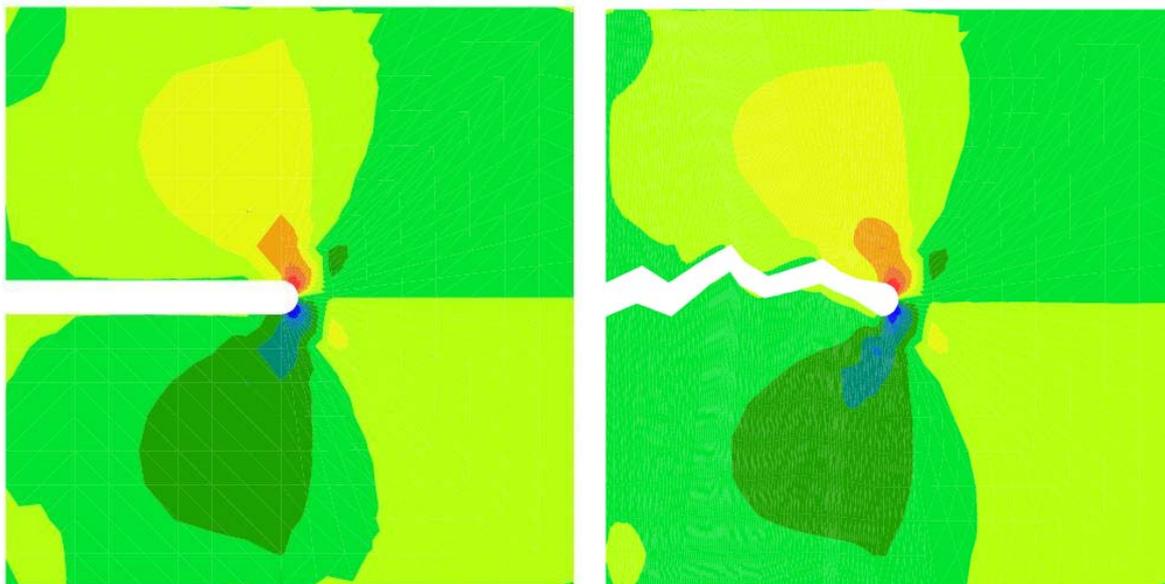


Figura 8. Imagem do resultado da simulação numérica do campo de tensão sem rugosidade. Sigma XY sem rugosidade e com rugosidade.

A componente do campo que apresentou menor variação quanto a sua forma foi a componente  $\sigma_{yy}$ , conforme mostra a Figura 9. Mesmo para as direções principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  as formas do campo sofrem o mesmo tipo de perturbação na sua intensidade devido a geometria rugosa da trinca.

Quando se gráfica a intensidade da componente  $\sigma_{yy}$  do campo em função do raio na frente da trinca para um ângulo  $\theta = 0^\circ$  obtém-se os gráficos da Figura 10. Esta figura mostra o campo de tensão sofreu um efeito na sua intensidade devido a geometria rugosa da trinca.

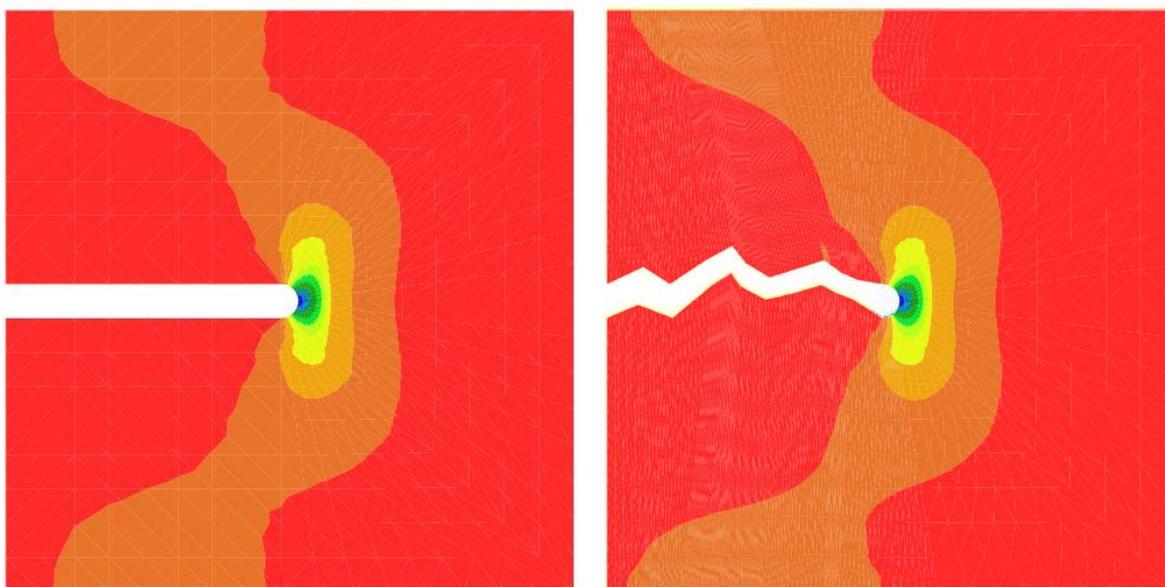


Figura 9. Imagem do resultado da simulação numérica do campo de tensão sem rugosidade. Sigma YY sem rugosidade e com rugosidade.

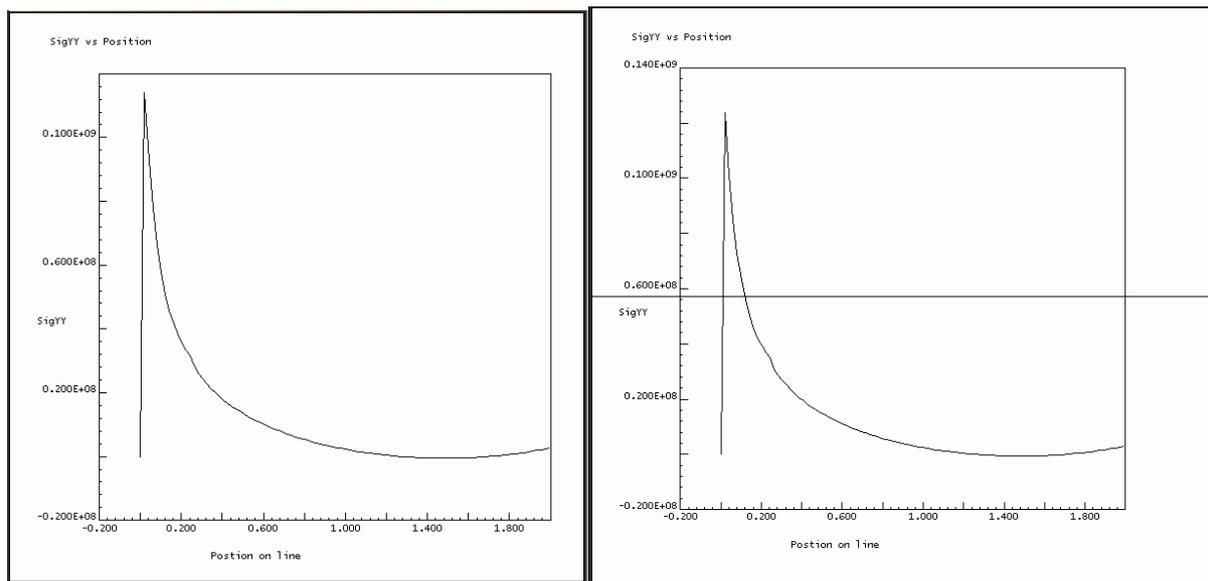


Figura 10. Gráfico da intensidade do campo de tensão na ponta da trinca em função da distancia  $r$  sem e com rugosidade.

## 5 DISCUSSÃO

### 5.1 Aspecto geral do campo de tensão ao redor de uma trinca rugosa

Classicamente, um meio elástico frágil possui um campo tensorial assintótico, cujo expoente de singularidade, fornece uma função homogênea para o campo de tensão na ponta de uma trinca em função da distância  $r$  na frente da trinca (Hutchinson 1968; Rice & Rosengren, 1968) do tipo:

$$\sigma_{I,II,III}(r) \sim \frac{K_{I,II,III}}{r^{n/2+1}} \quad (68)$$

onde  $n = 1$ , é o grau de homogeneidade da função do campo de deformação do meio elástico dado pela lei de Hooke

Modelos da literatura têm discutido a singularidade do campo de tensão de uma trinca rugosa fractal (Balankin, 1994; Mosolov 1991, 1992, 1993, Yavari, 2002). Mosolov (1991, 1992) foi o primeiro a fazer conjecturas sobre o campo de tensão de uma trinca fractal rugosa em uma meso-escala. Mosolov (1993) sugeriu que se esse campo elástico deveria possuir um expoente de singularidade fracionário associado a dependência assintótica com a distância  $r$  na frente da trinca dado pela expressão:

$$\sigma_{I,II,III}(r) \sim \frac{K_{I,II,III}}{r^\alpha} \quad (69)$$

onde:

$$\alpha = \frac{2 - D_B}{2} = \frac{H}{2} \quad (70)$$

Yavari (2002) discutiu a expressão proposta por Mosolov (1993) e também a proposta de Balankin (1994), Yavari (2002) acredita que a expressão do campo de tensão na ponta de

uma trinca fractal deve satisfazer a seguinte expressão:

$$\sigma \sim \frac{K_I}{r^\beta}. \quad (71)$$

onde:

$$\alpha = \frac{2H - 1}{2H}. \quad (72)$$

e ainda Yavari (2002) afirma que singularidade deste campo depende do modo de fratura imposto sobre a trinca.

Quando se utiliza um mapeamento do campo elástico ao redor de uma trinca a partir de uma expressão obtida por uma solução analítica do campo de tensão observa-se que uma mudança no expoente  $\alpha = 1/2$  para um outro expoente  $\alpha$  dado pela Eq. (72) muda-se brutalmente os aspecto geral do campo elástico ao redor de uma falha, conforme mostra a Figura 11.

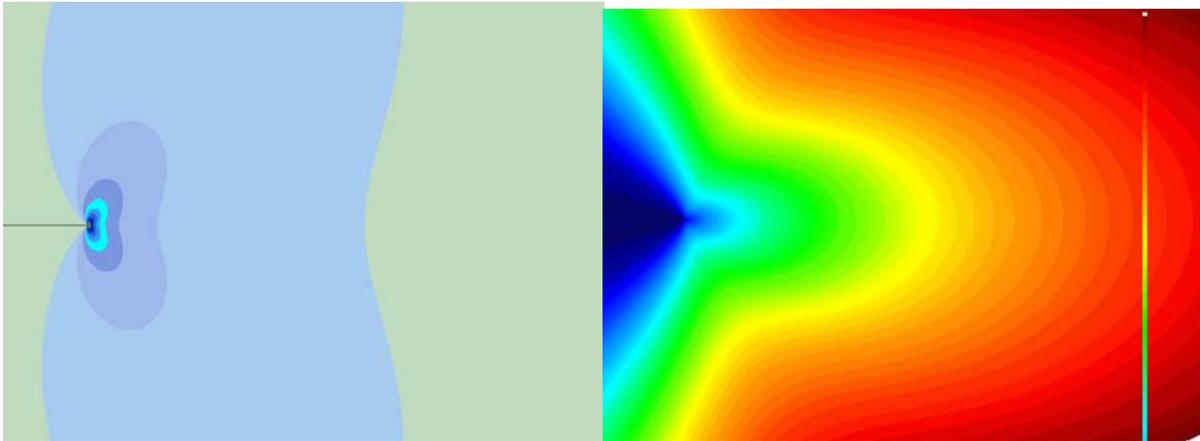


Figura 11. Campo de Tensão  $\sigma_{yy}$  no Modo I de Fratura com singularidade a) Modelo Clássico  $\alpha = -1/2$  ; b) Modelo de MOSOLOV  $\alpha = -0,4$  .

Esta figura mostra como varia o aspecto do campo de tensão elástico ao redor de uma falha se a singularidade muda.

Contudo, resultados preliminares do nosso estudo numérico do campo de tensão na ponta de um entalhe com *rugosidade* senoidal para o problema elástico sem propagação de trinca, mostra que o campo de tensão possui uma dependência assintótica com a posição  $r$  na frente da trinca que varia desde uma valor  $\alpha$  máximo que depende do material até uma valor  $\alpha$  mínimo igual a  $1/2$ , que corresponde ao valor clássico. Ou seja, nosso estudo preliminar, mostra que a singularidade do campo de tensão na ponta da trinca varia como se fosse um multifractal e que não há um único expoente fractal na ponta da trinca, mas este varia com a posição  $r$ .

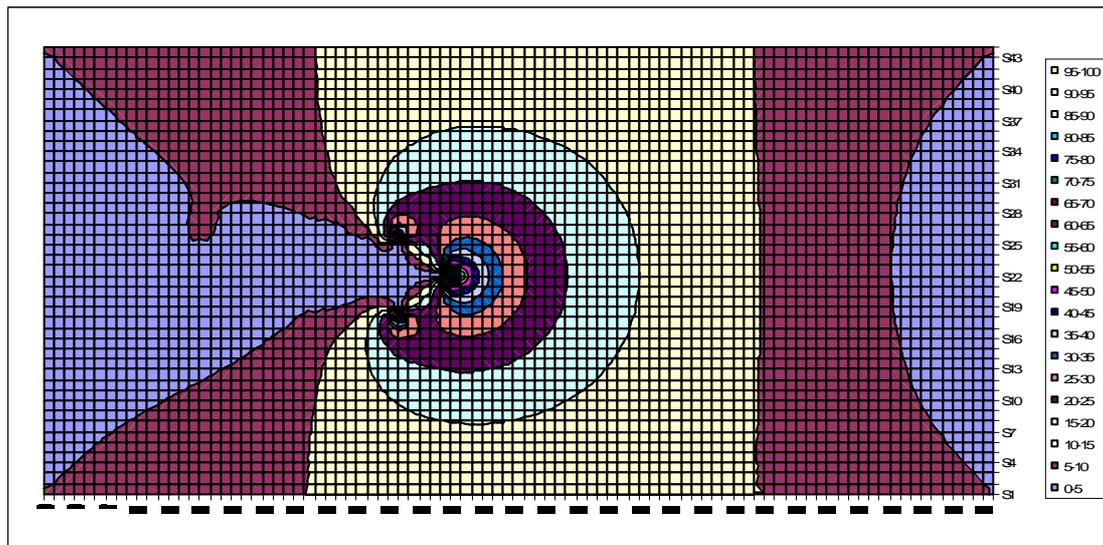


Figura 12. Exemplo preliminar de pontas de *rugosidade* penetrando em regiões intensas da vizinhança do campo escalar ou vetorial de tensão da ponta principal gerando outras zonas plásticas (cardióide para tensão plana) simulado pelo método de Diferenças Finitas para um campo escalar.

Um outro resultado preliminar simulado por Diferenças Finitas e Elementos Finitos, mostra que pontas de *rugosidade* que penetram regiões intensas da vizinhança dos campos escalares ou vetoriais de tensão da ponta principal da trinca geram outras zonas plásticas (cardióide para tensão plana) conforme mostra a [Figura 12](#).

## 6 CONCLUSÕES

Para uma trinca rugosa, observa-se que novas cardióides surgem além daquela da trinca principal, quando protuberâncias dessa rugosidade penetram dentro de uma região mais intensa do campo de tensão na ponta da trinca. Isto os leva a concluir que a rugosidade permite uma forma alternativa de dissipação que pode levar a bifurcação da trinca em processo de altas taxas de deformação para trincas rápidas, por exemplo. Este resultado corrobora o que já havia sido demonstrado experimentalmente por [Fineberg \(1992\)](#). A singularidade do campo de tensão na ponta da trinca não possui uma única dimensão fractal de rugosidade, mas depende da posição na frente da ponta da trinca.

## REFERENCES

- Alves Lucas Máximo, Silva Rosana Vilarim da, Mokross Bernhard Joachim, The influence of the crack fractal geometry on the elastic plastic fracture mechanics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 295, 1/2:144-148, 12 June 2001.
- Alves Lucas Máximo, Fractal geometry concerned with stable and dynamic fracture mechanics. *Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 44/1:44-57, 2005.
- Alves, Lucas Máximo, Silva, Rosana Vilarim da, Lacerda, Luiz Alkimin De, Fractal modeling of the *J-R* curve and the influence of the rugged crack growth on the stable elastic-plastic fracture mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 77:2451-2466, 2010.
- Alves – Alves, Lucas Máximo; et al., Verificação de um Modelo Fractal do Perfil de Fratura de Argamassa de Cimento, *48º Congresso Brasileiro de Cerâmica*, realizado no período de 28 de junho a 1º de julho de 2004, em Curitiba – Paraná.
- Alves, Lucas Máximo; Lacerda, Luiz Alkimin De, Application of a generalized fractal model

- for rugged fracture surface to profiles of brittle materials , artigo em preparação, 2010.
- Bammann, D. J. and Aifantis, E. C., On a proposal for a Continuum with Microstructure, *Acta Mechanica*, 45:91-121, 1982.
- Balankin , A.S and P. Tamayo, *Revista Mexicana de Física* 40, 4:506-532, 1994.
- Barenblatt, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture, *Advances in Applied Mechanics*, 7:55-129, 1962.
- Blyth, M. G. , Pozrikidis, C., Heat conduction across irregular and fractal-like surfaces, *International Journal of Heat and Mas Transfer*, 46: 1329-1339, 2003.
- Carpinteri, A.; Puzzi, S., Complexity: a new paradigm for fracture mechanics, *Frattura ed Integrità Strutturale*, 10, 3-11, 2009, DOI:10.3221/IGF-ESIS.1001
- Dyskin, A. V., Effective characteristics and stress concentrations in materials with self-similar microstructure, *International Journal of Solids and Structures*, 42:477-502, 2005
- Duda, Fernando Pereira; Souza, Angela Crisina Cardoso, On a continuum theory of brittle materials with microstructure, *Computacional and Applied Mathemathics*, 23, 2-3:327-343, 2007.
- Engelbrecht, J., Complexity in Mechanics, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 67, 3:293-325, 2009
- Fineberg, Jay; Gross; Steven Paul; Marder, Michael and Swinney, Harry L. Instability in dynamic fracture, *Physical Review Letters*, 67, 4:457-460, 22 July 1991.
- Fineberg, Jay; Steven Paul Gross, Michael Marder, and Harry L. Swinney, Instability in the propagation of fast cracks. *Physical Review B*, 45, 10:5146-5154 (1992-II), 1 March, 1992.
- Forest, S. Mechanics of generalized continua: construction by homogenization, *J. Phys. IV, France*, 8:39-48, 1998.
- Hyun, S. L.; Pei, J. -F.; Molinari, and Robbins, M. O., Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces, *Physical Review E*, 70:026117, 2004.
- Hornbogen, E.; Fractals in microstructure of metals; *International Materials Reviews*, 34, 6:277-296, 1989.
- Hutchinson, J.W., Plastic Stress and Strain Fields at a Crack Tip., *J. Mech. Phys. Solids*, 16:337-347, 1968.
- Irwin, G. R., "Fracture Dynamics", *Fracturing of Metals*, American Society for Metals, Cleveland, 147-166, 1948.
- Lazarev, V. B., Balankin, A. S. and Izotov, A. D., Synergetic and fractal thermodynamics of inorganic materials. III. Fractal thermodynamics of fracture in solids, *Inorganic materials*, 29, 8:905-921, 1993.
- Mariano Paolo Maria o, Influence of the material substructure on crack propagation: a unified treatment, arXiv:math-ph/0305004v1, May 2003.
- Morel, Sthéphane, Jean Schmittbuhl, Juan M.Lopez and Gérard Valentin, Size effect in fracture, *Phys. Rev. E*, 58, 6, Dez 1998.
- Mosolov, A. B., *Zh. Tekh. Fiz.* 61, 7, 1991. (*Sov. Phys. Tech. Phys.*, 36, 75, 1991).
- Mosolov, A. B. and F. M. Borodich Fractal fracture of brittle bodies during compression, *Sovol. Phys. Dokl.*, 37, 5:263-265, May 1992.
- Mosolov, A. B., Mechanics of fractal cracks in brittle solids, *Europhysics Letters*, 24, n. 8:673-678, 10 December 1993.
- Muskhelisvili, N. I., Some basic problems in the mathematical theory of elasticity, Nordhoff, The Netherlands, 1954.
- Panagiotopoulos, P.D. Fractal geometry in solids and structures, *Int. J. Solids Structures*, 29, 17:2159-2175, 1992.
- Panin, V. E., The physical foundations of the mesomechanics of a medium with structure,

- Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Translated from *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Fizika*, 4:5-18, Plenum Publishing Corporation, 305 - 315, April, 1992.
- Ponson, L., D. Bonamy, H. Auradou, G. Mourou, S. Morel, E. Bouchaud, C. Guillot, J. P. Hulin, Anisotropic self-affine properties of experimental fracture surfaces, *arXiv:cond-mat/0601086*, 1, 5 Jan 2006.
- Rice, J. R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 35:379-386, 1968.
- Rupnowski, Przemysław; Calculations of J integrals around fractal defects in plates, *International Journal of Fracture*, 111: 381–394, 2001.
- Su, Yan; LEI, Wei-Cheng, *International Journal of Fracture*, 106:L41-L46, 2000.
- Tarasov, Vasily E. Continuous medium model for fractal media, *Physics Letters A* 336:167-174, 2005..
- Trovalusci, P. and Augusti, G., A continuum model with microstructure for materials with flaws and inclusions, *J. Phys. IV, France*, 8:353-, 1998.
- Xie, Heping; Effects of fractal cracks, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 23:235-244, 1995.
- Xie, J. F., S. L. Fok and A. Y. T. Leung, A parametric study on the fractal finite element method for two-dimensional crack problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:631-642, 2003. (DOI: 10.1002/nme.793)
- Yavari, Arash, The fourth mode of fracture in fractal fracture mechanics, *International Journal of Fracture*, 101:365-384, 2000.
- Yavari, Arash, The mechanics of self-similar and self-affine fractal cracks, *International Journal of Fracture*, 114:1-27, 2002,
- Yavari, Arash, On spatial and material covariant balance laws in elasticity, *Journal of Mathematical Physics*, 47, 042903:1-53, 2006.
- Weiss, Jérôme; Self-affinity of fracture surfaces and implications on a possible size effect on fracture energy, *International Journal of Fracture*, 109: 365–381, 2001.