

FURTHER DEVELOPMENT IN THE RADIAL INTEGRATION METHOD

Luis J. M. Jesus^a, Eder L. Albuquerque^b and Paulo Sollero^a

^a*Departamento de Projeto Mecânico, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil luisjorgem@fem.unicamp.br; sollero@fem.unicamp.br*

^b*Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil eder@unb.br*

Keywords: Boundary element method, radial integration method, dual reciprocity method

Abstract. The radial integration method is a method to transform domain integrals into boundary integrals in the boundary element formulation. It is easy to implement, does not require particular solutions, and is quite suitable to problems where fundamental solutions are difficult to implement or even unknown. However, its main drawback is the computational cost that is higher than other techniques as dual reciprocity or cell integration. This article discusses the numerical aspects of its implementation. The dependence of the response on the number of integration points is analysed. Accuracy and computational costs are compared with other techniques and results are presented for heat transfer.

1 INTRODUÇÃO

Métodos clássicos para solução de problemas do contínuo em engenharia geralmente fazem uso de alguma forma de discretização de domínio. O mais popular destes métodos é o método dos elementos finitos (Zienkiewicz and Taylor, 1991) que aproxima as variáveis sobre pequenas partes do domínio, chamadas elementos finitos, em termos de funções de interpolação polinomial. As desvantagens dos elementos finitos é que grandes quantidades de dados são necessárias para discretizar o domínio completo, especialmente para problemas tridimensionais, e que a técnica, às vezes, dá resultados imprecisos. Isto é particularmente verdadeiro para os casos de funções descontínuas, singularidades ou funções que variam rapidamente. Há também dificuldades na modelagem em regiões infinitas e problemas em que o contorno se move.

A aplicação do método dos elementos de contorno requer, preferencialmente, que a solução fundamental para o problema em consideração seja conhecida (Brebbia and Dominguez, 1992; Banerjee, 1992). Essa solução fundamental deve levar em conta todos os termos da equação governante de forma a obter uma formulação onde apenas o contorno é discretizado. Quando isso não for possível, os termos não considerados na obtenção da solução fundamental produzirão integrais de domínio que, preferencialmente, devem ser transformadas em integrais de contorno. A primeira alternativa é fazer a transformação exata da integral de domínio em integral de contorno. Porém, isto só é possível quando os termos não considerados são funções apenas da geometria. A segunda alternativa é transferir os efeitos da integral de domínio para o contorno usando-se o método de elementos de contorno de reciprocidade dual (Partridge et al., 1992) ou da integração radial (Gao, 2002). Estes procedimentos são mais gerais e podem ser empregados para quaisquer termos. Neste trabalho o método dos elementos de contorno é aplicado a problemas de potenciais cujas forças de corpo são funções da solução do problema. As integrais de domínio serão transformadas em integrais de contorno usando o método de integração radial.

2 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Considere a equação diferencial escrita na forma:

$$\nabla^2 u + b = 0 \quad (1)$$

onde u é uma função potencial qualquer e ∇^2 é o operador diferencial laplaciano dado por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2)$$

Embora exista solução fundamental para a equação diferencial (1), a formulação de elementos de contorno deste trabalho utilizará a solução fundamental da equação de Laplace, ou seja,

$$\nabla^2 u^* = -\delta(x - d) \quad (3)$$

onde x é o ponto campo, d é o ponto fonte e δ é o delta de Dirac.

A solução fundamental da equação (1) é bem conhecida e dada por

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \lg R \quad (4)$$

onde R é a distância entre o ponto fonte d e o ponto campo x .

Aplicando o procedimento padrão dos elementos de contorno à equação e considerando b como força de corpo, obtém-se a seguinte equação integral:

$$cu(d) - \int_S u^* q dS + \int_S q^* u dS + \int_A u^* b dA = 0 \quad (5)$$

Note que existe uma integral de domínio na equação (5). Essa integral de domínio será transformada em integral de contorno usando o procedimento proposto neste trabalho.

3 TRANSFORMAÇÃO EXATA

A integral de domínio da equação (5) pode ser calculada por integração direta, através de células, na área A . Contudo, a formulação dos elementos de contorno perde seu principal atrativo que é a discretização somente do contorno. Nesta seção, as integrais de domínio oriundas das forças de corpo são transformadas em integrais de contorno por uma transformação exata.

A integral de domínio da equação integral (5) pode ser escrita em coordenadas polares como:

$$\int_A bu^* dA = \int_A bu^* \rho d\rho d\theta, \quad (6)$$

ou

$$\int_A bu^* dA = \int_\theta \int_0^r bu^* \rho d\rho d\theta, \quad (7)$$

onde r é o valor de ρ em um ponto do contorno S (veja figura 1).

Definindo F^* como a seguinte integral:

$$F^* = \int_0^r bu^* \rho d\rho, \quad (8)$$

pode-se escrever:

$$\int_A bu^* dA = \int_\theta F^* d\theta. \quad (9)$$

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ (Figura 1), a relação entre o comprimento do arco $r d\theta$ e o comprimento infinitesimal do contorno dS , pode ser escrito como:

$$\cos \alpha = \frac{r \frac{d\theta}{2}}{\frac{dS}{2}}, \quad (10)$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos \alpha}{r} dS. \quad (11)$$

Usando as propriedades do produto interno dos vetores unitários \mathbf{n} e \mathbf{r} , indicados na Figura 1, podemos escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} dS. \quad (12)$$

Finalmente, substituindo a equação (12) na equação (9), a integral de domínio da equação (5) pode ser escrita como uma integral de contorno dada por:

$$\int_A bu^* dA = \int_S \frac{F^*}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS. \quad (13)$$

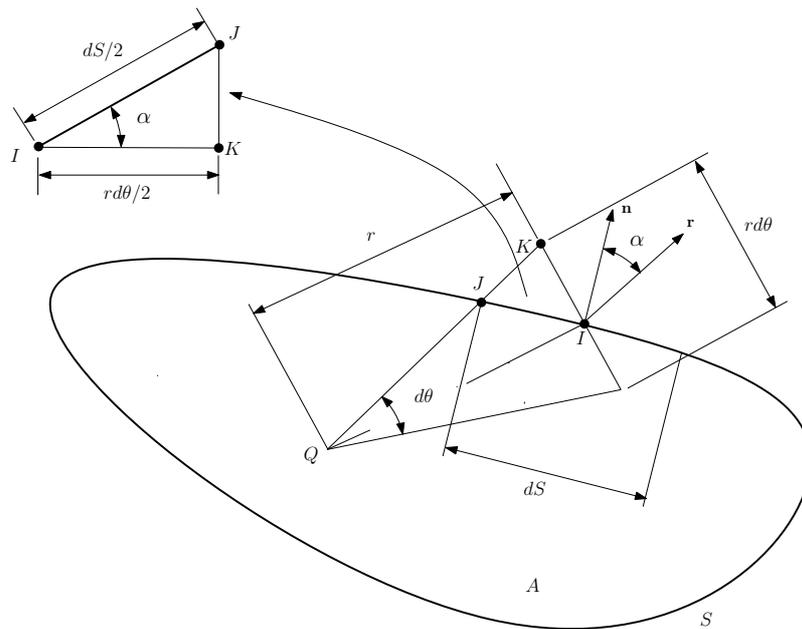


Figure 1: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

O procedimento descrito nesta seção pode ser aplicado sempre que a força de corpo for função apenas da geometria, ou seja, $b = b(x, y)$, em que

$$x = x_d + \rho \cos \theta \quad (14)$$

e

$$y = y_d + \rho \sin \theta, \quad (15)$$

onde (x_d, y_d) são as coordenadas do ponto fonte.

4 MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL - RIM

A transformação exata descrita na seção 3 pode ser aplicada quando a força de corpo b depende apenas da geometria. Quando b depende da variável u , um procedimento alternativo é aplicado, que neste caso será o método da integração radial (RIM).

O RIM aproxima a força de corpo b como uma soma de M produtos de funções de aproximação f^m e coeficientes a determinar γ^m , ou seja:

$$b(P) = \sum_{m=1}^M \gamma^m f^m \quad (16)$$

Inserindo a equação (16) na equação (6), tem-se:

$$P(Q) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_A f^m u^*(Q, P) \rho d\rho d\theta \quad (17)$$

ou

$$P(Q) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\theta} \int_0^r f^m u^*(Q, P) \rho d\rho d\theta, \quad (18)$$

onde r é o valor de ρ em um ponto no contorno S (ver Figura 1):

Definindo $F^m(Q)$ como:

$$F^m(Q) = \int_0^r f^m u^*(Q, P) \rho d\rho, \quad (19)$$

pode-se escrever:

$$P(Q) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\theta} F^m(Q) d\theta. \quad (20)$$

Substituindo a equação (12) na equação (20), a equação integral de domínio da equação (5) pode ser escrita como uma integral de contorno dada por:

$$P(Q) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_S \frac{F^m(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS. \quad (21)$$

Assim, a integral de domínio da equação (5) pode ser escrita como:

$$P^{(d)} = \sum_{m=1}^M \gamma^m \sum_{i=1}^{N_e} p^{(d,m)}, \quad (22)$$

onde

$$p^{(d,m)} = \int_S \frac{F^{(d,m)}}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS, \quad (23)$$

ou, na forma matricial, como:

$$P(Q) = \left[\int_S \frac{F_1(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS \quad \int_S \frac{F_2(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS \quad \dots \quad \int_S \frac{F_M(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS \right] \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{Bmatrix}. \quad (24)$$

Para calcular γ_m , é necessário considerar a força de corpo em M pontos do domínio e do contorno. No caso deste trabalho, estes pontos são os nós do contorno e alguns pontos internos. Assim, a equação (16) pode ser escrita como:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\gamma \quad (25)$$

e γ pode ser calculado como:

$$\gamma = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}, \quad (26)$$

Substituindo (26) na equação (24), tem-se:

$$P(Q) = \left[\int_S \frac{F_1(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS \quad \int_S \frac{F_2(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS \quad \dots \quad \int_S \frac{F_M(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS \right] \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}. \quad (27)$$

Escrevendo a equação (27) para todos os pontos do domínio, isto é, todos os nós do contorno e pontos internos, tem-se:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{b}, \quad (28)$$

onde $\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}$, \mathbf{P} é um vetor que contém os valores de $P(Q)$ em todos os pontos fontes Q e \mathbf{R} é uma matriz que contém todos os valores das integrais (27) quando esta equação é escrita para todos os pontos fontes Q .

As funções de aproximação f^m serão funções de base radial escritas em termos de R , onde R é a distância entre o centro T da função de base radial e o ponto de integração P . Neste trabalho foi usada como função de aproximação de base radial, a função dada por:

$$f = 1 + R. \quad (29)$$

Da Figura 2, pode-se escrever:

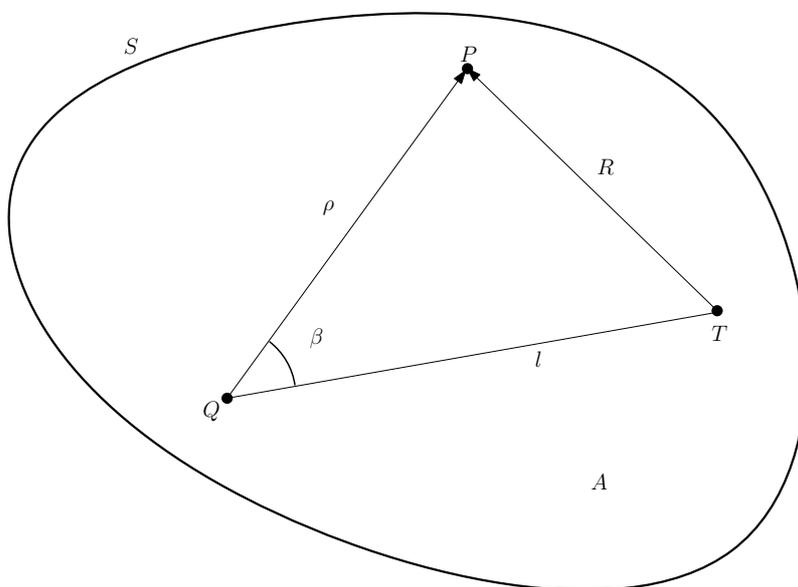


Figure 2: Posição dos pontos no domínio.

$$R = \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos \beta}, \quad (30)$$

onde l é a distância entre os pontos T e Q e β é o ângulo entre ρ e l , conforme observado na Figura 2. A integral (15) é escrita como

$$F^m(Q) = \int_0^r \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos \beta} + 1 \right) \log(\rho) \rho d\rho, \quad (31)$$

A integral da equação (31) não pode ser calculada analiticamente. O cálculo numérico desta integral torna mais alto o custo computacional do RIM, uma vez que no DRM não se faz integração numérica na transformação da integral de domínio em integrais de contorno. A vantagem mais interessante do RIM sobre o DRM para formulações que envolvam materiais anisotrópicos é que as funções de aproximação f_m podem ser escolhidas livremente, pois o RIM não usa as soluções particulares \hat{u}_m .

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para se verificar a performance do método proposto, foi analisado um problema que possui uma solução analítica. Trata-se de uma placa quadrada com lado de comprimento 1, ou seja, $(0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1)$ e sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ em } x = 0, \\ u &= 1 \text{ em } x = 1, \\ q &= -\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ em } y = 0, \\ q &= -\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ em } y = 1. \end{aligned}$$

A solução analítica para este problema é dada por:

$$u^{an} = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

O problema foi analisado usando diferentes números de elementos (NE) e número de pontos internos (NPI). A figura 3 mostra a malha com 4 elementos quadráticos contínuos e 9 pontos internos. A tabela 1 mostra o erro percentual entre os diversos casos analisados. O erro percentual é dado por:

$$\varepsilon\% = \sum_{i=1}^{NPI+NN} \frac{\sqrt{(u_i^{an} - u_i)^2}}{\sum_{i=1}^{NPI+NN} \sqrt{(u_i^{an})^2}} \times 100\% \quad (32)$$

onde NN é o número de nós no contorno. Conforme pode ser visto na tabela 1, em geral há uma boa concordância entre os resultados numéricos e analíticos, com erros quase sempre inferiores a 1%. É possível notar também que o erro diminui com o aumento do número de pontos internos e com o número de elementos na malha.

A figura 4 mostra a influência do número de pontos de integração no erro percentual. Como pode ser visto, o erro percentual tem um valor ótimo (mínimo) para 4 pontos de integração. Aumentando o número de pontos de integração, há um ligeiro aumento no erro percentual. O erro percentual se estabiliza a partir de 8 pontos de integração.

A figura 5 mostra a distribuição da variável u ao longo da placa quadrada. Neste caso o resultado foi obtido com 2 elementos por lado (8 elementos no total) e 9 pontos internos, com método da integração radial usando 4 pontos de Gauss.

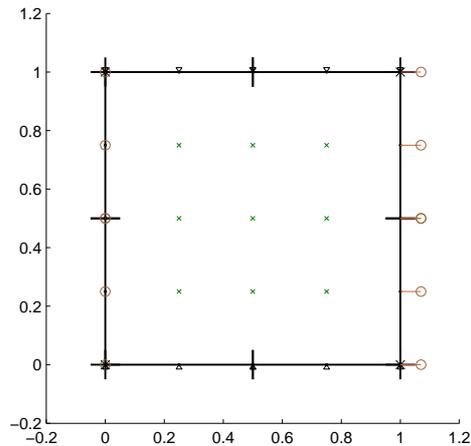


Figure 3: Malha e pontos internos (8 elementos de contorno e 9 pontos internos).

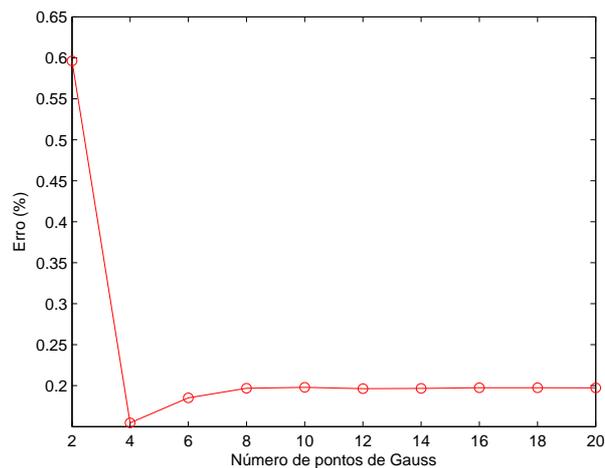


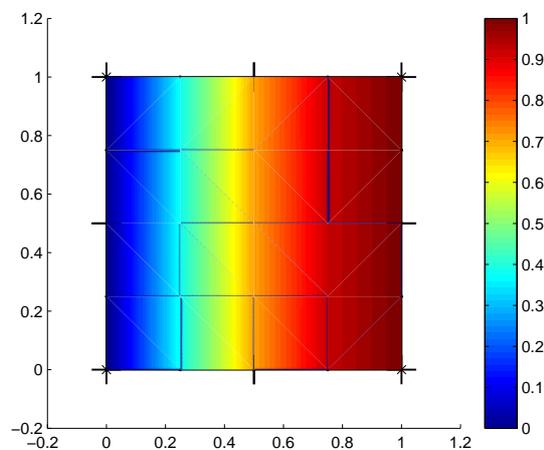
Figure 4: Influência do número de pontos de integração no erro percentual.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um estudo do método da integração radial aplicados a problemas potenciais com forças de corpo dependentes da solução do problema. A solução fundamental utilizada foi a da equação de Laplace e as integrais de domínio provenientes das forças de corpo foram transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial. Os resultados mostraram que o método apresenta bom desempenho com uma boa concordância com resultados analíticos. A concordância melhora com o aumento do número de elementos de contorno e do número de pontos internos. O número de pontos de integração tem um valor ótimo no qual o erro percentual em relação a solução analítica é mínimo. A partir deste valor ótimo, o erro percentual tende a aumentar ligeiramente com o aumento do número de pontos de integração e, logo em seguida, se estabilizar.

Table 1: Valores do erro para diferentes números de elementos e pontos internos

NPG	NPI	NE	Erro (%)
4	1	4	1,0902
4	1	8	0,7951
4	1	12	0,7334
4	4	4	0,4750
4	4	8	0,3277
4	4	12	0,2824
4	9	4	0,2892
4	9	8	0,1546
4	9	12	0,1291
4	16	4	0,2732
4	16	8	0,0638
4	16	12	0,0503

Figure 5: Distribuição da variável u ao longo da placa quadrada.

REFERENCES

- Banerjee P. *Boundary element method*. New York: McGraw-Hill Book Co, 1992.
- Brebbia C.A. and Dominguez J. *Boundary element - an introduction course*. Computational Mechanics Publication, 1992.
- Gao X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26:905–916, 2002.
- Partridge P., Brebbia C., and Wrobel L. *The dual reciprocity boundary element method*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1992.
- Zienkiewicz O. and Taylor R. *The finite element method*, volume II. McGraw Hill, 1991.