

FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA TEMPERATURA EM REGIME TRANSIENTE

Leandro P. Junior^a, Leandro P. Millan^b

Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, Departamento de Estruturas, ^aleandro@fec.unicamp.br, ^bmillan@fec.unicamp.br

Palavras Chave: MEC, formulação analítica, temperatura e regime transiente.

Resumo. A distribuição transiente de temperatura foi computada em elementos estruturais bi-dimensionais, de material homogêneo e isotrópico, com o tratamento direto das equações integrais de contorno (EICD) a partir da equação de difusão. O modelo utiliza o método de passos múltiplos (ou método da convolução) considerando discretização constante no tempo e elementos isoparamétricos lineares. As integrais de contorno singulares são calculadas analiticamente no sentido do valor principal de Cauchy. O núcleo das integrais singulares utiliza apenas uma função especial, a função integral exponencial, o que simplifica a implementação computacional do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para elementos contínuos e descontínuos. Os resultados obtidos do modelo são comparados em problemas com solução analítica, encontrados na literatura, mostrando a precisão da formulação.

1 INTRODUÇÃO

Várias técnicas numéricas tem sido propostas para gerar a representação integral de contorno da equação de difusão. A formulação direta do Método dos Elementos de Contorno para problemas transientes de temperatura vem do desenvolvimento da solução fundamental dependente do tempo proposta por Morse e Feshbach (1953), Carslaw e Jaeger (1959), entre outros. A aplicação dessa técnica foi empregada por Chang *et al.* (1973) e Shaw (1974) e estendida por Wrobel e Brebbia (1979) para funções interpoladoras do espaço e tempo de ordem maior.

As equações integrais de contorno obtidas pela formulação direta são discretizadas para os elementos de contorno, possibilitando a implementação computacional do modelo. As integrais discretizadas no espaço e tempo para cada elemento são avaliadas analiticamente ou numericamente conforme a posição do ponto fonte ou a abordagem do método. O foco desse trabalho é o desenvolvimento da formulação analítica das integrais quando o ponto fonte pertence ao elemento em estudo, tanto para elementos contínuos como para elementos descontínuos.

A abordagem analítica das equações integrais vem sendo alvo de estudos devido ao desenvolvimento dos softwares de análise simbólica de equações matemáticas complexas como Mathematica® ou MatLAB®, esses softwares possibilitam o desenvolvimento do método para equações interpoladoras de espaço e tempo de ordens mais altas. Nesse trabalho são utilizadas funções interpoladoras de ordem linear para o espaço e constante para o tempo.

Adotar funções de ordem mais altas aumenta a precisão quanto da descrição computacional do problema, porem deve-se tomar cuidado quanto a erros numéricos na avaliação das funções complexas como integral exponencial ou gamma, tal erro inevitável origina-se da avaliação numérica dessas funções, o que também deve ser levado em conta em uma análise custo benefício entre a precisão e o desempenho do método. O autor observa que a avaliação dessas funções constitui grande parte do tempo de montagem das matrizes e em um modelo de convolução de matrizes, grande parte do tempo total de avaliação do problema.

O método de convolução de matrizes ou método de passos múltiplos foi adotado nesse artigo por ser mais adequado a formulação direta do MEC, além de ser mais preciso do que o método de passos simples. Nesse método cada passo de tempo é avaliado utilizando os resultados de todos os passos de tempo anteriores de forma que, a não ser em casos especiais, todas as matrizes têm que ser reavaliadas para cada passo de tempo anterior utilizado. A maior precisão desse método se da ao fato que passos de tempo mais próximos ao início acumulam um erro menor, de forma diminuir o erro em comparação a um método que somente avalia o passo de tempo anterior. A desvantagem desse método é a maior utilização de processamento e memória.

2 FORMULAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

A solução fundamental da equação de difusão $\nabla^2 T = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$ que descreve a resposta térmica em um ponto qualquer do domínio, ou ponto campo \mathbf{x} , no instante de tempo t gerada pela aplicação de uma fonte pontual de calor com intensidade tendendo ao infinito,

também conhecida como função delta de Dirac, aplicada em um ponto fonte X' do domínio no tempo inicial t_0 é mostrada a seguir:

$$T^*(X', x, t_F, t) = \frac{1}{(4\pi k\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) H(\tau) \quad (1)$$

onde $\tau = t_F - t$, r a distância entre o ponto fonte X' e o ponto campo x , d é a dimensão do problema, k é a difusividade térmica $k = K/\rho c$, K é a condutividade termal considerada isotrópica nesse artigo, ρ a densidade, c o calor específico e $H(\tau)$ é a função de Heaviside. A equação de difusão pode ser reescrita como uma equação integral sobre o espaço e tempo utilizando a solução fundamental e substituindo a segunda identidade de Green gerando a equação a seguir válida para qualquer ponto campo x e ponto fonte x' no contorno.

$$\begin{aligned} c(x')T(x', t_F) + k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \frac{\partial T^*}{\partial n}(x', x, t_F, t_0)T(x, t)d\Gamma \\ = k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n}(x, t)T^*(x', x, t_F, t)d\Gamma dt + \int_{\Omega} T_0(x)T^*(x', x, t_F, t_0)d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

A integral de domínio presente nesta equação pode ser suprimida considerando o potencial inicial nulo. Existe também a possibilidade de transformar a integral de domínio em uma integral de contorno em alguns casos particulares descrito em Wrobel (2002). A função $c(x')$ depende da geometria do contorno no ponto fonte.

Quando o elemento onde se deseja efetuar a integração não contiver o ponto fonte x' a integração no espaço pode ser avaliada utilizando uma técnica numérica como a utilização de pontos de Gauss por exemplo. A integração no tempo pode ser feita analiticamente conforme mostrado a seguir:

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt = \frac{n \cdot r}{2\pi k r^2} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{r^2}{4k\tau^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) dt = \frac{n \cdot r}{2\pi k r^2} [\exp(-a_{f-1}) - \exp(-a_f)] \quad (3)$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt = \frac{1}{\pi r^2} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{r^2}{4k\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) dt = \frac{1}{4\pi k} \int_{a_{f-1}}^{a_f} \frac{\exp(-z)}{z} dz = \frac{1}{4\pi k} [E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f)] \quad (4)$$

onde $a_f = \frac{r^2}{4k(t_F - t_f)}$, $z = \frac{r^2}{4k\tau}$ e E_1 a função integral exponencial E_n com $n = 1$, Abramowitz (1972).

Deve se notar que no caso de tempo singular, $t \rightarrow t_F$, a_f tende ao infinito, e as equações anteriores podem ser simplificadas. Esse caso deve ser implementado de forma separada para evitar erros gerados por divisões com denominadores pequenos sendo que formulação analítica para esse caso será mostrada na seção seguinte.

Quando o elemento onde se deseja efetuar a integração contiver o ponto fonte X' a integração no espaço e no tempo será avaliada analiticamente no sentido do valor principal de Cauchy para elementos contínuos e descontínuos. Cabe notar também que nesse artigo foram utilizados elementos lineares, assim o produto interno $n \cdot r$ da equação (3) é igual a zero por definição para esse caso.

3 FORMULAÇÃO ANALÍTICA DA INTEGRAL DE CONTORNO

A formulação analítica da Equação (2) foi planejada de forma a facilitar a implementação

computacional do MEC resolvendo as Equações (3) e (4) de forma única tanto para elementos contínuos como para elementos descontínuos assim como para qualquer passo de tempo, singular ou não singular, utilizando para isso parâmetros que dependem do tipo de elemento e do passo de tempo.

3.1 Funções interpoladoras para elementos contínuos e descontínuos

A necessidade em se trabalhar com elementos contínuos e descontínuos se da ao fato que o fluxo de temperatura, ou calor, depende do vetor normal a superfície em consideração, assim a discretização do contorno em elementos lineares gera descontinuidade do valor da normal entre dois elementos não colineares. A forma de tratamento utilizada nesse artigo é a duplicação do nó comum a esses elementos não colineares e o deslocamento do nó para o interior do elemento, como mostrado na Figura 1.

As funções interpoladoras lineares são validas tanto para elementos contínuos como para elementos descontínuos, sendo o parâmetro a igual a zero para elementos contínuos e igual ao deslocamento para elementos descontínuos. O autor sugere utilizar o parâmetro a igual a $\frac{1}{4}$ do comprimento do elemento descontínuo.

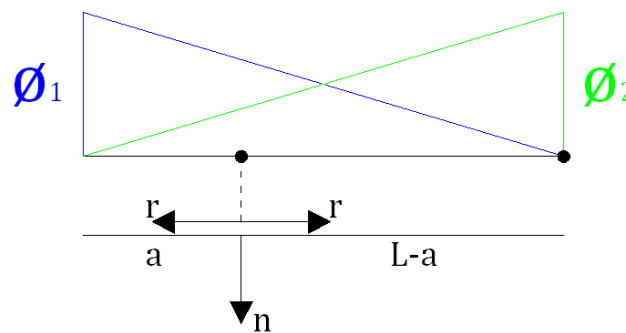


Figura 1 – Funções interpoladoras

onde

$$\phi_1(r) = \begin{cases} 1 + \frac{r-a}{l} & 0 \leq r \leq a \quad (-dr) \\ 1 - \frac{r+a}{l} & 0 \leq r \leq l-a \quad (dr) \end{cases} \quad (5)$$

$$\phi_2(r) = \begin{cases} \frac{a-r}{l} & 0 \leq r \leq a \quad (-dr) \\ \frac{a+r}{l} & 0 \leq r \leq l-a \quad (dr) \end{cases} \quad (6)$$

3.2 Parâmetros e equações analíticas

Os parâmetros utilizados são mostrados a seguir:

$$Y_f = \frac{a^2}{4k(t_F - t_f)} \quad Y_{f-1} = \frac{a^2}{4k(t_F - t_f + \Delta t)} \quad (6)$$

$$\delta_f = \frac{(L-a)^2}{4k(t_F - t_f)} \quad \delta_{f-1} = \frac{(L-a)^2}{4k(t_F - t_f + \Delta t)} \quad (7)$$

$$\alpha_\delta = \frac{\delta_{f-1} - \delta_f}{\delta_{f-1}\delta_f} \quad \alpha_Y = \frac{Y_{f-1} - Y_f}{Y_{f-1}Y_f} \quad (8)$$

$$\beta_\delta = \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{\delta_{f-1}} - \sqrt{\delta_f}}{\sqrt{\delta_{f-1}\delta_f}} \quad \beta_Y = \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{Y_{f-1}} - \sqrt{Y_f}}{\sqrt{Y_{f-1}Y_f}} \quad (9)$$

onde Δt é o intervalo de tempo entre os passos, Δt não deve ser tomado muito pequeno para evitar instabilidade numérica.

O índice dos parâmetros Y e δ são referentes ao passo de tempo avaliado sendo f referente ao tempo atual e $f-1$ referente ao passo de tempo anterior sendo F o passo de tempo final. O índice dos parâmetros α e β são referentes aos parâmetros Y e δ para o tempo atual e o tempo anterior sendo avaliados.

$$\Delta E_{N,Y} = E_N(n, Y_{f-1}) - E_N(n, Y_f) \quad (10)$$

$$\Delta E_{N,\delta} = E_N(n, \delta_{f-1}) - E_N(n, \delta_f) \quad (11)$$

ΔE é a variação entre o valor da função integral exponencial E referente a Y e δ para o tempo anterior e o tempo atual, sendo n parâmetro da própria função integral exponencial.

$$A_0 = \Delta E_{0,\delta} + \alpha_\delta - (\Delta E_{0,Y} + \alpha_Y) \quad (12)$$

$$A_{1/2,\delta} = \Delta E_{1/2,\delta} + \beta_\delta \quad A_{1/2,Y} = \Delta E_{1/2,Y} + \beta_Y \quad (13)$$

A_0 , $A_{1/2,\delta}$ e $A_{1/2,Y}$ são parâmetros auxiliares.

A Equação (4) pode ser avaliada analiticamente para o ponto fonte coincidindo com o nó à esquerda do elemento e com o nó à direita do elemento pelas Equações (14) e (15) respectivamente, mostradas a seguir:

$$\int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} q_1 T^* dt d\Gamma_j = \frac{q_1}{8k\pi L} \{ (L-a)^2 (A_0 + \Delta E_{1,\delta} - 2A_{1/2,\delta}) + (L-a) (2aA_{1/2,Y} + a\Delta E_{1,\delta}) + L(a\Delta E_{1,Y}) \} \quad (14)$$

$$\int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} q_2 T^* dt d\Gamma_j = \frac{q_2}{8k\pi L} \{ (L-a)^2 (-A_0 + \Delta E_{1,\delta}) + (L-a) (-2aA_{1/2,\delta}) + a(-2aA_{1/2,Y} + a\Delta E_{1,Y}) \} \quad (15)$$

Quando o elemento for contínuo, $a = 0$, ou quando o tempo atual for o tempo final, $t_f \rightarrow t_F$, então os parâmetros devem ser simplificados como mostrado na Tabela 1. Essa simplificação se faz necessária para evitar avaliar parâmetros com denominadores pequenos ou funções em pontos não definidos.

$a = 0$ e $t_f \neq t_F$	$a \neq 0$ e $t_f \rightarrow t_F$	$a = 0$ e $t_f \rightarrow t_F$
$A_0 = \Delta E_{0,\delta} + \alpha_\delta$ $A_{1/2,Y} = 0$ $a\Delta E_{1,Y} = 0$	$A_0 = E_N(0, Y_{F-1}) - E_N(0, \delta_{F-1}) + \frac{1}{Y_{F-1}} - \frac{1}{\delta_{F-1}}$ $A_{1/2,\delta} = E_N(1/2, \delta_{f-1}) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\delta_{F-1}}}$ $A_{1/2,Y} = E_N(1/2, Y_{f-1}) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{Y_{F-1}}}$ $\Delta E_{1,Y} = E_N(1/2, Y_{f-1})$ $\Delta E_{1,\delta} = E_N(1/2, \delta_{f-1})$	$A_0 = E_N(0, \delta_{F-1}) - \frac{1}{\delta_{F-1}}$ $aA_{1/2,Y} = 0$ $A_{1/2,\delta} = E_N(1/2, \delta_{F-1}) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\delta_{F-1}}}$ $a\Delta E_{1,Y} = 0$ $\Delta E_{1,\delta} = E_N(1, \delta_{F-1})$

Tabela 1 – Valor dos Parâmetros em casos especiais

4 FORMULAÇÃO ANALÍTICA DA INTEGRAL DE CONTORNO

4.1 Exemplo 1

Uma chapa retangular com $a = 10$ m de comprimento e $b = 8$ m de largura submetida a temperatura inicial $T(x,y,0) = 0.0$ °C e temperatura constante bordas $T(0,y,t) = 1.0$ °C, $T(a,y,t) = 1.0$ °C, $T(x,0,t) = 1.0$ °C e $T(x,b,t) = 1.0$ °C assim como mostrado na Figura 2.

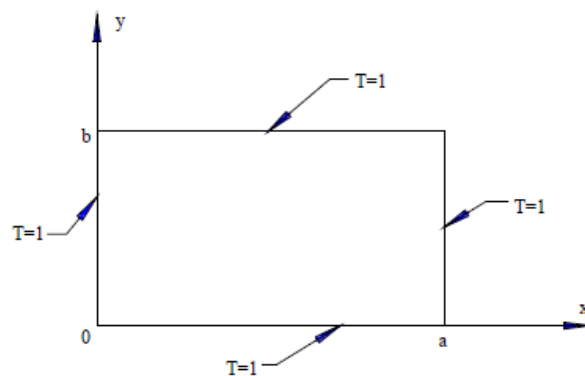


Figura 2 – Geometria e condições de contorno do Exemplo 1

Note que nesse exemplo a temperatura no interior do domínio varia em duas direções (2D), a solução analítica obtida em Carslaw and Jaeger (1959) é:

$$T(x, y, t) = T_1 - \frac{16T_1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi y}{2b}\right) \exp\left[\frac{-k\pi^2 t}{4} \left(\frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2}{b^2}\right)\right] \quad (16)$$

Nesse exemplo serão feitas duas simulações, uma utilizando o programa desenvolvido com $\Delta t = 1$ s e 20 elementos/linha e outra utilizando o pacote computacional ANSYS® com

malha de 12 x 12 elementos retangulares e $\Delta t = 1s$, para os dois casos é considerado o ponto central da chapa. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 3.

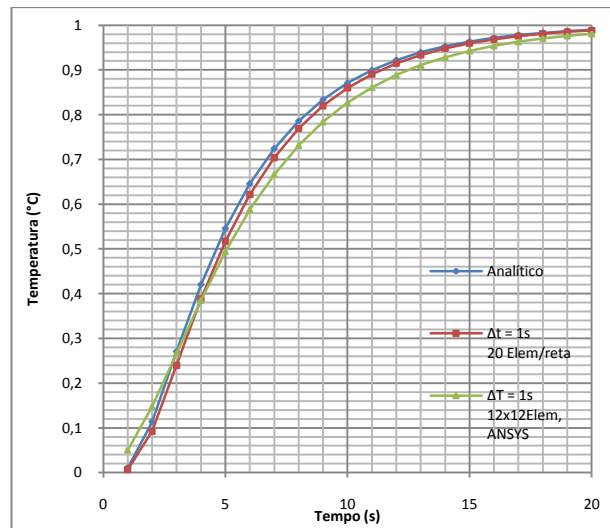


Figura 3 – Temperatura no ponto central da chapa para o Exemplo 1

4.1 Exemplo 2

Nesse exemplo será simulado uma chapa circular de raio $a = 1m$ com condição inicial $T_0 = 0.0^{\circ}C$ e temperatura constante $T(a) = 1.0^{\circ}C$ no contorno onde serão medidas as temperaturas no centro da chapa $r = 0m$.

Na Figura 4 é mostrada a geometria da chapa, suas condições de contorno e a divisão do contorno em retas, serão utilizadas 20 retas subdivididas em 4 elementos lineares por reta.

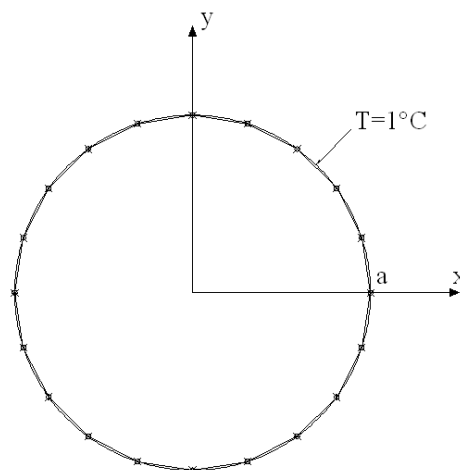


Figura 4 – Geometria e condições de contorno do Exemplo 2

A solução analítica obtida em Carslaw and Jaeger (1959) é:

$$T(r, t) = T_1 - \frac{2T_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-k\alpha_n t) \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_1(a\alpha_n)} \quad (17)$$

Onde J_n é a função de Bessel de ordem n e α_n é a n -ésima raiz positiva de $J_0(\alpha\alpha) = 0$, os resultados obtidos são mostrados na Figura 4.

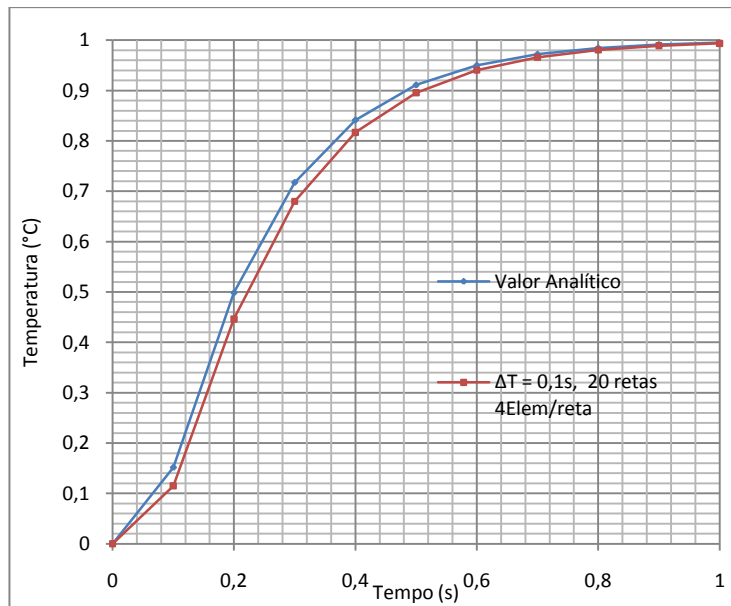


Figura 4 – Temperatura no centro da chapa para o Exemplo 2

5 CONCLUSÃO

Esse trabalho visa simplificar a implementação computacional do Método dos Elementos de Contorno já que o tratamento dos casos especiais onde há singularidade em elementos contínuos ou descontínuos demonstra-se um desafio, o que em alguns casos procura-se evitar utilizando técnicas de regularização ou métodos indiretos. O tratamento direto das equações integrais de contorno com formulação analítica gerou bons resultados, sem a necessidade de utilizar-se muitos elementos, o que também valida o argumento do autor quanto à utilização de elementos lineares com funções interpoladoras lineares para o espaço e constantes para o tempo.

O autor também testou uma abordagem onde é gerada um vetor com o histórico dos resultados das chamadas a função integral exponencial. Esse vetor foi implementado de forma que cada chamada da função integral exponencial primeiro procura se o valor já foi avaliado em uma chamada anterior fazendo busca binária, se sim, então retorna o valor, se não, grava de forma ordenada esse valor no vetor. Isso aumenta o desempenho das chamadas de forma bastante significativa caso a geometria do problema seja regular, ou seja, as distâncias entre os nós dos elementos se repitam com frequência.

Reconhecimento

O autor agradece o suporte da agencia Brasileira CAPES por financiar seu trabalho.

REFERÊNCIAS

- Abramowitz, M., and Stegun, I.A. (Eds), "Legendre Functions" and "Orthogonal Polynomials." Chs. 8 and 22 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. 9th printing, New York, 1972.
- Carslaw, H.S., and Jaeger, J.C., Conduction of Heat in Solids, 2nd edn. Clarendon Press, Oxford, 1959.
- Chang, Y.P., Kang, C.S. and Chen, D.J., The use of fundamental Green's functions for the solution of problems of heat conduction in anisotropic media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16:1905-1918, 1973.
- Morse, P.M., and Feshbach, H., Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953.
- Shaw, R.P., An integral equation approach to diffusion. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 17:693-699, 1974.
- Wrobel, L.C., and Brebbia, C.A., The boundary element method for steady-state and transient heat conduction. *Numerical Methods in Thermal Problems, 1*, Pineridge Press, Swansea, 1979.
- Wrobel, L.C., The Boundary Element Method, Volume 1: Applications in Thermo-Fluids and Acoustics. John Wiley & Sons, 2002.