

CONVECCIÓN NATURAL DE FLUIDO DE LEY DE POTENCIA EN SOLIDIFICACIÓN ENTRE CILINDROS HORIZONTALES CONCÉNTRICOS CON EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

Nelson O. Moraga ^a, Ernesto F. Castillo ^a, Carlos P. Garrido ^b

^a *Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Santiago de Chile, Av. Bernardo O'Higgins, 3363, Casilla 10233, Santiago, Chile, nelson.moraga@usach.cl, <http://Dimec.usach.cl/>*

^b *Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de La Serena Chile, Benavente 980, Casilla 555, La Serena, Chile, cgarrido@userena.cl, <http://www.mecanicauls.cl/>*

Keywords: Anulo Horizontal, Convección Natural, Solidificación de Aleación, Fluido de Otswald de Waele, Método de Volúmenes Finitos.

Abstract. El trabajo caracteriza la convección natural durante la solidificación de una aleación binaria, Al-1.7wt% Si, en el espacio entre dos cilindros horizontales concéntricos a distintas temperaturas. El modelo matemático se construye en base a las ecuaciones de continuidad, momento lineal y energía, considerando la ley de potencia para describir el comportamiento no Newtoniano de la aleación en la fase fundida. La predicción numérica implícita se realiza empleando el método de volúmenes finitos, con el algoritmo SIMPLE, utilizando interpolación lineal para los términos difusivos e interpolación del tipo quinta potencia para los convectivos. Las propiedades físicas se consideran variables con la temperatura, utilizándose un modelo de fracción de cambio de fase lineal con la temperatura. La malla utilizada de 100x60, posee una concentración de nodos en la interfase molde-aleación y en las fronteras donde se aplica la condición de borde, a fin de captar los gradientes y mantenerlos constantes, minimizando el tiempo de cálculo. Se utiliza un paso de tiempo dinámico y factores de sub-relajación de valor $\alpha=0.1$ para las velocidades, $\alpha=0.3$ para la presión y $\alpha=0.5$ para la temperatura. Los tiempos de cálculo varían desde 12000 segundos ($n=1.5$) hasta 1220000 segundos ($n=0.2$). Los resultados de líneas de corrientes e isothermas se validan, para el caso límite de fluido Newtoniano, con datos experimentales y numéricos disponibles en la literatura. En el caso de índice de potencia $n=0.2$, se alcanza la velocidad máxima antes que para los otros casos. El máximo valor de las velocidades, lo presenta el fluido pseudoplástico ($n=0.2$) y ocurre en los primeros instantes, luego el comportamiento se invierte siendo el índice de potencia $n=1.5$ el que genera velocidades levemente más altas durante la mayor parte del análisis. La temperatura para el instante final ($t=450$ segundos), respecto del índice de potencia $n=1$, es mayor para el caso $n=1.5$ (cercano al 1%) y menor para el caso $n=0.2$ (cercano al 2%). En los instantes iniciales se generan dos vórtices que giran en sentido contrario, produciéndose a medida que transcurre el tiempo una reubicación de los mismos y la generación de un tercer vórtice en la zona media.

INTRODUCCIÓN.

Una gran variedad de aplicaciones emplean geometrías cilíndricas coaxiales, con flujos de fluidos No-Newtonianos. Aplicaciones específicas abundan en la industria química, farmacéutica y de alimentos. Por estas razones es atractivo disponer de conocimiento para lograr la predicción de la dinámica de fluidos y la transferencia de calor propias de los diferentes procesos involucrados. En particular, en algunas industrias las aplicaciones requieren que exista cambio de fase líquido-sólido, como por ejemplo: inyección y moldeo de polímeros (Mavridis et al. (1997)), almacenamiento de energía (Wang et al. (2002)), solidificación de metales y aleaciones (Denier et al. (2004), Aiyang et al. (2007)), entre otros.

La convección natural se ha investigado ampliamente tanto para geometrías rectangulares, como cilíndricas (anulares). Adachi et al. (2007), analizan la estabilidad en tres dimensiones, de la convección natural del aire ($Pr = 0.71$), en un ánulo horizontales entre cilindros concéntricos, mediante el uso del método de elementos espectrales. Aquí se evalúa el número de Rayleigh crítico, donde el flujo de base pierde su estabilidad frente a algún tipo de perturbación, en una amplia gama de relaciones de aspecto (1 a 20). Se encuentra que la inestabilidad se produce entre tres modos diferentes. Petrone et al. (2004 y 2006), investigan numéricamente, la estabilidad lineal de la convección natural bi-dimensional para diferentes razones de radio y para números de Rayleigh inferiores a 10^4 . Los autores dan cuenta del primer número crítico de Rayleigh, a partir del cual se rompe la estabilidad. Kassem (2007), predice numéricamente la transferencia de calor por convección natural, en el espacio anular entre el tubo receptor circular y la envolvente de vidrio en un colector solar parabólico-cilíndrico, para el caso de un cilindro exterior isotérmico con una distribución local sinusoidal del flujo de calor sobre el cilindro interior. La formulación bidimensional se resuelve con el método de diferencias finitas. Los principales resultados están orientados a revisar la influencia de la excentricidad de los cilindros, sobre el flujo, la temperatura, y la consiguiente ubicación y formación de los vórtices. El autor además revisa el efecto de la inclinación del colector, para ver las consecuencias de la gravedad en la dinámica de fluidos y la transferencia de calor.

Abu-Nada et al. (2008), investigan mejoras en la transferencia de calor en un ánulo horizontal usando nanofluidos, en base a agua que contienen fracciones de volumen de nanopartículas de Cu, Ag, Al_2O_3 y TiO_2 . Para elevados valores del número de Rayleigh, las nanopartículas con alta conductividad térmica, causan significativos cambios en la transferencia de calor. Dyko et al. (1999-2007), presentan resultados en dos y tres dimensiones, que describen la influencia de la gravedad, la viscosidad y la relación de radios entre los cilindros y sus efectos sobre las líneas de corriente y las isoterms. La generación de vórtices, su ubicación y los efectos sobre las isoterms, son descritos por Dyko et al. (1999). Los autores analizan dos fluidos, aire y silicona y por medio de un experimento, donde se agregan al fluido partículas de humo, logrando gracias a una delgada lámina de luz de neón, identificar las líneas de corriente e isoterms y generar de este modo, resultados experimentales que son los que se usan en el presente trabajo para validar parcialmente el modelo matemático.

Wang et al. (2002), mediante un modelo de Bingham generalizado estudiaron numéricamente la convección natural de los fluidos de ley de potencia en un dominio axial simétrico contenido en un medio poroso saturado, constatando que el inicio de la convección natural se lleva a cabo para un valor mínimo de fluencia. Adicionalmente muestran que la transferencia de calor se incrementa aumentando el índice de potencia y la constante de permeabilidad del medio poroso. Amoura et al. (2006), estudian el flujo y mecanismos de

transferencia de calor en un espacio anular entre dos cilindros coaxiales en rotación, adoptando la relación esfuerzo-deformación de Carreau, para modelar el comportamiento reológico del fluido. Los autores emplean el método de elementos finitos mixtos para resolver las ecuaciones gobernantes. Todos los resultados muestran que los efectos no newtonianos son importantes en la estructura del flujo y en la transferencia de calor y que las diferencias pueden ser considerables al suponer un fluido dilatante o pseudoplástico como newtoniano.

Kim et al. (2003), analizan la convección impulsada en una capa porosa saturada con un fluido visco elástico, usando analíticamente, una teoría de estabilidad lineal y no lineal. Describen el efecto del número de Darcy-Rayleigh y la porosidad en el número de Nusselt.

Luna et al. (2002), resuelven analítica y numéricamente la transferencia de calor conjugada de un fluido de ley de potencia en un tubo circular, concluyendo que la transferencia de calor por conducción a lo largo de la pared es importante para la estimación del número de Nusselt local y global, basado en las condiciones de contorno.

Kim et al. (2003), caracterizan el proceso de convección natural en un fluido no-Newtoniano del tipo ley de potencia en una cavidad cuadrada. Los perfiles de velocidad obtenidos muestran que la capa límite es más delgada para el fluido con menor índice de potencia ($n=0.6$), produciéndose la mayor velocidad para este tipo de fluido. La transición mínimo-máximo ocurre de manera más rápida en el fluido con el menor índice de potencia.

Yao et al. (2008), describen el efecto del índice de potencia, en una convección forzada, utilizando el modelo de la ley de potencia. Sus resultados muestran que para menores índices de potencia, el fluido se acelera más rápido, debido a la reducción de la viscosidad. Por el contrario para fluidos con índice de potencia mayor que uno, el fluido alcanza la velocidad final de modo más lento, debido a la mayor viscosidad, generando una capa límite más gruesa. Aguas abajo, ambos fluidos se comportan de modo similar al caso Newtoniano.

Los resultados numéricos y experimentales analizados en la literatura, muestran que los efectos no newtonianos son importantes, tanto en la estructura del flujo, como en la transferencia de calor. Las diferencias pueden ser considerables al suponer un fluido dilatante o pseudoplástico como newtoniano, por lo que realizar estudios en distintas geometrías, es necesario y permite ganar precisión y eficiencia en múltiples procesos.

Diversos e importantes aportes, mediante simulación numérica, se han realizado en problemas de cambio de fase (Pardeshi et al. (2008) e Incropera (1995)). Samarskii et al. (1993), realizan una revisión de las técnicas numéricas para resolver problemas de transferencia de calor y masa con cambio de fase sólido/líquido para problemas de contorno móviles. Yap et al. (2005), emplean un procedimiento de corrección de masa basado en el caudal, para el flujo unidireccional estratificado, con cambio de fase, utilizando el método de ajuste de nivel. El término de corrección de masas localizadas, se introdujo para garantizar el cumplimiento de la ecuación de continuidad. Moraga et al. (2010), estudian el efecto del cambio de fase en un fluido no Newtoniano en coordenadas cartesianas, utilizando como modelos: el de fracción de cambio de fase lineal con la temperatura para el efecto de la solidificación y el de la ley de potencia para las características no Newtonianas del fluido. Los autores logran mostrar diferencias en el proceso de solidificación, concluyendo que para un índice de potencia $n=0.5$, respecto del índice de potencia $n=1$, el proceso de solidificación se produce de manera más rápida.

Jana et al. (2007) analizan la importancia de la malla necesaria en una solidificación, en la interfase sólido líquido. El tiempo de cálculo puede reducirse considerablemente con la elección de una buena malla, la cual debe adaptarse al contorno móvil del cambio de fase, de modo de satisfacer en todo momento la ecuación de continuidad.

Diversos programas comerciales se han empleado para obtener resultados numéricos los

que evidentemente requieren de resultados experimentales para su validación. Kowalczyk (2004) estudia el proceso de congelación y descongelación para explicar la alta presión inducida, empleando el método de volúmenes finitos, mediante el programa ANSYS CFX. Szimmat (2002), estudia la solidificación considerando la difusión y la convección mediante el método de elementos finitos y el programa comercial SMART.

Jones et al. (2006), proporcionan datos experimentales de referencia para la validación de códigos numéricos en términos de temperatura y del frente de fusión de un material de moderado número de Prandtl en una cavidad cilíndrica calentada por los lados y recomienda un número de Stefan específico para la comparación de resultados numéricos.

Lin et al. (2007) y Arampatzis et al. (1998), establecen que una de las principales dificultades en la simulación numérica, en proceso con cambio de fase líquida a sólida, es el modelamiento de la discontinuidad del gradiente de temperatura en la interfase sólido-líquido. No obstante como lo establecen Arampatzis et al. (1998), el uso de la formulación de entalpía puede permitir sortear esta dificultad.

Los procesos estudiados con cambio de fase relacionados con los fluidos no newtonianos, han considerado sobre todo metales, aleaciones y polímeros, en geometrías preferentemente rectangulares (Moraga et al. 2010).

En este trabajo se estudia la transferencia de calor y la mecánica de fluidos, para un fluido no newtoniano, de ley de potencia, con cambio de fase en el espacio anular entre dos cilindros concéntricos horizontales que tienen diferentes temperaturas. Específicamente se describe la solidificación de una aleación de Aluminio-Silicio (Al-1.7%Si), en un molde cilíndrico anular de grafito. La aleación al interior de ánulo está a mayor temperatura en el instante inicial y se enfría hasta su solidificación, mediante la convección exterior al molde. Las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento lineal y energía, para la convección natural mixta se resuelven mediante el método de volúmenes finitos. El comportamiento no Newtoniano se incorpora mediante la ley de potencia con índices de potencia $n=0.2$, 1.0 y 1.5 . La solución se realiza empleando el método de volúmenes finitos, con el algoritmo SIMPLE (Patankar (1980) y Versteeg y Malalasekera (1995)). Los resultados obtenidos permiten describir la evolución en el tiempo, de la distribución de líneas de corriente, velocidad y temperatura. La validación de los resultados se realiza parcialmente en base a la comparación con resultados numéricos y experimentales obtenidos en la literatura (Dyko et al. (1999)), para un caso asintótico de fluido Newtoniano, sin cambio de fase, en geometrías anulares cilíndricas.

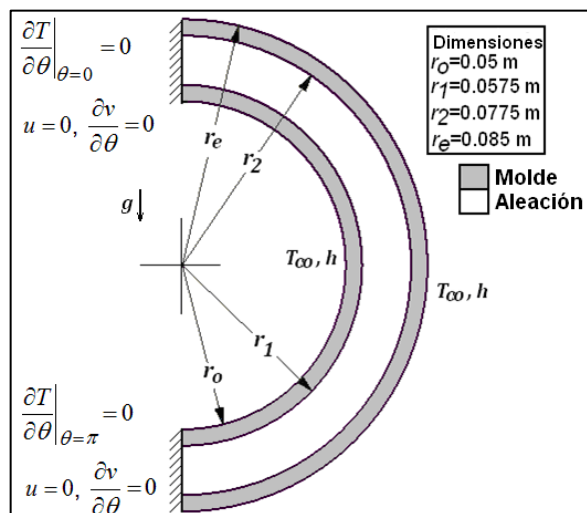
ESPECIFICACIONES GENERALES.

Situación Física.

La solidificación considerada en el análisis, consiste en una aleación binaria de Aluminio Silicio (Al-1.7% Si) al interior de un molde de grafito, con condiciones de borde de tercera clase (tabla 1). El dominio es analizado en coordenadas cilíndricas (r,θ) . Las dimensiones se muestran en la figura 1, donde se describe la situación estudiada.

El proceso comienza con ambos materiales a temperatura constante, la temperatura inicial de la aleación es $T_i=860$ °C y la del molde $T_i=200$ °C. Los fluidos en el instante inicial están en reposo. Las condiciones de borde utilizadas son de tercera especie y el dominio de cálculo se extiende en el rango $0^\circ<\theta<180^\circ$, aprovechando la simetría existente. La malla utilizada tiene 100x60 nodos, con concentración de nodos en la interfase aleación-molde y en las fronteras convectivas. La concentración de nodos sigue un arreglo exponencial a modo de suavizar los gradientes generados entre nodos vecinos.

Las propiedades se consideran variables con la temperatura (tabla 2 y 3), el molde no cambia de fase y se encuentra en estado sólido en la totalidad del proceso.



Lugar geométrico	Condición de Borde.
Radio exterior	$-k \frac{\partial T}{\partial r_{re}} = h(T_{re} - T_{\infty})$
Radio Interior	$-k \frac{\partial T}{\partial r_{ri}} = h(T_{ri} - T_{\infty})$
$\Theta=0^{\circ}$	$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, u = 0$
$\Theta=180^{\circ}$	$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, u = 0$

Tabla 1. Condiciones de borde.

Figura. 1. Situación Física, Solidificación

Densidad (ρ)	2650kgm^{-3}
Calor específico (C_p)	$1057.58 \text{Jkg}^{-1} \text{ } ^{\circ}\text{C}$
Conductividad Térmica (k)	$229.44 \text{Wm}^{-1} \text{ } ^{\circ}\text{C}$
Calor de Cambio de Fase (L)	397746Jkg^{-1}
Temperatura solidus (T_{sol})	550°C
Temperatura líquidus (T_{liq})	650°C
Viscosidad dinámica (μ)	$3.233 \times 10^{-3} \text{kgm}^{-1} \text{s}^{-1}$
Coefficiente de expansión volumétrica (B)	$13.84 \times 10^{-5} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$
Temperatura de Referencia (T_{ref})	200°C

Tabla 2. Propiedades de la aleación.

Densidad (ρ_m)	1922kgm^{-3}
Calor específico. (C_{pm})	$1217.52 \text{Jkg}^{-1} \text{ } ^{\circ}\text{C}$
Conductividad térmica (K_m)	$96.29 \text{Wm}^{-1} \text{ } ^{\circ}\text{C}$

Tabla 3. Propiedades del molde.

Modelo matemático

La simulación numérica realizada en el presente análisis, considera los siguientes supuestos:

- Fluido incompresible
- Flujo en régimen laminar.
- Generación interna de calor y términos de energía viscosa despreciables.
- Profundidad del molde lo suficientemente grande para no influir en el plano central.

- El proceso se inicia con la aleación en reposo y a temperatura constante.
- Al comienzo del proceso el molde se encuentra a temperatura constante.
- Se utiliza la aproximación de Boussineq.
- Se emplea el modelo de fracción de cambio de fase lineal con la temperatura.
- Fluido no Newtoniano, utilizando el modelo de la ley de Potencia.
- Propiedades variables con la temperatura.

La velocidad de deformación de modo general se define como:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}(\Delta : \Delta)} \quad (1)$$

En las coordenadas analizadas (r,θ), la velocidad de deformación en función de sus componentes, tiene la forma:

$$\dot{\gamma} = \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\nabla \cdot \vec{\nabla} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

La viscosidad aparente utilizando el modelo de la ley de Potencia, se expresa de la siguiente manera:

$$\eta = \mu \dot{\gamma}^{n-1} \quad (3)$$

En el presente estudio, se analizan los tres casos típicos del modelo de Ley de Potencia.

$$\text{Fluido Pseudoplástico, } n < 1 \quad (4)$$

$$\text{Fluido Newtoniano, } n = 1 \quad (5)$$

$$\text{Fluido Dilatante, } n > 1 \quad (6)$$

Reemplazando la viscosidad aparente y descomponiendo las fuerzas gravitacionales, las ecuaciones gobernantes en función de las velocidades son:

Continuidad.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u)}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$

Momentum Lineal en r:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u^2}{r} \right) = \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \rho g \beta \Delta T \cos(\theta) - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (8)$$

Momentum Lineal en θ:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} \right) = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \rho g \beta \Delta T \sin(\theta) - \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (9)$$

$$\text{Con : } \Delta T = (T - T_{ref}) \quad (10)$$

La temperatura usada como referencia (Tref) en la expresión 10, corresponde a la temperatura inicial del molde (Ti=200 °C).

Se emplean dos ecuaciones de energía, una para la aleación (11) y una para el molde (12). La primera contiene el factor de cambio de fase que multiplica los términos convectivos, mientras que la segunda mantiene la forma clásica pues el molde no cambia de fase.

Ecuación de Energía para la aleación:

$$\rho c_p \left(1 + \frac{H}{c_p} \frac{\partial f_{cf}}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (11)$$

Ecuación de Energía para el molde

$$\rho_m c_{pm} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (12)$$

El efecto del cambio de fase es captado por una modificación al calor específico, la cual considera la entalpía total necesaria para lograr la solidificación. La entalpía total está dada por la suma de la entalpía de cada fase (13).

$$H(T) = \sum f_{cf_i}(T) H_i(T) \quad (13)$$

donde:

$$\frac{dH}{dT} = c_p(T) = \sum f_{cf}(T) \frac{dH(T)}{dT} + H(T) \frac{df_{cf}(T)}{dT} \quad (14)$$

La fracción líquida de cambio de fase, se calcula de la siguiente forma:

$$f_{cf} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow T \leq T_s \\ \frac{T - T_s}{T_L - T_s} \rightarrow T_s \leq T \leq T_L \\ 1 \rightarrow T > T_L \end{array} \right\} \quad (15)$$

El calor específico en la zona pastosa, se determina de la siguiente manera:

$$c_p = \frac{dH}{dt} = c_p + \frac{L}{(T_{liq} - T_{sol})} \quad (16)$$

El efecto del cambio de fase sobre la viscosidad aparente de la aleación dentro de la zona pastosa, se define como sigue:

$$\eta = \frac{\eta_L}{f_{cf}} \quad (17)$$

En la definición anterior (17), se genera un cambio gradual de la viscosidad a medida que la aleación se acerca a la temperatura solidus, en donde se alcanza el valor infinito, lo cual transforma el fluido en sólido, detectando la finalización del proceso de cambio de fase.

El modelo utilizado para el efecto de la solidificación, considera que la fracción de cambio

de fase varía de manera lineal con la temperatura. La temperatura liquidus (T_L) corresponde a la temperatura donde comienzan a producirse los primeros cristales, mientras que la temperatura solidus (T_S) representa la temperatura donde el proceso de solidificación termina.

Solución Computacional.

La solución del sistema de ecuaciones discretizado se efectúa empleando el método de volúmenes finitos. Este método consiste en resolver las ecuaciones de continuidad, Navier-Stokes, la ecuación de energía y de transferencia de masa, mediante la utilización de la ecuación general de transporte. La forma general de expresar los términos de las ecuaciones de transporte es:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}\phi) = \text{div}(\Gamma\text{grad}(\phi)) + S_p\phi + S_c \quad (18)$$

En esta ecuación el término Φ , representa cualquiera de las variables relacionadas con el transporte, esto es, velocidad, temperatura y masa. El término ρ , representa la densidad del fluido y el término Γ el coeficiente de difusión. En el lado izquierdo se encuentran los términos transientes y los convectivos, mientras que en el lado derecho, los términos difusivos y los fuentes.

El dominio se divide en volúmenes que no se traslapan, y que poseen un nodo central. En los nodos se calculan las variables escalares (temperatura y presión), mientras que en las fronteras las vectoriales (velocidad y flujo de calor). Una característica de los nodos frontera, es que no poseen volumen.

La discretización se realiza con malla variable, para mantener en lo posible los gradientes tanto de temperatura como velocidad lo más constantes posibles y no influir en la convergencia de los resultados.

En cada uno de los volúmenes de control, se debe resolver la ecuación diferencial de transporte, integrándola tantas veces como número de variables independientes existan en el problema. Los términos difusivos se calculan mediante la utilización de interpolación lineal, y los términos convectivos se calculan empleando la ley de la quinta potencia.

Control de convergencia.

El proceso iterativo termina cuando el campo de soluciones para todas las variables, cumple un criterio impuesto, de modo de asegurar el cumplimiento de la conservación local de masa y entregar valores que converjan para cada una de las variables calculadas.

En el presente trabajo el control de convergencia, se realiza bajo dos criterios. El primero consiste en acotar la diferencia entre iteraciones para las variables calculadas y el segundo, consiste en limitar el gasto másico S_{MAX} , que corresponde al mayor valor de la generación de masa en cada volumen de control, por un determinado valor.

Valores utilizados:

$$S_{MAX} \leq 10^{-6} \quad (19)$$

$$|T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k-1}| \leq 10^{-2} \quad (20)$$

$$|V_{i,j}^k - V_{i,j}^{k-1}| \leq 10^{-6} \quad (21)$$

Debido a que el algoritmo SIMPLE trabaja con sub-relajaciones sucesivas, se deben definir valores que trabajen para cada una de las variables. En el presente trabajo los valores utilizados para cada variable son:

$$\alpha_u = 0.1; \quad \alpha_v = 0.1; \quad \alpha_p = 0.3; \quad \alpha_T = 0.5 \quad (22)$$

El paso de tiempo utilizado en la resolución de los cálculos, es un paso dinámico, que se modifica cuando el gradiente de temperatura alcanza un valor determinado.

$$0.001 \text{ s} \leq \Delta t \leq 0.005 \text{ s} \quad (23)$$

El tiempo final de cálculo 450 segundos, fue elegido de modo que la temperatura máxima dentro del cuerpo analizado, alcanzara un valor cercano a 100 grados Celsius bajo la temperatura de solidificación.

VALIDACIÓN DE RESULTADOS.

Puesto que en la literatura especializada no se reportan resultados de problemas de cambio de fase en la geometría anular estudiada, se realiza una validación parcial del modelo matemático para el caso límite de fluido Newtoniano sin cambio de fase.

Se valida la mecánica de fluidos y la transferencia de calor de un fluido en una cavidad anular de pared delgada, sometida a un diferencial de temperatura entre el cilindro interior y el exterior. La temperatura del cilindro interior es mayor al exterior. Dicho trabajo fue realizado por los autores Dyko et al. (1999) quienes presentan resultados tanto experimentales como numéricos. Se presentan cuatro casos adimensionales en régimen permanente, donde se analizan distintas condiciones de trabajo: números de Prandtl, relaciones de aspecto y números de Rayleigh. También se valida el modelo con un problema transiente mostrado por los mismos autores. En cada una de las figuras se entregan los valores utilizados para realizar las validaciones.

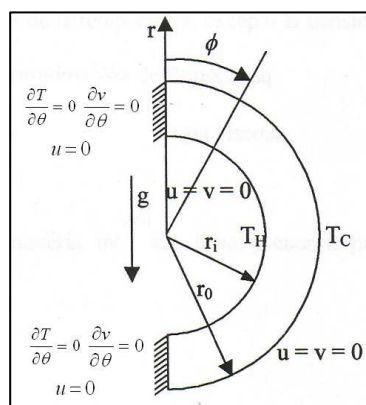


Figura 2. Situación Física utilizada para realizar la validación.

Lugar geométrico	Condición de Borde.
Radio exterior	$T(r = r_e) = T_C$
Radio Interior	$T(r = r_i) = T_H$
$\theta = 0^\circ$	$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, u = 0$
$\theta = 180^\circ$	$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, u = 0$

Tabla 4. Condiciones de borde utilizadas en la validación.

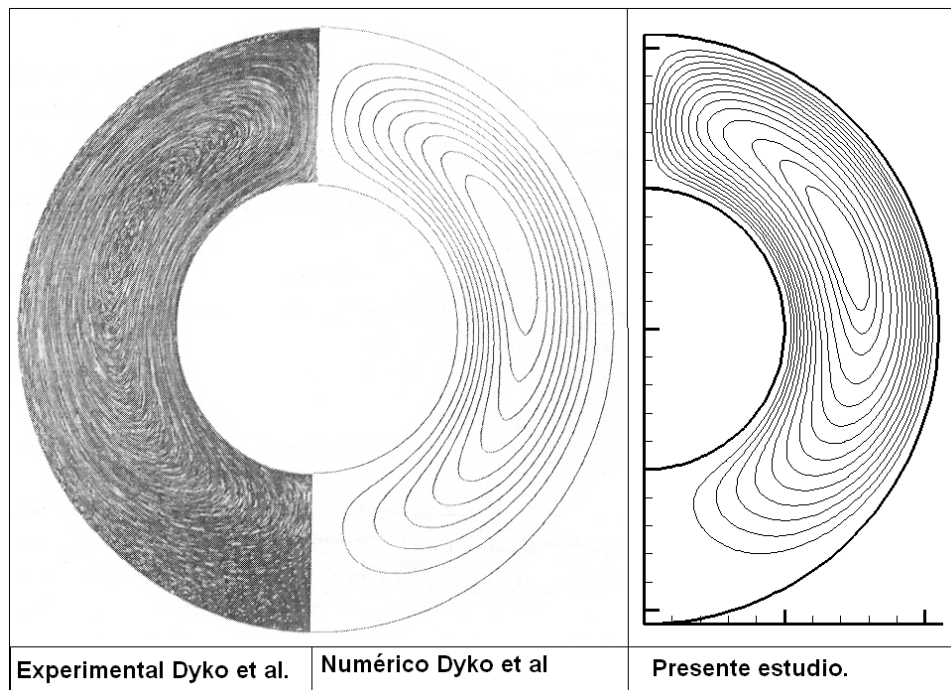


Figura 3. Validación de líneas de corriente en convección natural bajo los parámetros: $Ra=3.32e+3$, $R=2.5$, $Pr=0.7$.

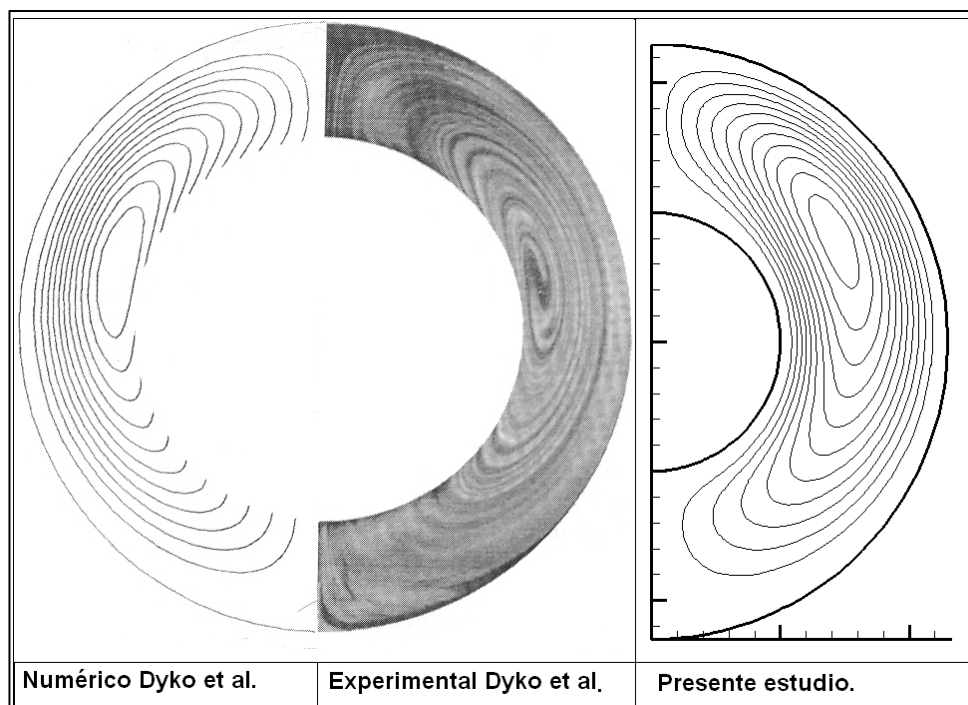


Figura 4. Validación de líneas de corriente en convección natural bajo los parámetros: $Ra=8.725e+3$, $R=2.1$, $Pr=100$.

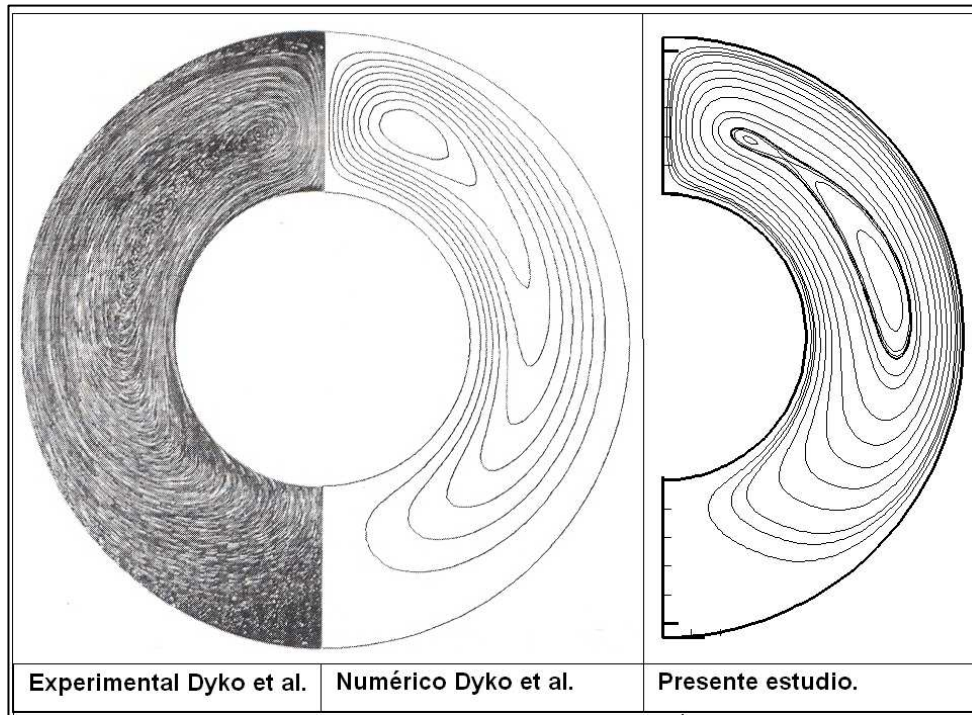


Figura 5. Validación de líneas de corriente en convección natural bajo los parámetros: $Ra=2.52e+4$, $R=2.1$, $Pr=100$

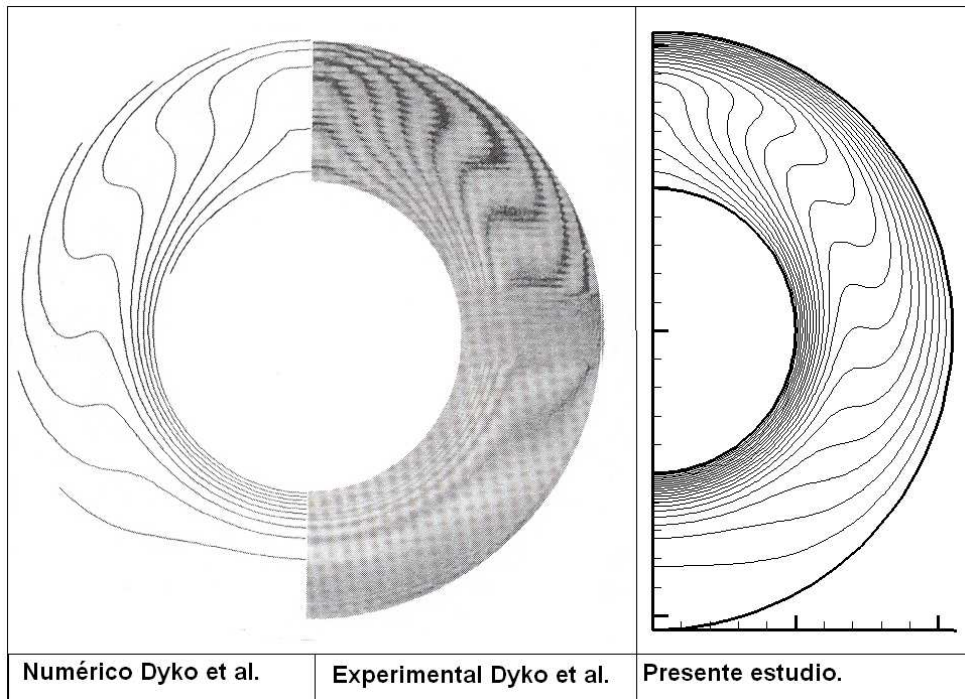


Figura 6. Validación de isotermas en convección natural bajo los parámetros: $Ra=1.1e+4$, $R=2.18$, $Pr=0.7$.

RESULTADOS DE LA SOLIDIFICACIÓN ANULAR.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en el estudio de la solidificación anular para la aleación Aluminio-Silicio (Al-1.7wt% Si). Dichos resultados consisten en gráficas (figuras 7 a 9) que muestran la evolución tanto de las velocidades como de la temperatura máximas presentes en el proceso. Además se presentan tablas (4 a 6) con valores numéricos a modo de realizar un análisis más detallado de las diferencias existentes entre los distintos índices de potencia caracterizados. Para complementar el análisis, se entregan figuras (11 a 13) de la evolución de las líneas de corriente descritas por el fluido en el proceso de cambio de fase, donde es posible apreciar los vórtices y la dinámica de fluidos descritas en el proceso de solidificación, además de las isothermas que caracterizan el frente de solidificación y el efecto de la convección natural sobre las mismas.

La figura 10, muestra uno de los parámetros de convergencia utilizados (S_{max} o generación de masa en cada volumen de control) para realizar la caracterización del proceso de solidificación anular descrito, el cual permite discutir los instantes más críticos en cuanto a la convergencia, para cada uno de los índices de potencia analizados.

Las tablas 8 y 9, muestran tiempos computacionales para distintas mallas y algunos parámetros de convergencia entre las mismas, respectivamente.

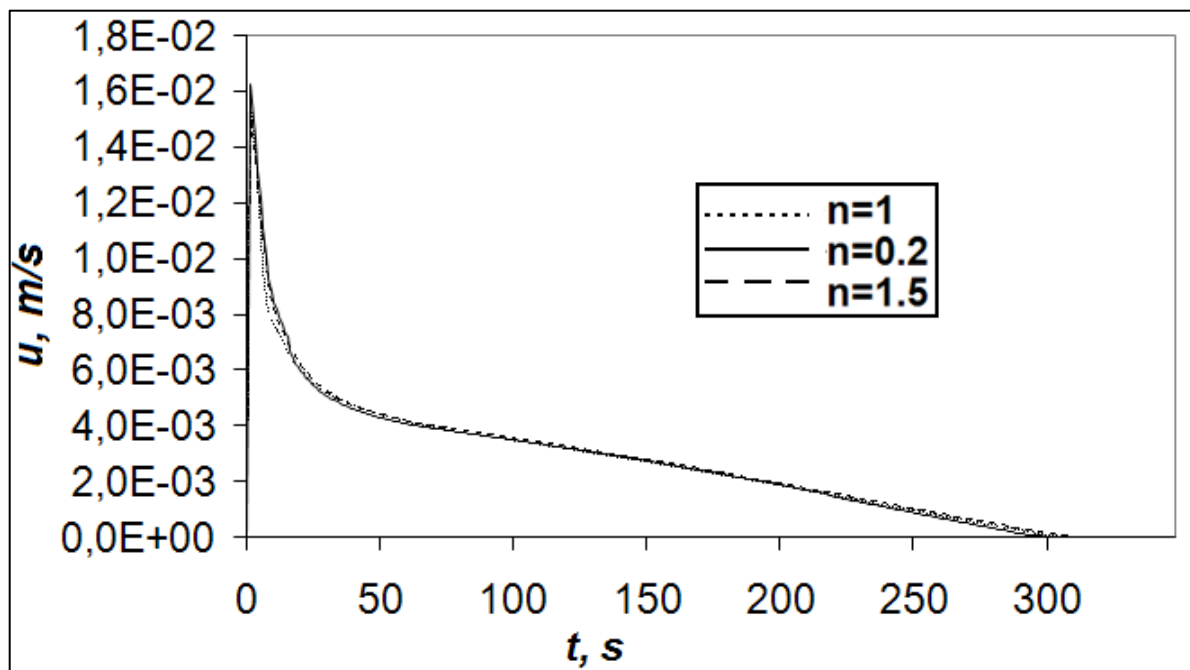


Figura 7. Evolución de la velocidad tangencial máxima, para el proceso de solidificación anular de una aleación Al-1.7wt% Si, para los índices de potencia $n=0.2$, $n=1$ y $n=1.5$.

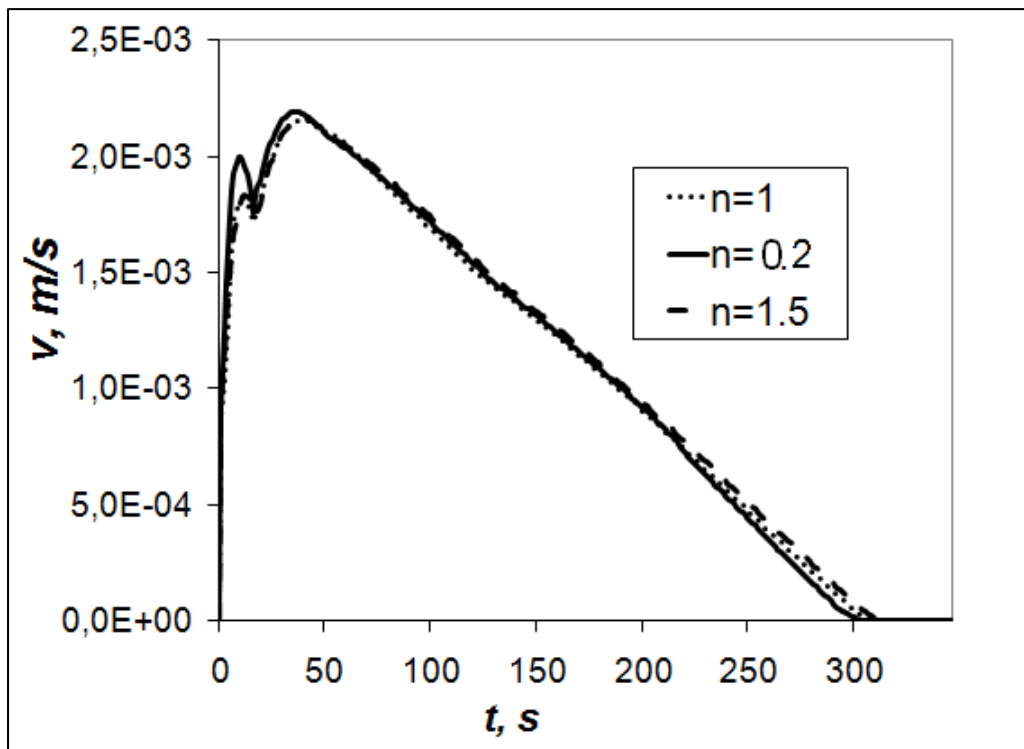


Figura 8. Evolución de la velocidad radial máxima, para el proceso de solidificación anular de una aleación Al-1.7wt% Si, para los índices de potencia $n=0.2$, $n=1$ y $n=1.5$.

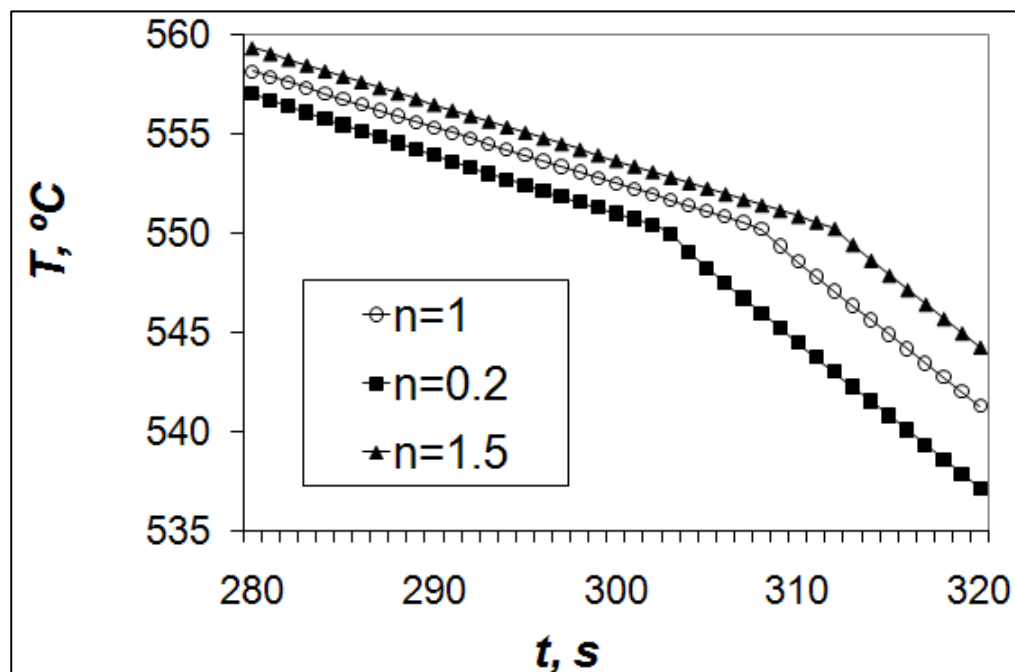


Figura 9. Zoom realizado a la evolución de la temperatura máxima en el instante que se alcanza la solidificación completa, para el proceso de solidificación anular de una aleación Al-1.7wt% Si, para los índices de potencia $n=0.2$, $n=1$ y $n=1.5$.

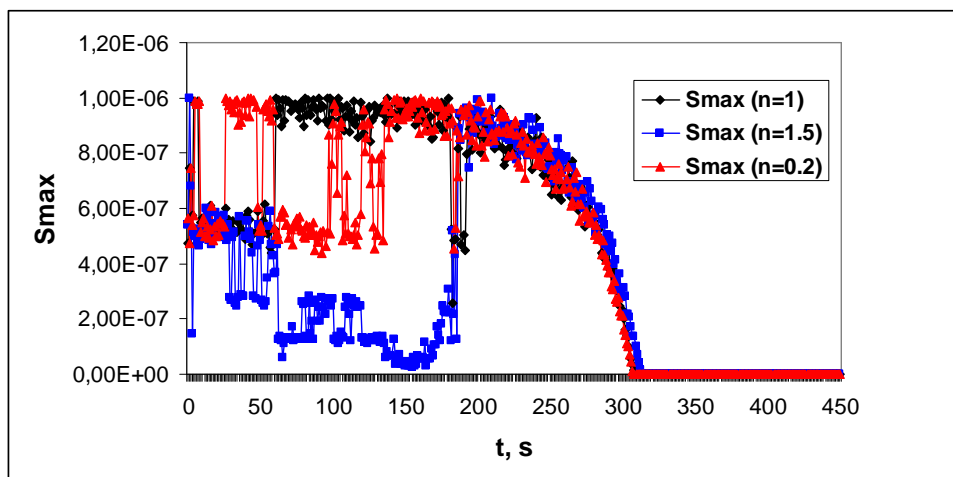


Figura 10. Generación de masa máxima en cada volumen de control, en la simulación realizada al proceso de solidificación anular de una aleación Al-1.7% Si, para los índices de potencia: n=0.2, n=1 y n=1.5.

Índice	n=1		n=0.2		n=1.5
t (s)	T (°C)	t (s)	T (°C)	T (s)	T (°C)
302	551,66	296	552,12	307	551,69
304	551,1	298	551,55	309	551,13
306	550,53	300	550,99	311	550,55
308	549,34	302	550,41	313	549,42
309	548,55	303	549,95	314	548,62

Tabla 5. Comparación tiempos en alcanzar la solidificación completa, para los índices de potencia analizados.

T (s)	T °C (n=1)	T °C (n=0.2)	T °C (n=1.5)
447	457,8	452,55	460,26
448	457,2	451,95	459,65
449	456,61	451,34	459,05
450	456,01	450,74	458,46

Tabla 6. Temperaturas máximas en el instante final del proceso de cálculo, para los índices de potencia analizados.

T (s)	N=0.2	n=1	n=1.5	
8	1,98E-03	1,77E-03	1,72E-03	Zona I
9	2,00E-03	1,80E-03	1,77E-03	
10	2,00E-03	1,81E-03	1,80E-03	
15	1,83E-03	1,75E-03	1,80E-03	Zona II
16	1,76E-03	1,72E-03	1,78E-03	
17	1,83E-03	1,74E-03	1,75E-03	
36	2,19E-03	2,15E-03	2,16E-03	Zona III
37	2,19E-03	2,15E-03	2,16E-03	
38	2,19E-03	2,16E-03	2,16E-03	
97	1,74E-03	1,71E-03	1,76E-03	Zona IV
98	1,73E-03	1,70E-03	1,75E-03	
99	1,72E-03	1,70E-03	1,75E-03	

Tabla 7. Zonas de control para la velocidad radial máxima, para los índices de potencia analizados.

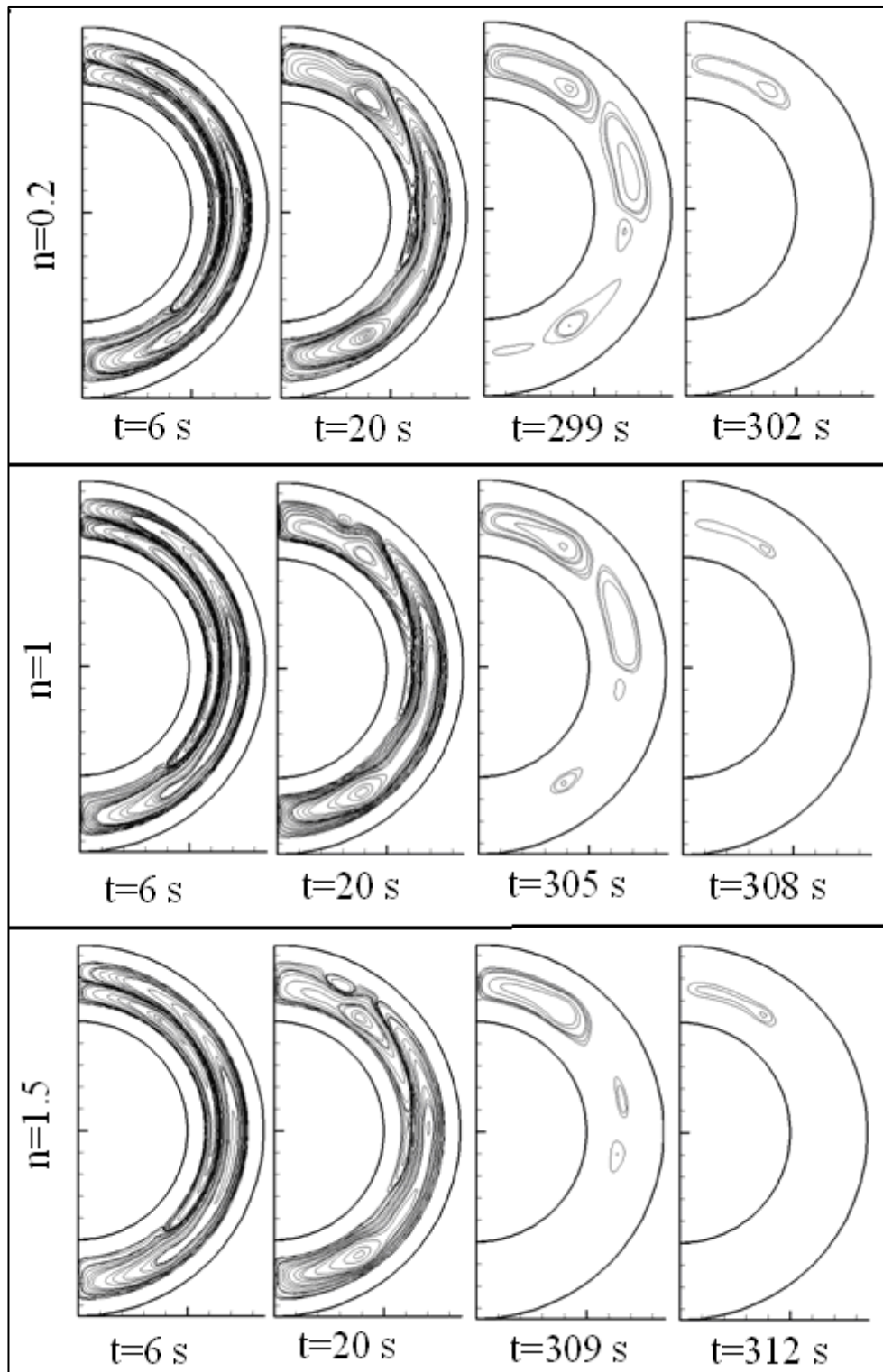


Figura 11. Evolución de las líneas de corriente en el proceso de solidificación anular de una aleación Al-1.7% Si para los índices de potencia: $n=0.2$, $n=1$ y $n=1.5$.

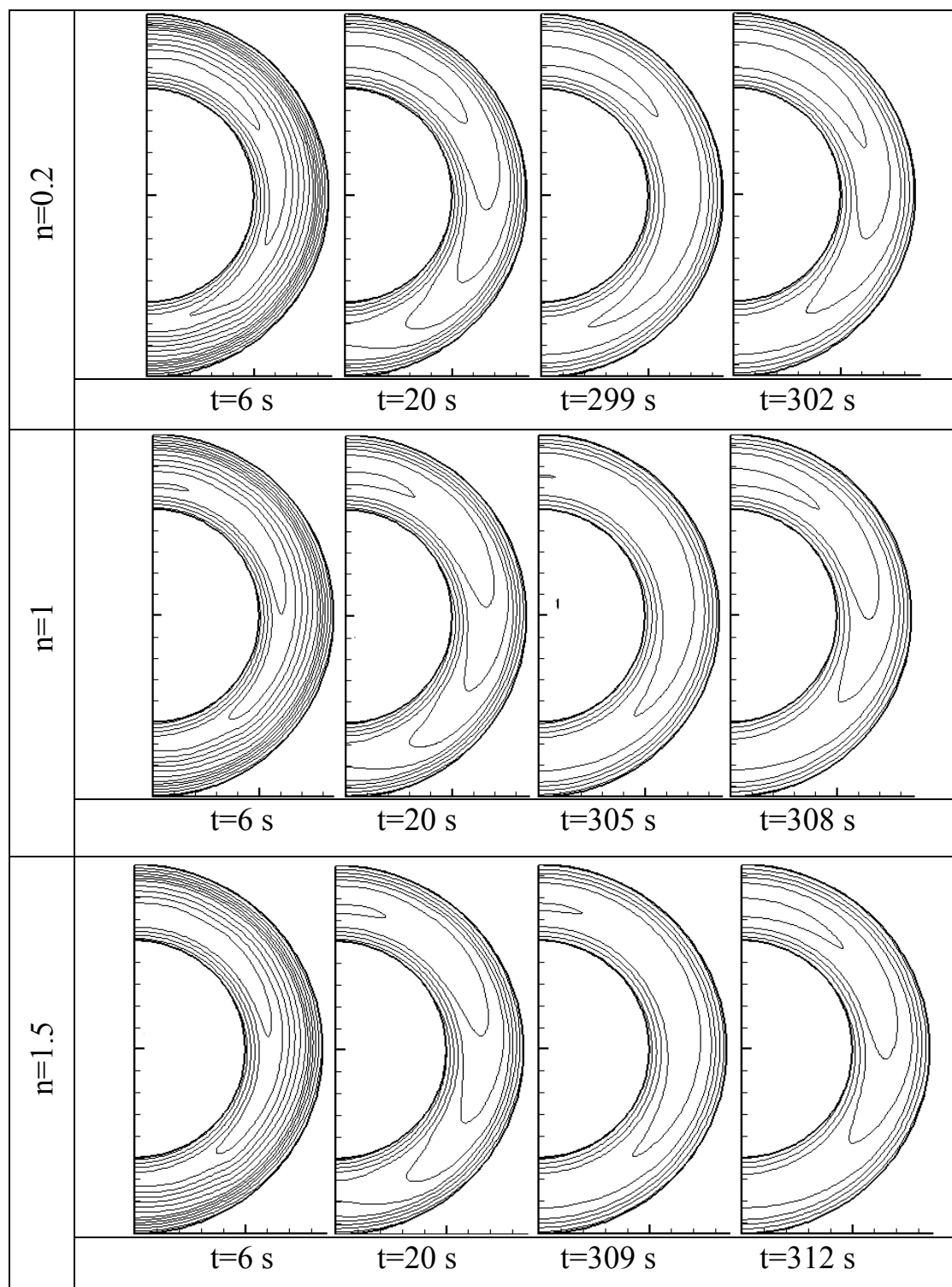


Figura 12. Evolución de las isothermas en el proceso de solidificación anular de una aleación Al-1.7% Si para los índices de potencia: $n=0.2$, $n=1$ y $n=1.5$.

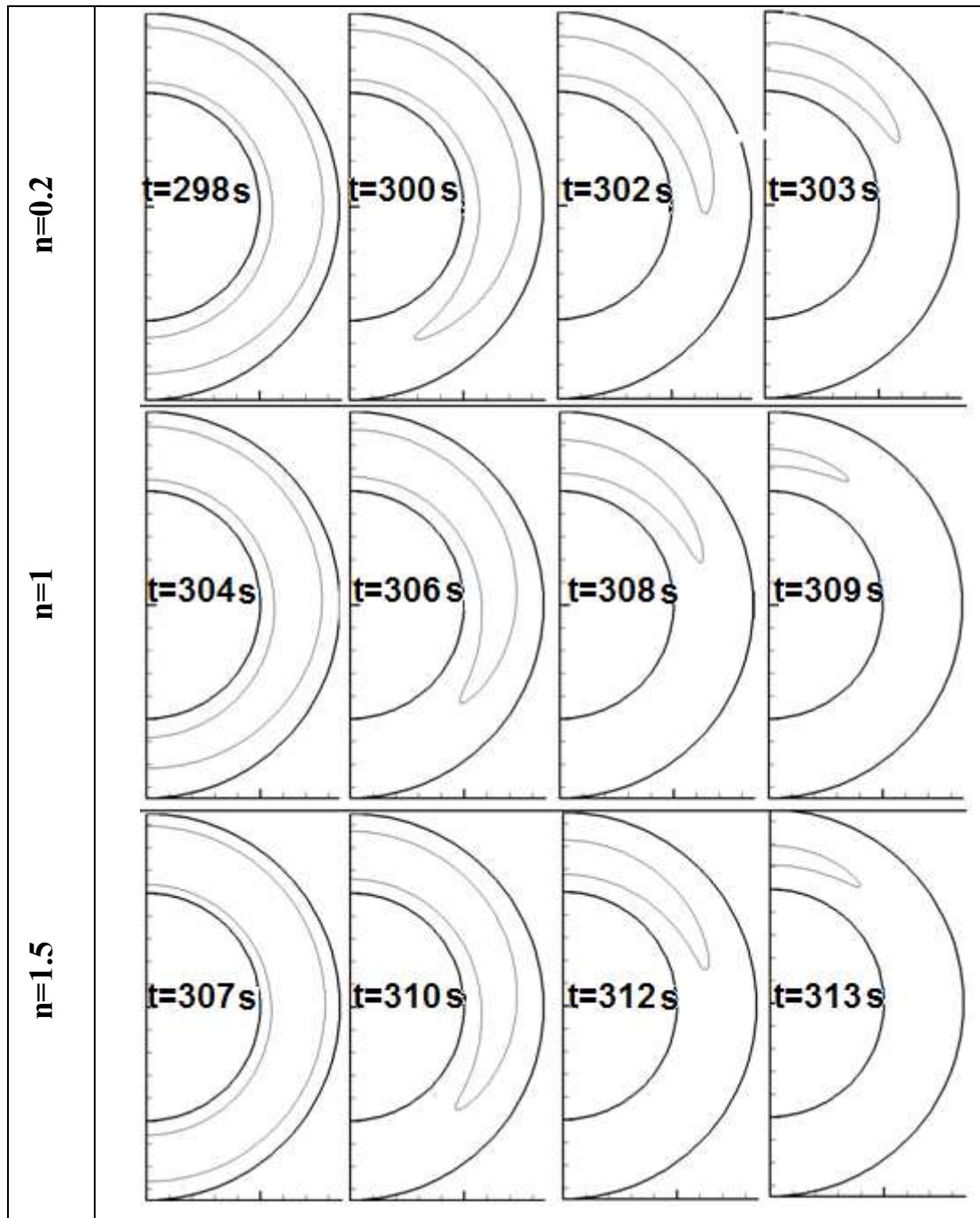


Figura 13. Evolución del frente de solidificación en el proceso de solidificación anular de una aleación Al-1.7% Si para los índices de potencia: $n=0.2$, $n=1$ y $n=1.5$.

Los resultados de la solidificación anular descrita anteriormente, fueron calculados con numerosas mallas. La tabla 8 entrega los tiempos de cálculo empleados para dos de las mallas analizadas, mientras que la tabla 9 nos entrega las diferencias porcentuales máximas para distintos parámetros (velocidades máximas y temperatura máxima), con dos mallas distintas.

Índices	t, s (120x70)	t, s (100x60)
n=0.2	142331	122112
n=1	15282	13180
n=1.5	13451	11979

Tabla 8. Tiempos computacionales empleados para dos mallas distintas.

Parámetro analizado.	Dif. máxima
Temperatura máxima (n=0.2)	1.21%
Temperatura máxima (n=1)	1.17%
Temperatura máxima (n=1.5)	1.14%
Velocidad radial máxima (n=0.2)	1.33%
Velocidad radial máxima (n=1)	1.27%
Velocidad radial máxima (n=1.5)	1.28%
Velocidad tangencial máxima (n=0.2)	1.12%
Velocidad tangencial máxima (n=1)	1.05%
Velocidad tangencial máxima (n=1.5)	1.03%

Tabla 9. Diferencia porcentual máxima entre dos mallas diferentes (120x60 v/s 100x60), considerando distintos parámetros de control.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

Previo a analizar los resultados obtenidos en la solidificación anular, se realiza una discusión a cerca de la validación del modelo matemático y los resultados obtenidos para el caso límite de fluido Newtoniano, presente en la convección natural anular (figura 2). Los casos validados son cuatro, tres para líneas de corriente y uno para isothermas. Los números de Prandtl utilizados son dos, $Pr=0.7$ y $Pr=100$, y los números de Rayleigh fueron cuatro, $Ra=3.32e+3$, $Ra=8.725e+3$, $Ra=1.1e+4$ y $Ra=2.52e+4$. Las relaciones de radios son descritas en cada figura (3 a 6).

Los resultados comparados con el autor Dyko et al. (1999) figura (3 a 6), siguen los mismos patrones. La ubicación del vórtice central es uno de los parámetros más significativos, el cálculo del presente estudio aproxima de buena manera los resultados experimentales para todos los casos analizados. Se puede destacar como el vórtice asciende a medida que aumenta el número de Rayleigh.

En general no se aprecian diferencias considerables entre los casos numéricos generados en el presente estudio y los casos experimentales y numéricos mostrados en la referencia (Dyko et al. (1999)), lo cual corrobora el funcionamiento del código computacional utilizado y permite analizar a continuación, un caso más complejo, como la solidificación no-Newtoniana entre dos cilindros concéntricos en coordenadas (r,θ) .

Las figuras (7 y 8) muestran el comportamiento de las velocidades, para los distintos índices de potencia estudiados ($n=0.2$, $n=1$, $n=1.5$). Las mayores diferencias se aprecian en la velocidad radial, en la cual existen cuatro zonas que son interesantes de discutir (tabla 7). La primera zona corresponde al primer máximo alcanzado por la velocidad radial. La segunda zona coincide con un mínimo local. La tercera zona caracteriza un segundo máximo para la

velocidad radial y que corresponde al máximo del sistema. La cuarta zona muestra el comportamiento una vez que la velocidad ha comenzado a decrecer, este comportamiento se mantiene hasta el final del proceso. En la figura 8, se muestran las velocidades radiales máximas, componente que muestra las mayores diferencias entre los distintos índices de potencia analizados ($n=0.2$, $n=1$ y $n=1.5$). El tiempo total de cálculo fue de 450 segundos.

El caso índice de potencia $n=1.5$ (figura 8), no presenta grandes diferencias en la velocidad radial respecto al caso Newtoniano, mientras que el caso $n=0.2$ (figura 8), llega a ser 10% mayor, influyendo en la transferencia de calor, modificando tanto las temperaturas como los tiempos finales. El instante cuando la aleación cambia completamente de fase, también muestra diferencias respecto al índice de potencia utilizado, adelantándose un 2% en el caso pseudoplástico ($n=0.2$) y retrasándose un 1% en el caso dilatante ($n=1.5$), tabla 4.

Cuando el fluido se considera pseudoplástico ($n=0.2$), el primer máximo de la velocidad radial (figura 8 y tabla 7), es alcanzado dos segundos antes, que en el caso Newtoniano, además de tener una magnitud cercana al 10% mayor. Por el contrario, cuando el fluido es dilatante ($n=1.5$), se aprecia una oposición mayor al movimiento, generándose el primer máximo un segundo después y con un valor 4% menor (figura 8 y tabla 7).

Luego del primer máximo de la velocidad radial, ocurre una disminución de la velocidad, lo cual se produce cuando el vórtice interior empuja al vórtice exterior en la zona superior, provocando un tercer vórtice que luego desaparece. El instante que se produce el suceso descrito ocurre prácticamente simultáneamente para los tres índices de potencia analizados ($t=17$ s), tabla 7.

La tercera zona analizada, tabla 7, corresponde al segundo máximo de la velocidad tangencial, donde la velocidad luego de alcanzar un mínimo, comienza a aumentar nuevamente. Cuando el índice de potencia es $n=0.2$, la transición mínimo-máximo ocurre de manera más rápida, mientras que para el índice de potencia $n=1.5$, el fluido se mueve más lentamente.

La última zona analizada, muestra una mayor inercia del fluido dilatante, produciendo una velocidad levemente más alta que se mantiene hasta el final del proceso de solidificación, lo que evidencia que este tipo de fluido es el último en solidificarse.

Las velocidades tangenciales (figura 7), no presentan grandes diferencias. En general el fluido con menor índice de potencia tiene más convección, lo que resulta en velocidades más altas.

En el caso de las temperaturas máximas (figuras 9), el índice de potencia menor, alcanza temperaturas menores en el instante final, además de una disminución del tiempo necesario para lograr la solidificación completa. Lo anterior ocurre debido a que las velocidades son mayores para el fluido pseudoplástico, por lo que se produce una mayor interacción entre el fluido y por ende una mayor transferencia de calor por convección. Cuando el valor del índice de potencia es $n=0.2$, se reduce el tiempo de solidificación cerca de un 2%, mientras que para el caso del fluido dilatante ($n=1.5$), el tiempo de solidificación aumenta en un 1%. Las temperaturas para el instante final (tabla 6), también muestran una diferencia del mismo orden, 1% mayor para el fluido con índice de potencia $n=1.5$ y 2% menor para el fluido con índice de potencia $n=0.2$ ambas respecto del fluido Newtoniano.

La solidificación es un proceso donde la conducción de calor predomina al inicio. Tanto las isotermas (figura 12), como los contornos del frente de solidificación (figura 13), indican que las mayores temperaturas se encuentran en la zona superior, que es la que presenta las temperaturas máximas y por ende, es la última en solidificarse, lo cual muestra que a medida que el proceso de solidificación avanza en el tiempo, se intensifica el efecto de la convección natural.

En un principio la disminución de la temperatura máxima ocurre drásticamente debido a la diferencia de temperatura inicial entre el molde y la aleación, (figura 12). A continuación se produce un equilibrio térmico, el cual coincide con el instante en el que comienza la solidificación. Una vez alcanzada la temperatura solidus (T_s), el efecto de la entalpía total que se manifiesta en un aumento del calor específico, desaparece, provocando un pequeño quiebre en la curva de disminución de la temperatura máxima, generando la curva típica presente en un cambio de fase líquido-sólido para una aleación binaria (figura 9).

En los instantes finales de la solidificación (figura 11), se puede apreciar el efecto de la convección natural presente en el proceso. Las velocidades comienzan a anularse en la zona inferior, seguida por la zona media y por último desaparece el vórtice superior. El efecto similar, que muestra la consistencia de las soluciones, se puede apreciar también en el contorno del frente de solidificación (figura 13), donde la zona más caliente siempre se ubica en la parte superior de la cavidad.

La figura 11 muestran la evolución de las líneas de corriente para la solidificación de una aleación binaria de composición Al-1.7%Si. La dinámica de los vórtices sigue la siguiente evolución. En un principio se inicial el proceso con la formación de dos vórtices prácticamente simétricos que giran en sentido contrario y que ocupan la totalidad de la cavidad. A continuación por una diferencia entre las áreas de contacto con la condición de borde convectiva (ro y re), se rompe el equilibrio produciéndose un desplazamiento del vórtice interior en la zona inferior. El desplazamiento que sigue ocurre en la zona superior en donde el vórtice exterior es empujado y desplazado en dirección descendente. En la zona media de la cavidad se crea una zona crítica que da origen a un tercer vórtice que se mantiene hasta el final del proceso de solidificación.

La figura 10 muestra el cumplimiento local de la ecuación de continuidad, calculado como el mayor valor de generación de masa, S_{max} , en la simulación que caracteriza el proceso de cambio de fase para la aleación Al-1.7%Si, para los distintos índices de potencia estudiados. Los tres casos siguen un patrón similar, lo que indica los instantes de tiempo en los que la física tiene una mayor complejidad, dificultando la convergencia de los resultados numéricos. Los instantes críticos ocurren al inicio del proceso, ($t < 5$ s), cuando el gradiente de temperatura es elevado. Luego el valor máximo local de generación de masa baja considerablemente, con algunos instantes que se escapan de la tendencia. La zona de cambio de fase es claramente la más difícil de predecir. Una vez que la solidificación ha terminado, sólo hay conducción de calor, por lo que la complejidad del cálculo disminuye, lo que se refleja en una disminución de este índice S_{max} a cero.

La tabla 8, entrega los tiempos de cálculo necesarios para cada uno de los casos analizados ($n=1$, $n=1.5$ y $n=0.2$), con dos mallas distintas (120x70 y 100x60 nodos). Luego de someter ambas mallas a un control de convergencia basado en la diferencia porcentual máxima de las velocidades y temperaturas máximas (tabla 9), se decidió utilizar como malla final, en virtud del tiempo de cálculo, la de 100x60 nodos. A modo de suavizar, tanto los gradientes térmicos como los de velocidades, se divide el dominio en cuatro zonas, cada una de ellas con diferente número de nodos, los cuales sumados nos generan la malla mencionada anteriormente. Las zonas poseen refinación de tipo exponencial, concentrando la mayor parte de los nodos en las fronteras convectivas y en las interfases molde aleación.

CONCLUSIONES

El estudio de la convección natural y solidificación de una aleación no newtoniana del tipo de Otswald de Waele de Al-1.7% Si entre dos cilindros concéntricos horizontales, indica que las mayores velocidades se alcanzan al inicio del proceso, siendo mayor en materiales de comportamiento pseudoplástico ($n=0.2$). La solidificación completa del material, se alcanza primero en el fluido de menor índice de potencia ($n=0.2$) seguido del caso newtoniano ($n=1$) y por último el fluido dilatante ($n=1.5$). La predicción con el método de volúmenes finitos puede hacerse empleando mallas no uniformes de 100 x 60 nodos. Respecto a la malla, un arreglo tipo exponencial en las zonas de mayor gradiente de temperatura, permite mejorar los cálculos. Los pasos de tiempo utilizados, fueron dinámicos entre el rango $0.001 \text{ s} \leq \Delta t \leq 0.005 \text{ s}$. Los tiempos de cálculo varían dependiendo del índice de potencia utilizado, cuando el fluido es considerado pseudoplástico ($n=0.2$) se requiere un mayor tiempo computacional, seguido del caso dilatante ($n=1.5$) y por último el newtoniano ($n=1$).

AGRADECIMIENTOS.

Los autores agradecen el apoyo recibido de CONICYT en el proyecto FONDECYT 1070186.

REFERENCIAS.

- Abu-Nada, E., Masoud, Z. and Hijazi, A., Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35: 657–665, 2008.
- Adachi, T. and Imai, S., Three-dimensional linear stability of natural convection in horizontal concentric annuli, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50 (2007) 1388-1396.
- Aiying, W., Shaozhi, Z., Guangming, C., Experimental study on the freezing characteristics of four kinds of vegetables, *LWT, Food Science and Technology*, 40(6): 1112-1116, 2007.
- Amoura, M., Zerabi, N., Smati, A. and Gareche, M., Finite element study of mixed convection for non-Newtonian fluid between two coaxial rotating cylinders, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 33: 780-789, 2006.
- Arampatzis, G. and Assimacopoulos, D., Numerical modeling of convection-diffusion phase change problems, *Computational Mechanics*, 21: 409-415, 1998.
- Denier, J.P. and Dabrowski, P.P., Asymptotic matching constraints for a boundary layer flow of a power-law fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 460: 261- 279, 2004.
- Dyko, M. P., Vafai, K. and Mojtabi, A. K., A numerical and experimental investigation of stability of natural convective flows within a horizontal annulus, *Journal Fluid Mechanics*, 381: 27-61, 1999.
- Dyko, M. P. and Vafai, K., Effects of gravity modulation on convection in a horizontal annulus, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50: 348-360, 2007.
- Incropera, F.P., Extension of the continuum model for momentum transport phenomena occurring during metal alloy solidification—I The conservation equations, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38: 1271-1284, 1995.
- Jana, S., Ray, S. and Durst, F., A numerical method to compute solidification and melting processes, *Applied Mathematical Modelling*, 31: 93-119, 2007.
- Jones, B., Sun, D., Krishnan, S. and Garimella, S., Experimental and numerical study of melting in a cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49: 2724-2738, 2006.
- Kassem, T., Numerical study of the natural convection process in the parabolic–cylindrical

- solar collector, *Desalination*, 209: 144–150, 2007.
- Kim, G. B., Hyun, J. M. and Kwak, H. S., Transient bouyant convection of a power-law non-Newtonian fluid in an enclosure, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46: 3605-3615, 2003.
- Kim, M.C., Lee, S.B., Kim, S. and Chung, B.J., Thermal instability of viscoelastic fluids in porous media, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46: 5065–5072, 2003.
- Kowalczyk, W., Hartmann ,C. and Delgado, A., Modelling and numerical simulation of convection driven high pressure induced phase changes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47: 1079-1089, 2004.
- Lin, P., Jaluria ,Y. and Heat transfer and solidification of polymer melt flow in a channel, *Polymer Engineering and Science*, 37: 1247-1258, 2007.
- Luna, N., Méndez, F. and Treviño, C., Conjugated heat transfer in circular ducts with a power-law laminar convection fluid flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45: 655-666, 2002.
- Mavridis, H., Hrymak, A. N. and Vlachopoulos, J. V., Finite element simulation of fountain flow in injection molding, *Polymer Engineering and Science*, 26 (7): 449–454, 1986.
- Moraga, N. O., Andrade, M. A. and Vasco, D. A., Unsteady conjugated mixed convection phase change of power law non Newtonian fluid in a square cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53: 3308-3318, 2010.
- Moraga, N. O., Ramirez, S. C. and Godoy, M. J., Convective non-Newtonian alloy solification in mould with Psimpler/finite volume method, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 57: 936 – 953, 2010.
- Pardeshi, R., Voller, V., Singh, A. and Dutta, P., An explicit time stepping scheme for solidification models, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51: 3399-3409, 2008.
- Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, DC, 1980.
- Petrone, G., Chénier ,E. and Lauriat, G., Stability of free convection in air-filled horizontal annuli: influence of the radius ratio , *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47: 3889-3907, 2004.
- Petrone, G., Chénier and E., Lauriat, G., Three-dimensional study of multiple transitions for natural convection in horizontal annuli, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49: 1231-1241, 2006.
- Samarskii, A.A., Vabishchevich, P.N., Iliev, O.P. and Churbanov, A.G., Numerical simulation of convection/diffusion phase change problems a review, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36: 4095-4106, 1993.
- Szimmat, J., Numerical simulation of solidification processes in enclosure, *Heat and Mass Transfer*, 38: 279-293, 2002.
- Versteeg, H. K. and Malalasekera, W., *Introduction to Computational Fluid Dynamics the Finite Volume Method*, Longman Scientific & Technical, 1995.
- Wang, S-C., Chen, C-K. and Yang, Y-T., Natural convection of non-Newtonian fluids through permeable axisymmetric and two-dimensional bodies in a porous medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45: 393-408, 2002.
- Yao, L.S. and Molla, M., Forced convection of non-newtonian fluid on a heated flat plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51: 5154-5159, 2008.
- Yap, Y.F., Chai, J.C., Toh, K.C., Wong, T.N. and Lam, Y.C., Numerical modeling of unidirectional stratified flow with and without phase change, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48: 477-486, 2005.