

## UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO EM DOMÍNIOS UNIDIMENSIONAIS

**Marcelo F. Oliveira e José A. M. Carrer**

*PPGMNE: Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, marcelofranco20@yahoo.com.br, carrer@ufpr.br*

*<http://www.ppgmne.ufpr.br>*

**Palavras Chave:** Equação da Difusão; Domínio do Tempo; MEC.

**Resumo.** Este trabalho apresenta uma formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a solução do problema da difusão em domínios unidimensionais. A utilização da solução fundamental da estática gera uma integral de domínio, cujo integrando é igual ao produto da solução fundamental com a derivada primeira do potencial em função do tempo. A derivada primeira é aproximada com o emprego de diferença finita regressiva, e o domínio é discretizado com o emprego de células lineares. O sistema de equações resultante apresenta como incógnitas o potencial e/ou o fluxo no contorno e o potencial nos pontos internos. Para validação dos resultados, dois exemplos são apresentados e comparados com suas soluções analíticas.

## 1 INTRODUÇÃO

A busca pela solução de diversos problemas na engenharia proporcionou o desenvolvimento de diversas técnicas numéricas, entre as quais o Método dos Elementos de Contorno, representada aqui por MEC.

O interesse pelo MEC fica evidenciado pelo grande número de formulações que tem surgido recentemente.

As equações integrais de contorno podem ser obtidas através de um tratamento de resíduos ponderados, no qual a função de ponderação pode ser ou não a solução fundamental (função de Green) do problema correlato. Assim, é possível estudar problemas que variam ao longo do tempo com o emprego de soluções fundamentais não dependentes do tempo (que, por isso, podem ser designadas soluções fundamentais da estática). A formulação apresentada neste trabalho, para solução do problema de propagação de calor em domínios unidimensionais, recai nesse caso e é denominada MEC-D, onde D significa domínio.

De acordo com Incropera et al. (1992), o principal objetivo na análise da condução de calor é determinar o campo de temperatura que resulta das condições impostas no contorno do problema estudado, isto é, a finalidade é conhecer a distribuição de temperatura, ou a variação da temperatura, em função da posição.

Dois exemplos serão colocados no trabalho e comparados com as soluções analíticas correspondentes para validação da formulação apresentada.

## 2 FORMULAÇÃO BÁSICA DO MEC

Inicialmente a equação constituinte do MEC é escrita da seguinte maneira para problemas 1D:

$$u(\xi, t) = u^*(\xi, x)q(x, t)|_{x=L} + u^*(\xi, x)q(x, t)|_{x=0} - q^*(\xi, x)u(x, t)|_{x=L} - q^*(\xi, x)u(x, t)|_{x=0} + \frac{1}{k} \int_0^L u^*(\xi, x) \dot{u}(x, t) dx \quad (1)$$

Para o problema estudado neste trabalho, a variável  $u$  é a temperatura e a variável  $q$  se refere ao fluxo (derivada na direção normal de  $u$ ),  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica do material.

Para o caso 1D a solução fundamental é dada por, Vladimirov (1979):

$$u^*(\xi, x) = \frac{|x - \xi|}{2} \quad (2)$$

e  $q^*$  é a derivada na direção normal de  $u^*$  que é dada por:

$$q^*(\xi, x) = \frac{du^*(\xi, x)}{dn(x)} \quad (3)$$

Nas equações acima  $x$  representa o ponto campo e  $\xi$  representa o ponto fonte.

Para resolver um problema através do MEC-D, o contorno e do domínio necessitam ser discretizados. Como o problema é unidimensional, o contorno é representado pelos nós de fronteira do domínio  $[0, L]$  e somente o domínio deve ser discretizado, o que foi feito com o emprego de células lineares. Após a discretização, o sistema de equações resultante pode ser

escrito em forma matricial como abaixo, na equação 4; as incógnitas são o potencial e/ou o fluxo nos nós do contorno e o potencial nos pontos internos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^c \\ \mathbf{u}_{n+1}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} \{ \mathbf{q}_{n+1}^c \} - \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^c \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^d \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Os índices superiores em 4 representam onde estão localizados os pontos, c significa contorno e d significa domínio, e os índices inferiores (n+1) indicam o tempo da análise.

A equação 4 pode ser representada como abaixo:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} - \frac{1}{k}\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} \quad (5)$$

O objetivo do presente trabalho é apresentar uma nova formulação para o MEC-D, que será representada aqui por MEC-T (T significa Tempo), na qual se considera que as funções  $u$  e  $q$  possuem variação linear e constante, respectivamente, no tempo, uma integração adicional no intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ , será efetuada; assim a equação 5 é reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{H} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{u}(t) dt = \mathbf{G} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{q}(t) dt - \frac{1}{k} \mathbf{M} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{u}} dt \quad (6)$$

Como foi admitido variação linear para as variáveis  $u$  e  $q$ , as integrais no tempo podem ser calculadas analiticamente, resultando em:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(t) dt = \frac{(u_{n+1} + u_n)\Delta t}{2} \quad (7)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} q(t) dt = q_{n+1}\Delta t \quad (8)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(t) dt = u(t) = (u_{n+1} + u_n) \quad (9)$$

Substituindo 7, 8 e 9 em 6 tem-se:

$$\frac{\Delta t}{2} \mathbf{H} (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n) = \Delta t \mathbf{G} \mathbf{q}_{n+1} - \frac{1}{k} \mathbf{M} (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n) \quad (10)$$

A equação 10 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{H}} \mathbf{u}_{n+1} + \bar{\mathbf{H}} \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{G}} \mathbf{q}_{n+1} + \bar{\mathbf{M}} \mathbf{u}_{n+1} + \bar{\mathbf{M}} \mathbf{u}_n \quad (11)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H} \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G} \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M} \quad (14)$$

Agrupando as matrizes que possuem fatores em comum na equação 11, pode-se escrever:

$$\bar{\mathbf{H}}_* \mathbf{u}_{n+1} = \bar{\mathbf{G}} \mathbf{q}_{n+1} + \bar{\mathbf{H}}_* \mathbf{u}_n \quad (15)$$

Onde  $\bar{\mathbf{H}}_* = (\bar{\mathbf{H}} - \bar{\mathbf{M}})$ .

No início da análise, ou seja, quando o índice  $n = 0$ , os valores de  $u_n$  vêm das contribuições das condições iniciais, e os valores de  $q_n$  podem ser calculados como  $q_n = \frac{du_n}{dx}$ ; logo os termos  $\bar{\mathbf{G}} \mathbf{q}_n$  e  $\bar{\mathbf{H}}_* \mathbf{u}_n$  são conhecidos e pode-se escrever:

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{G}} \mathbf{q}_n + \bar{\mathbf{H}}_* \mathbf{u}_n \quad (16)$$

### 3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir são apresentados dois exemplos numéricos, que são comparados com as respectivas soluções analíticas, que foram calculadas seguindo os procedimentos apresentados por Stephenson (1970) e Greenberg (1998).

#### 3.1 Exemplo 1

Será feita uma análise da distribuição térmica em uma barra de comprimento  $L=12$ , com as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \text{ e } q(L, t) = 10$$

Para esse exemplo os seguintes valores serão adotados:

$$k=0.5; \Delta t = 0.1$$

A Figura 1 apresenta a evolução da temperatura ao longo do tempo no ponto  $x = L/2$  e a Figura 2 apresenta a evolução do fluxo no ponto  $x = 0$ .

Observa-se uma boa concordância entre as respostas numérica e a solução analítica.

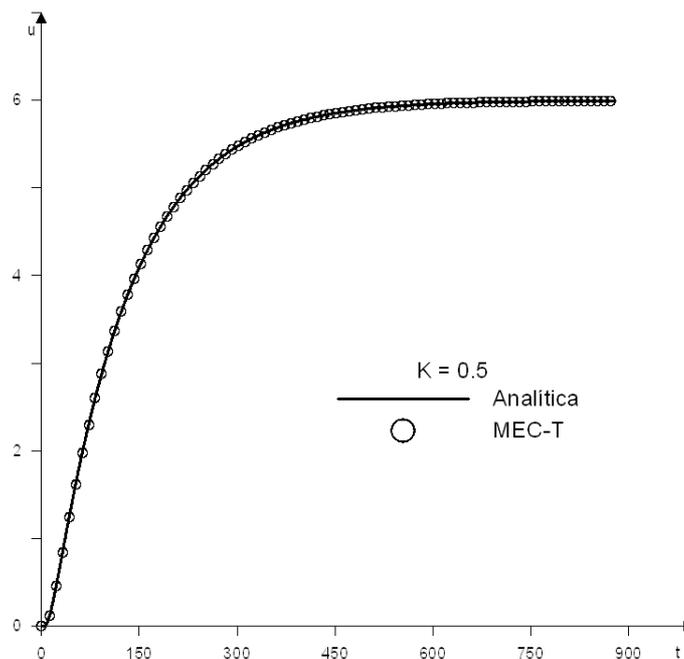


Figura 1: Barra com fluxo prescrito: temperatura em  $x = L/2$

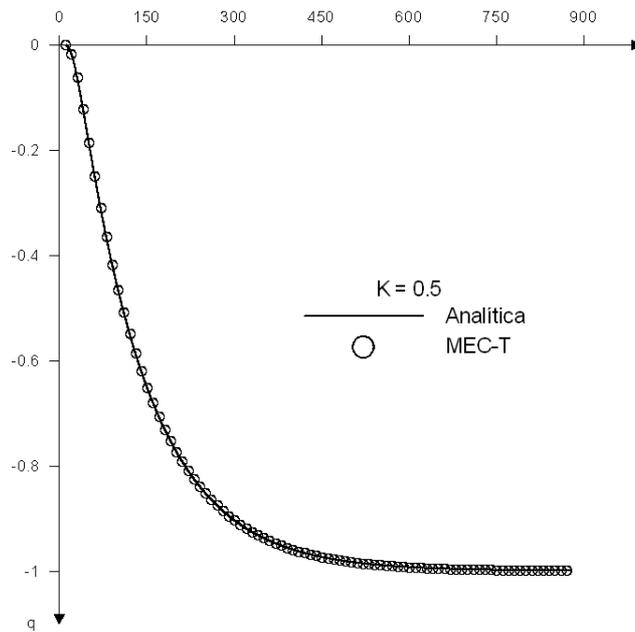


Figura 2: Barra com fluxo prescrito: fluxo de calor em  $x = 0$ .

### 3.2 Exemplo 2

Nesse exemplo, é feita uma análise da distribuição térmica em uma barra de comprimento  $L=12$ , onde uma condição de contorno variável no tempo é imposta no nó da direita, isto é, em  $x=L$ . A condição inicial é nula.

Os gráficos desse exemplo serão apresentados juntos com os gráficos das respectivas soluções analíticas.

As condições de contorno são:

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = U(1 - \cos(\beta t)),$$

onde  $U$  é uma constante arbitrária, e  $\beta = \frac{\pi}{100}$

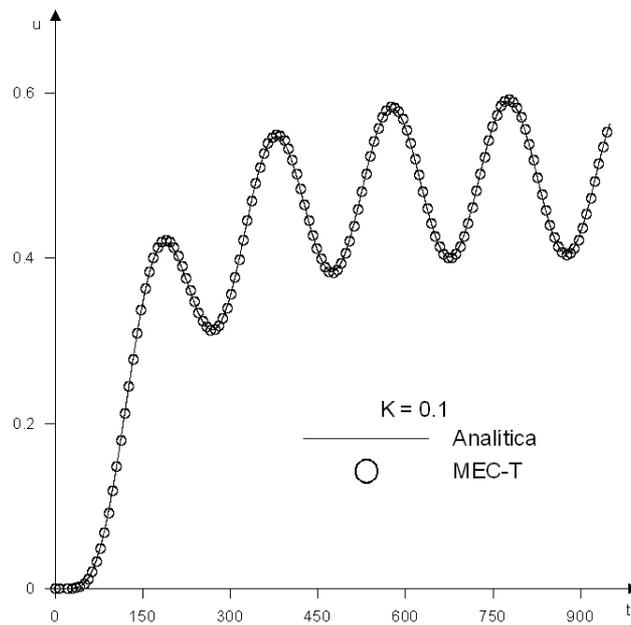
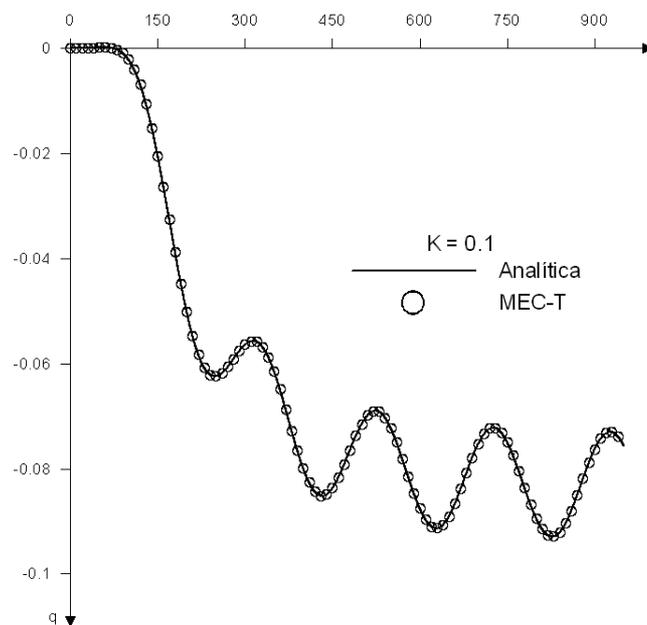
Para esse exemplo os seguintes valores serão adotados:

$$k = 0.1; \Delta t = 0.1$$

As Figuras 3 e 4 apresentam, respectivamente, a evolução da temperatura no ponto  $x=L/2$  e do fluxo no ponto  $x = 0$ .

Nas Figuras 5, 6 e 7 são apresentados os resultados correspondentes à evolução da temperatura para diferentes valores do coeficiente de condutividade térmica.

Novamente observou-se boa concordância entre as soluções numérica e analítica.

Figura 3: Barra com condição de contorno variável: temperatura em  $x = L/2$ Figura 4: Barra com condição de contorno variável: fluxo em  $x = 0$

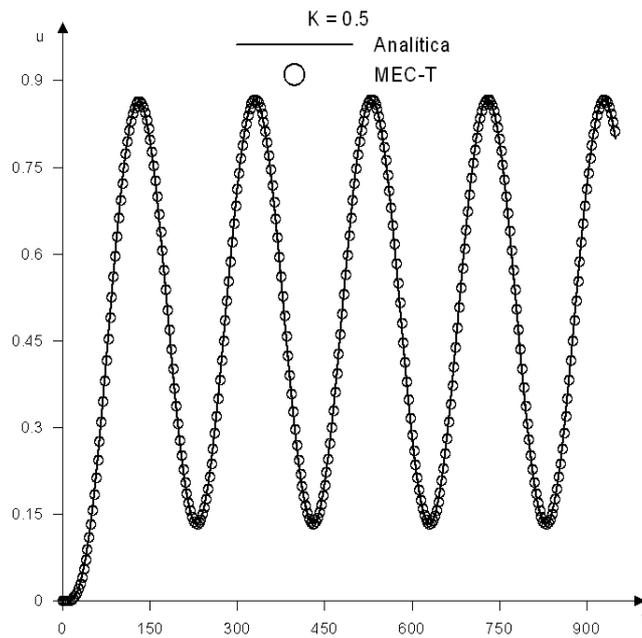


Figura 5: Barra com condição de contorno variável: temperatura em  $x = L/2$ ,  $K = 0.5$

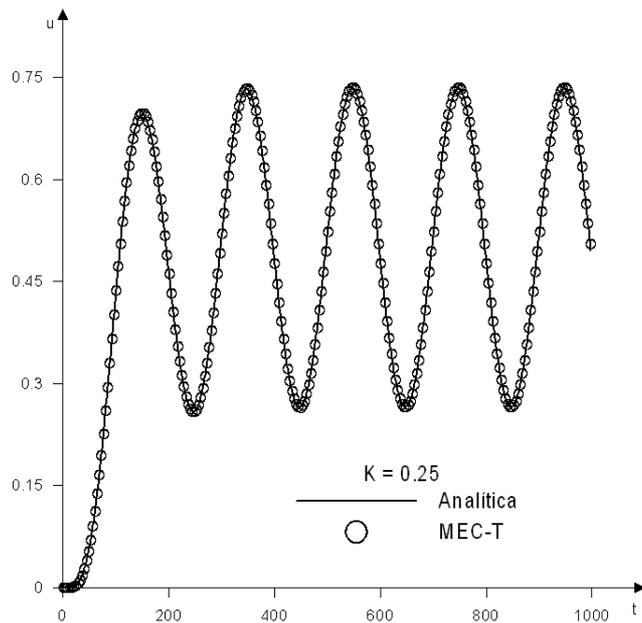


Figura 6: Barra com condição de contorno variável: temperatura em  $x = L/2$ ,  $K = 0.25$

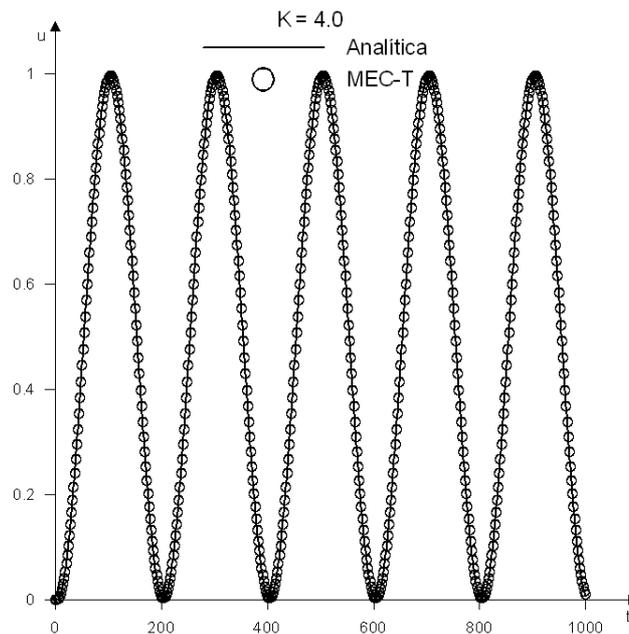


Figura 7: Barra com condição de contorno variável: temperatura em  $x = L/2$ ,  $K = 4.0$

#### 4 CONCLUSÕES

Através das análises apresentadas neste trabalho, pode-se perceber que a formulação MEC-T, desenvolvida aqui, é capaz de produzir resultados bastante bons. Além disso, a formulação MEC-D, de uma maneira geral, e a formulação MEC-T, em particular, são bastante simples e versões para a solução do problema de propagação de ondas escalares podem ser desenvolvidas com relativa facilidade.

Note-se que, na formulação MEC-D, a escolha de uma aproximação para a derivada de primeira ordem que aparece na integral de domínio é um problema que merece atenção (em outras palavras, a escolha de um esquema de marcha no tempo), a formulação MEC-T não apresenta esse problema, uma vez que a integração no tempo reduz a ordem da derivada que aparece na integral de domínio; conseqüentemente, as condições iniciais podem ser impostas diretamente nas equações do método.

Os resultados apresentados aqui mostraram o grande potencial da formulação apresentada aqui, o que encoraja a utilização de uma solução fundamental dependente do tempo nessa formulação.

#### REFERÊNCIAS

Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary Element Techniques*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

Greenberg M. D., *Advanced Engineering Mathematics*, Prentice Hall-2. Ed. New Jersey, 1998.

Incropera F. P., DeWitt D. P., *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*, Guanabara Koogan - 3. Ed. Rio de Janeiro, 1992.

Stephenson G., *An Introduction to Partial Differential Equations for Science Students*, Longman, 1970.

Vanzuit R. J., Análise do Fluxo Bidimensional de Calor pelo Método dos Elementos de Contorno com Soluções Fundamentais Independente do Tempo, Dissertação de Mestrado. CESEC/UFPR.

Vladimirov V. S., Generalized Functions in Mathematical Physics. Nauka Publishers, Moscow, 1979.