

INFLUENCIA DEL COMPORTAMIENTO NO NEWTONIANO DE LA SANGRE EN LAS TENSIONES CORTANTES SANGRE-ENDOTELIO EN UNA ARTERIA CAROTIDA.

Jorge Leiva ^{*,†}, Fernando Basombrío [†], Gustavo Buscaglia ^{*,†}, Enzo Dari ^{*,†}.

^{*} Grupo de Mecánica Computacional del CAB
Centro Atómico Bariloche, CNEA
Av. Bustillo Km. 9,500, San Carlos de Bariloche, R8402AGP Río Negro, Argentina

[†] Instituto Balseiro,
Centro Atómico Bariloche, CNEA
Av. Bustillo 9,500
R8402AGP Bariloche, R. N., Argentina
e-mail: leivaj@ib.cnea.gov.ar

Palabras Clave: Flujo No-Newtoniano, Tensiones Cortantes, Condiciones de Contorno, Carótida.

Resumen. *En este trabajo se comparan los resultados obtenidos en la simulación computacional, por el método de elementos finitos, de los flujos estacionario y pulsante de sangre en una arteria carótida. Se utilizaron para modelar el comportamiento reológico de dicho fluido un modelo no newtoniano (modelo de Casson) y el clásico modelo newtoniano. Se analizan particularmente condiciones de contorno adecuadas para la simulación computacional tridimensional.*

Los resultados obtenidos muestran la existencia de importantes diferencias, cercanas en algunos casos al 30%, en los valores de la tensión cortante según el modelo constitutivo utilizado. Las tensiones calculadas con el modelo no newtoniano son mayores que las obtenidas del cálculo newtoniano en las zonas donde el flujo posee una dirección principal. Sin embargo, las tensiones cortantes "no newtonianas" son menores que las predichas por el modelo newtoniano en zonas de flujo estanco y por consiguiente de bajas tensiones cortantes. Es por esto último que decimos que, la predicción dada por el modelo newtoniano respecto a zonas de bajos esfuerzos de corte, es "optimista" respecto a la predicción del modelo no newtoniano.

1. INTRODUCCIÓN

En el trabajo de Basombrío et al. ¹ se presentan los resultados correspondientes al flujo de un fluido newtoniano generalizado (modelo de Casson) en una geometría de anastomosis idealizada, obtenidos resolviendo las ecuaciones de Navier Stokes Generalizadas (NSG) al caso de viscosidad dependiente de la velocidad de deformación. Se encontraron diferencias con el caso newtoniano en los flujos secundarios (zonas de estancamientos y recirculaciones), flujos particularmente relevantes en la dinámica de diversos procesos fisiológicos asociados, entre otras patologías, a la arterioesclerosis.

Con el objeto de ampliar los resultados presentados en dicho trabajo, nos propusimos estudiar la distribución de tensiones cortantes (Wall Shear Stress) en una geometría arterial real obtenida a partir del procesamiento de imágenes médicas ². Centramos nuestra atención en las tensiones cortantes, por ser éstas dominantes en la interacción sangre - pared arterial y por tener relación directa, comprobada experimentalmente ³, con los procesos de mecanotransducción que ocurren en el tejido endotelial. La utilización de una geometría real obedece a la necesidad de desarrollar las herramientas computacionales adecuadas para geometrías lo más generales posibles, dada la gran influencia del factor geométrico en los resultados y su variabilidad paciente a paciente. Sin duda, una vez reconstruida la superficie tridimensional del lumen arterial, el problema de mayor complejidad que encontramos para realizar una simulación fluidodinámica fue la imposición de las condiciones de contorno adecuadas a partir de los datos fisiológicos con los que contábamos; en particular para el caso más complejo aquí tratado: el flujo pulsante de un fluido newtoniano generalizado.

La imposición de condiciones de velocidad impuesta para un flujo pulsante no newtoniano tropieza con la inexistencia de soluciones exactas que permitan, a partir de un valor fisiológico como el caudal medio, imponer un dado perfil de velocidades en los contornos de Dirichlet. Aún en el caso newtoniano, la variabilidad del pulso cardíaco asociada a la complejidad geométrica de la superficie, dificultan la obtención de un perfil adecuado debiendo recurrirse a descomposiciones de Fourier, transformaciones conformes y demás artificios matemáticos. Estas dificultades motivan la búsqueda de una solución simple a dichos problemas. En este trabajo emplearemos la idea de acoplar a la resolución numérica 3D (solución de las ecuaciones NSG) un programa de resolución numérica más simple (basado en ecuaciones de flujo simplificadas respecto a las ecuaciones NSG), cuya solución represente la condición de contorno a imponer. La simplificación utilizada será acorde al comportamiento del flujo antes de la zona proximal o luego de la zona distal del tramo arterial correspondiente.

Asimismo, la imposición de condiciones de contorno de “fuerza” presenta ciertas dificultades, entre ellas la complejidad de la estructura vascular y la dificultad de medición de parámetros característicos. En base a un esquema simplificado del árbol arterial (más allá de la zona distal) presentado por Cebra ⁴ *et al.* se realizó una generalización para el caso de flujo pulsante no newtoniano.

Los métodos utilizados en este trabajo se enmarcan en la idea de aumentar la complejidad del modelo utilizado para resolver el problema, partiendo de los datos fisiológicos disponibles (factor determinante en la aplicación práctica de la hemodinámica

computacional), a partir de simulaciones con diferente grado de aproximación en distintas zonas del dominio, reservando el mayor grado de complejidad para la zona de interés.

En los apartados 2.1 y 2.2 se detallan, respectivamente, el modelado matemático y las condiciones de contorno empleadas en la simulación 3D. Los resultados y su discusión se presentan en el apartado 3. El apartado 4 contiene las conclusiones.

2. MÉTODOS

2.1 Modelado Matemático.

El problema a tratar corresponde a un flujo tridimensional, laminar, incompresible, viscoso, newtoniano generalizado. Las ecuaciones de movimiento son similares a las ecuaciones de Navier Stokes, salvo el hecho de que la viscosidad es función del segundo invariante del tensor tasa de deformación (\hat{d}).

En el caso de la sangre uno de los modelos viscosos más utilizado, debido a su correlación con los datos experimentales, es el denominado modelo de Casson ⁵:

$$\mu_{(\hat{d})} = \left(\sqrt{\mu_{\infty}} + \sqrt{\frac{Y}{2\hat{d}}} \right)^2 = \mu_{\infty} + \sqrt{\frac{2\mu_{\infty}Y}{\hat{d}}} + \frac{Y}{2\hat{d}} \quad (1)$$

donde μ_{∞} es la viscosidad asintótica e Y es la tensión umbral, es decir, tensión de corte mínima para que la sangre comience a fluir ⁵.

Puede mostrarse ⁶ que un conjunto de números adimensionales posible para caracterizar el problema, basados en los parámetros μ_{∞} , Y , ρ (densidad del fluido), V_0 (velocidad característica del flujo) y x_0 (longitud característica de la geometría) lo forman los siguientes:

$Re_{\infty} = \frac{\rho \cdot V_0 x_0}{\mu_{\infty}}$, el número de Reynolds, que representa el cociente entre las fuerzas

inerciales y las viscosas.

$Ca = \frac{Y \cdot x_0}{\mu_{\infty} V_0} = \frac{Y}{\tau_{\infty}}$, el número de Bingham, que representa el cociente entre la tensión

umbral (fenómeno no lineal) y las tensiones de corte viscosas asintóticas (fenómeno lineal).

2.2 Condiciones de Contorno

2.2.1 Imposición de Condiciones de Dirichlet.

Debido a la complejidad presentada por las geometrías asociadas al árbol arterial, la imposición de condiciones de contorno de velocidad en 3D para la resolución del problema numérico asociado no puede hacerse generalmente a partir, por ejemplo, de soluciones analíticas de flujos simples. Más aún en situaciones pulsantes, donde debe especificarse una condición diferente en cada paso de tiempo. Incluso cuando la utilización de soluciones analíticas fuese posible, la gran cantidad de valores espaciales y temporales a especificar, junto con la necesidad de especificarlos en cada nodo de la discretización utilizada (lo cual

puede requerir de interpolación) complica la implementación, y puede afectar el error del cálculo debido al error en las condiciones de contorno impuestas. Por lo tanto, sería de suma utilidad un método que permitiese la imposición de condiciones de contorno solucionando, al menos en parte, los problemas antes planteados.

En este trabajo se implementará, a partir de un código de cálculo unidireccional bidimensional (Flujo Paralelo), un conjunto de opciones que permita colocar automáticamente como condiciones de contorno de un programa de cálculo tridimensional (PARFEMCO⁹), los resultados unidireccionales previamente obtenidos de aquél. La particular característica de la utilización de la misma grilla bidimensional (idéntica distribución nodal y elemental), del mismo tipo de elemento y similar método numérico, permite que el error en el cálculo de las condiciones de contorno sea del mismo orden que el correspondiente al cálculo tridimensional. Además hace innecesaria la interpolación, ya que las posiciones nodales coinciden en ambos problemas (2D y 3D).

Los sistemas de Flujo Paralelo son aquellos sistemas fluidodinámicos en los cuales existe una única dirección del campo de velocidades. En general, este tipo de flujo se presenta en secciones de tuberías lo suficientemente largas y rectas (respecto a un eje paralelo a la dirección principal) como para alcanzar la condición de flujo desarrollado. Notar que en el caso de existir fuerzas de volumen, estas deben estar sobre la dirección principal. Un parámetro relevante a los fines de determinar la validez de la aproximación de flujo paralelo es el cociente $l=L/D$ donde L es la longitud del segmento de tubería y D su diámetro. Para valores de $l \geq l_T = 0.06 Re$ (Re es el Número de Reynolds) podemos considerar que un flujo paralelo es una buena aproximación a la solución del problema planteado (en flujo laminar).

La hipótesis de este modelo (líneas de flujo paralelas) permite desprestigiar las componentes del campo de velocidad distintas a la correspondiente a la dirección principal de movimiento. En este caso se considerará, por convención, a la dirección z como la principal. Expresada en forma matemática, dicha condición adquiere la forma;

$$\vec{V}_{(x,y,z,t)} = u_{(x,y,z,t)} \hat{e}_z \quad [x,y,z,t] \in \Omega \times I \quad (2)$$

donde Ω es el dominio del sistema tridimensional antes de la aproximación de flujo paralelo. La condición anterior es equivalente a la condición de flujo completamente desarrollado;

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad [x,y,z,t] \in \Omega \times I$$

Siendo f la fuerza por unidad de masa, para que exista un flujo paralelo esta debe estar sobre la dirección z , es decir:

$$\vec{f} = g_{(x,y,t)} \hat{e}_z$$

Bajo las hipótesis anteriores las ecuaciones de NSG se reducen a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\Delta p}{\Delta z}(t) + g + \vec{\nabla} \cdot \left[\mu_{(a)} \vec{\nabla} u \right] \right] \quad t \in I \quad (x, y) \in A$$

$$u(x, y, t) = u_D(x, y, t) \quad \text{Condición de Borde} \quad t \in I \quad (x, y) \in \partial A \quad (3)$$

$$u(x, y, t) = u_0(x, y) \quad \text{Condición Inicial} \quad t = 0 \quad (x, y) \in A$$

siendo A el área transversal a la dirección principal del dominio Ω y quedando definida:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{P_N(z_1) - P_N(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{\Delta p}{\Delta z} \quad (4)$$

Las ecuaciones (3) representan un sistema bidimensional, dado que ninguna de las variables depende de la posición a lo largo de la dirección principal z , con lo cual el dominio es ahora la sección transversal A del volumen Ω . Dado que en el caso general, estas ecuaciones no poseen una solución exacta, se obtendrá una solución numérica aproximada.

El tratamiento numérico del término temporal se realizó mediante el algoritmo de Euler implícito. La discretización de las variables espaciales se efectuó utilizando un esquema de Galerkin, empleando funciones de forma lineales continuas definidas sobre una malla de triángulos. La implementación computacional se llevó a cabo en el entorno de programa GPFEP⁷. El programa resuelve el problema no lineal resultante mediante un esquema iterativo, sin embargo, para ser congruente con el esquema empleado en el cálculo 3D, se atrasará el término no newtoniano linealizándose entonces el problema.

Como resultado de las aproximaciones realizadas, la presión deja de ser una incógnita del problema fluidodinámico asociado, para convertirse en un dato, más precisamente hablamos del gradiente espacial de presión en la dirección de flujo que forma parte del miembro derecho de la ecuación (3)-a. La variación temporal de dicho gradiente no es un dato comúnmente medible. Generalmente se cuenta con una medición de la variación temporal de la presión propiamente dicha. Por lo tanto se hace necesaria la estimación del gradiente a partir una curva Presión – Tiempo (PT) como la mostrada en la Figura 1⁸.

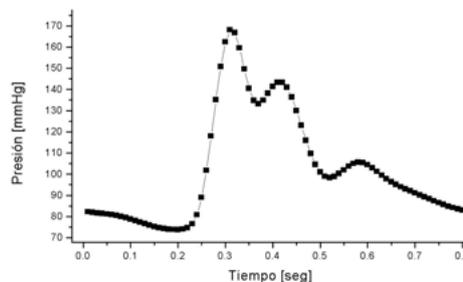


Figura 1: Curva Presión – Tiempo utilizado en este trabajo para generar los perfiles de flujo paralelo impuestos en la entrada y en la salida principal de la arteria.

Es importante notar que la curva PT presenta importantes variaciones según la zona del sistema circulatorio en la cual se realice la medición de la presión, esto debido a la gran complejidad geométrica que presenta el sistema circulatorio como así también a la elasticidad arterial. Por lo tanto, se hace necesaria la medición de dicha curva en la zona en donde se realizará la simulación tridimensional.

Acorde con la unidireccionalidad del campo de velocidades en un flujo paralelo, podemos suponer que el pulso de presión se propaga como una onda unidimensional. Sin embargo, la presión sanguínea no satisface la condición $p_{(z+ct)} = p_{(z)}$ donde c es la velocidad de propagación de la onda de presión, dado que existe un gradiente espacial estacionario de presión que impulsa un flujo neto de sangre desde la zona proximal a la distal. Descomponiendo a la presión en sus componentes de Fourier (p es una función periódica) podemos observar lo anterior con claridad;

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(z) e^{i2\pi nt/T} = p^{(0)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(z) e^{i2\pi nt/T},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i2\pi np^{(n)}}{T} e^{i2\pi nt/T}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p^{(n)}}{\partial z} e^{i2\pi nt/T} = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial p^{(n)}}{\partial z} e^{i2\pi nt/T}.$$

donde p es la presión mecánica de la sangre (presión intramuros), que puede ser descompuesta en la dos componentes: la presión del tejido que rodea al vaso $p^{(0)}$ (presión extramuros) y la presión transmural p' debida a la pared del vaso, definida en este caso por:

$$p' = p - p^{(0)} \quad \text{es decir} \quad p' = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)} e^{i2\pi nt/T}.$$

De la definición anterior obtenemos la siguiente identidad;

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t}, \tag{5}$$

dado que la presión extramuros no depende del tiempo (pero sí depende de z). La presión transmural satisface entonces la ecuación de ondas (ondas debidas a la respuesta elástica de la pared arterial):

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p'}{\partial t} \tag{6}$$

Integrando la ecuación (6) sobre la zona de interés $z \in [z_0, z_1]$, y utilizando la identidad (5) obtenemos una expresión del gradiente de presión:

$$\frac{\Delta p'}{\Delta z} = -\frac{1}{c} \left[\frac{1}{\Delta z} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial p'}{\partial t} dz \right] = -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Delta z} \int_{z_0}^{z_1} p' dz \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \quad \Delta z = z_1 - z_0$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{\Delta p^{(0)}}{\Delta z} + \frac{\Delta p'}{\Delta z} = \frac{\Delta p^{(0)}}{\Delta z} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \quad (7)$$

donde \bar{p} es el promedio espacial de la presión sanguínea, es decir el valor obtenido por las mediciones habituales de presión.

Resta aún calcular la componente estacionaria del gradiente de presión sanguínea, $\Delta p^{(0)} / \Delta z$. Para ello será necesario conocer el caudal medio correspondiente a cada una de las arterias a analizar, cuyo valor puede obtenerse a través de mediciones convencionales como el ultrasonido. A causa de la no-linealidad de las ecuaciones (3), la obtención del término estacionario del gradiente de presión correspondiente al caudal medio no puede realizarse a partir de las soluciones correspondientes al flujo estacionario (técnica válida en el caso newtoniano, por la linealidad del término viscoso). Por lo tanto, dicho cálculo se realizará en forma iterativa: utilizando como semilla el valor de $\Delta p^{(0)} / \Delta z$ correspondiente al caso estacionario, se calculará el caudal mediante la simulación computacional del problema utilizando el código de flujo paralelo y de acuerdo al resultado obtenido se aumentará o disminuirá el valor de $\Delta p^{(0)} / \Delta z$ (a mayor gradiente de presión, mayor caudal) hasta alcanzar el valor deseado de caudal medio.

La ecuación (7) brinda una relación matemática que nos permite obtener el valor del gradiente espacial de la presión sanguínea a partir de la curva PT y del caudal medio, donde la velocidad propagación (debida a la elasticidad de la pared y considerando sólo pequeñas deformaciones en ésta) está dada por:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_f} \frac{E_a h_a}{D_a}} \quad (8)$$

donde E_a es el módulo de Young, h_a el espesor, D_a el diámetro (todos referidos a una arteria en particular) y ρ_f es la densidad de la sangre.

El cálculo de la derivada temporal de la presión sanguínea correspondiente a la ecuación (7) se realizará, a partir de una curva PT dada, mediante un esquema numérico adelantado;

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t}(t_0) = \frac{\bar{p}(t_0 + \Delta t) - \bar{p}(t_0)}{\Delta t} \quad (9)$$

El valor de Δt utilizado será el correspondiente a la discretización temporal (Esquema Euler Implícito) utilizada en la ecuación (3).

2.2.2 Imposición de Condiciones Mixtas.

En salidas de flujo (correspondientes, por ejemplo, a las sucesivas bifurcaciones de la rama externa de la arteria carótida aquí presentada) no es posible la imposición de una condición de velocidad. Esto se debe a la complejidad geométrica de las salidas en sí mismas sumada ésta al inicio de las bifurcaciones correspondientes a la red capilar. Esta característica (la conexión cercana de las salidas con las bifurcaciones capilares) sugiere que la condición de contorno más adecuada es la denominada “de red capilar”⁴. Esta condición se basa en la suposición de una cierta regla matemática que rige la sucesiva división del árbol arterial hasta alcanzar la zona capilar (interfase entre las regiones arterial y venosa). Una primera aproximación es considerar que dicha regla es geométrica, como se muestra en la Figura 2.

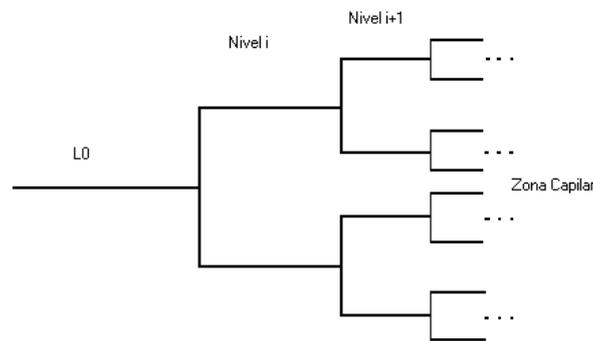


Figura 2: Esquema de una red capilar de progresión geométrica.

El modelo consiste en imponer una condición de contorno *mixta* en las salidas mencionadas, calculando la fuerza aplicada sobre el sistema por el medio exterior, este caso representado por la red capilar. La fuerza se calcula en base a la presión existente en cada una de las salidas (P_{out}), la cual se obtiene a partir de la caída de presión que sufre la sangre en las ramas capilares (ΔP) mediante un modelo unidimensional (flujo paralelo estacionario en tubos de sección circular) y considerando conocida la presión (aproximadamente constante) en los capilares (P_c). La idea anterior se expresa en la ecuación (10).

$$P_{out} = P_c + \Delta P \quad (10)$$

Para el flujo laminar estacionario de un fluido newtoniano, la caída de presión (ΔP) en un tramo recto de sección circular, para un caudal (Q) conocido, responde a la ecuación;

$$\Delta P = \frac{8\pi\mu_\infty L}{A^2} Q = RQ$$

donde L es la longitud axial del tubo, A su área transversal y μ_∞ la viscosidad del fluido circulante. Sumando el aporte de cada tramo, representado por el subíndice k , hasta llegar a la zona capilar (el último tramo N) obtenemos:

$$\Delta P = \sum_{k=1}^N \Delta P_k = \sum_{k=1}^N R_k Q_k = \frac{8\pi\mu_\infty L_0}{A_0^2} Q_0 \sum_{k=1}^N \left(\frac{c_L}{2c_A^2} \right)^k = \frac{8\pi\mu_\infty L_0}{A_0^2} Q_0 \sum_{k=1}^N r^k, \quad (11)$$

donde $c_A = A_{i+1}/A_i$ $c_L = L_{i+1}/L_i$ son las relaciones de área y longitud geométricas, supuestas constantes. Por conservación de la masa $Q_{i+1} = Q_i/2$. La constante r queda definida por la relación $r = c_L/2c_A^2$.

En el límite $N \rightarrow \infty$, aproximación válida debido a la gran cantidad de tramos bifurcados, la serie anterior converge si $r < 1$. Dado que existe una caída finita de presión, la condición anterior debe cumplirse, obteniéndose como resultado:

$$\Delta P = \frac{1}{1-r} \frac{8\pi\mu_\infty L_0}{A_0^2} Q_0 \quad (12)$$

Para el flujo de un fluido no-newtoniano, la relación entre la caída de presión y el caudal no es lineal, y generalmente no puede encontrarse una expresión algebraica similar a la ecuación (11). Sin embargo puede calcularse la serie aproximadamente en forma numérica. Para el caso correspondiente al Modelo Constitutivo de Casson, la relación para la caída de presión en función del caudal esta dada en forma implícita por la ecuación siguiente ⁶:

$$Q = \frac{A^2}{8\pi\mu_\infty L} \Delta P f(y) \quad y \geq 1, \text{ donde} \quad f(y) = 1 - \frac{16}{7} \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{4}{3} \frac{1}{y} - \frac{1}{21} \frac{1}{y^4}, \quad y = \frac{\Delta P R}{2 Y L} \quad (13)$$

La expresión (13) puede escribirse de manera más adecuada como:

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{Q_Y} = y f(y) = g(y) \quad \text{con} \quad Q_Y = \frac{A^2 Y}{4\pi\mu_\infty R}. \quad (14)$$

Invirtiéndolo la relación (14) obtendremos la caída de presión en función del caudal; $y = g^{-1}(\tilde{Q}) \equiv G(\tilde{Q})$ o escrito explícitamente;

$$\Delta P = \Delta P_Q \cdot Q_Y \cdot G\left(\frac{Q}{Q_Y}\right) \quad \text{con} \quad \Delta P_Q = \frac{8\pi\mu_\infty L}{A^2}. \quad (15)$$

Sin embargo no es posible obtener G en forma exacta. Por lo cual, la obtención de una forma explícita para ΔP que facilite su evaluación, debe realizarse mediante alguna aproximación. Definimos entonces una aproximación a G como:

$$G(\tilde{Q}) \equiv \tilde{G}(\tilde{Q})$$

Para valores de $y \gg 1$ (lo que implica $\tilde{Q} \gg \tilde{Q}_c$ ya que al aumentar la caída de presión el caudal aumenta), despreciando el último término de la expresión (14), obtenemos;

$$\tilde{G}(\tilde{Q}) = 2 \left[\frac{784 - 1176\tilde{Q} + 441\tilde{Q}^2}{1128 + 882\tilde{Q} - 96\sqrt{441\tilde{Q} - 12}} \right] \quad \text{con} \quad \tilde{Q} \geq \tilde{Q}_c = \frac{24}{441}. \quad (16)$$

Para $y \approx 1$, se aproximó la ecuación (13) por su desarrollo de Taylor al primer orden no constante, obteniéndose para la solución la siguiente forma funcional:

$$\tilde{G}(\tilde{Q}) = \frac{1}{1 - (a\tilde{Q})^{\frac{1}{3}}} \quad \text{con} \quad \tilde{Q} < \tilde{Q}_c = \frac{24}{441}. \quad (17)$$

donde a es un parámetro de ajuste. El valor de a que corresponde a la mejor aproximación de la solución exacta es $a = 1.5$.

La solución correspondiente a la ecuación (16) es válida hasta $Q \leq \tilde{Q}_c Q_Y$ y la expresada en la ecuación (17) para $Q > \tilde{Q}_c Q_Y$. En la Figura 3 se muestra una comparación entre la solución obtenida numéricamente y las soluciones aproximadas.

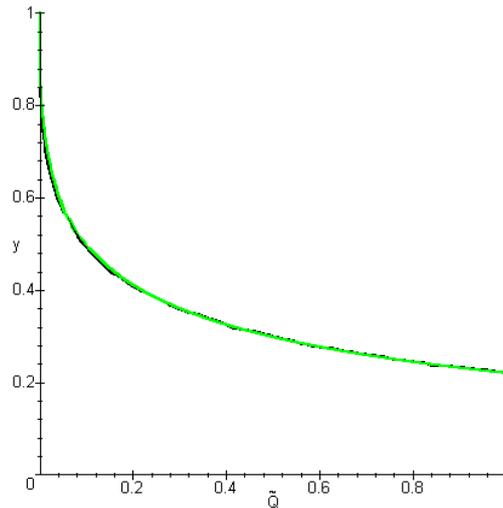


Figura 3: Soluciones exacta (negro) y aproximada (verde) para la relación Caudal – Caída de presión para un Flujo de Casson estacionario en un tubo.

Partiendo entonces de la solución aproximada por alguna función \tilde{G} y sumando el aporte de cada tramo hasta llegar a la zona capilar obtenemos;

$$\Delta P \cong \sum_{k=1}^N \Delta P_k = \frac{8\pi\mu_\infty L_0}{A_0^2} Q_{Y0} \sum_{k=1}^N \left(\frac{c_L}{c_A^{1.5}} \right)^k \tilde{G} \left(\frac{Q_k}{Q_{Yk}} \right) = \frac{8\pi\mu_\infty L_0}{A_0^2} Q_{Y0} \sum_{k=1}^N \left(\frac{c_L}{c_A^{1.5}} \right)^k \tilde{G} \left(\left(\frac{1}{2c_A} \right)^k \frac{Q_0}{Q_{Y0}} \right) \quad (18)$$

Puede mostrarse ⁶ que la expresión (18) converge para los valores aquí utilizados y que en el límite newtoniano $Y \rightarrow 0$ se reduce a la ecuación (12).

Una vez conocida la caída de presión, la fuerza está dada por;

$$\vec{F} = \vec{\sigma} \cdot \hat{n} = \left[-p_{out} \bar{\bar{1}} + \bar{\bar{T}} \right] \cdot \hat{n} = \left[-p_{out} \bar{\bar{1}} + 2\mu_{(\hat{a})} \bar{\bar{D}} \right] \cdot \hat{n} = -p_{out} \hat{n} + 2\mu_{(\hat{a})} \bar{\bar{D}} \cdot \hat{n} \quad (19)$$

donde p_{out} es la presión y \hat{n} es la normal exterior a la sección transversal de la rama en la cual se impone la condición de contorno. Despreciando el término viscoso, obtenemos;

$$\vec{F} = -p_{out} \hat{n}. \quad (20)$$

Para el caso de flujo periódico, se considerarán válidas las ecuaciones (16), (17) y (18) obtenidas anteriormente. En el caso newtoniano, la linealidad de la aproximación de flujo paralelo avala esta extensión. Sin embargo para el caso no-newtoniano, esto sólo es cierto en forma aproximada, debido a la no linealidad de las ecuaciones antes mencionadas.

Existe además un fenómeno dinámico asociado a la flexibilidad de la red capilar, el cual tiende a amortiguar la respuesta de la red (caída de presión en las ramas capilares) a las variaciones del caudal entrante a ella. En el caso de un sistema completamente rígido lleno de un fluido incompresible, las perturbaciones se propagan a velocidad infinita. Sin embargo la flexibilidad de la red capilar, cuyo efecto se ve acrecentado por su longitud, define una velocidad lineal de propagación de perturbaciones. Esta velocidad finita ¹⁰ implica que cuando el caudal aumenta (disminuye) a la salida, la pérdida de carga no aumenta (disminuye) instantáneamente. Dado que el modelo propuesto para calcular la caída de presión en función del caudal es estacionario y de paredes rígidas, la flexibilidad debe considerarse *ad hoc*.

El razonamiento anterior implica que los modos del espectro del pulso cardíaco más afectados por la disminución de amplitud son aquellos que se propagan a mayor velocidad, es decir, los de mayor frecuencia. Podemos modelar globalmente este efecto como un filtro pasa-bajo ¹¹, el cual actúa sobre la señal de caudal en cada rama, dando como resultado la fuerza que realiza la red capilar sobre el sistema. Escrito en forma diferencial, dicho filtro adquiere la siguiente forma matemática:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \frac{\vec{F}(Q) - \vec{F}}{\tau} \quad (21)$$

donde $\vec{F}(Q)$ deviene de reemplazar la expresión (10) en la ecuación (20) con el valor de ΔP calculado con la ecuación (18).

El tiempo característico (inverso a la frecuencia de corte) de dicho filtro puede obtenerse considerando el intervalo temporal que le toma a una perturbación viajar a través de la red capilar (ida y vuelta). De esta manera se inhiben todos aquellos modos más rápidos que

los correspondientes a la velocidad de propagación lineal, lo cual es acorde al razonamiento anteriormente planteado (la velocidad de propagación lineal impone un límite a la propagación de perturbaciones). Para calcular dicho tiempo se debe sumar sobre cada tramo bifurcado, esto es;

$$T = \sum_{k=1}^N T_k = \sum_{k=1}^N \frac{L_k}{c_k} \quad (22)$$

donde L_k es la longitud y c_k la velocidad de propagación de ondas ambas evaluadas para la k -ésima rama. Considerando una aproximación lineal ⁸ la velocidad c_k puede calcularse como;

$$c_k = \sqrt{\frac{E\varepsilon_k}{\rho_f D_k}} \quad (23)$$

Reemplazando la ecuación (23) en la (22) obtenemos;

$$T = \frac{L_0}{\sqrt{\frac{E\varepsilon_0}{\rho_f D_0}}} \sum_{k=1}^N \left(\frac{c_L c_A^{\frac{1}{4}}}{c_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right)^k = \frac{L_0}{c_0} \sum_{k=1}^N \left(\frac{c_L c_A^{\frac{1}{4}}}{c_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right)^k = T_0 \sum_{k=1}^N (r_T)^k \quad (24)$$

En el límite $N \rightarrow \infty$ obtenemos; $T = \frac{T_0}{1 - r_T}$ si $r_T = \frac{c_L c_A^{\frac{1}{4}}}{c_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < 1$,

siendo entonces: $\tau = \frac{2T_0}{1 - r_T}$. (25)

Por lo tanto, a partir de los parámetros de la red capilar $c_L, c_A, c_\varepsilon, E$, de la arteria madre L_0, D_0, ε_0 y del fluido μ_∞, Y, ρ_f , tenemos completamente definidas las condiciones de contorno para cada una de las bifurcaciones de la rama externa de la arteria.

La implementación del filtro representado por la ecuación (21) se llevó a cabo discretizando dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{\vec{F}^{n+1} - \vec{F}^n}{\Delta t} = \frac{\vec{\tilde{F}}_{(Q^n)} - \vec{F}^n}{\tau}$$

donde \vec{F}^l es la fuerza aplicada y Q^l el caudal en el paso temporal l , en alguna de las ramas correspondientes. Despejando \vec{F}^{n+1} obtenemos:

$$\vec{F}^{n+1} = \vec{F}^n + \frac{\Delta t}{\tau} \left[\vec{F}_{(Q^n)} - \vec{F}^n \right] \quad (26)$$

La semilla inicial \vec{F}^0 se tomará de la solución estacionaria correspondiente a $\vec{F} = 0$ en todas las salidas secundarias.

Cabe notar que, en el caso estacionario, este modelo no posee ningún efecto sobre el sistema, ya que el filtro pasa – bajo transmite sin cambios una señal continua. La ecuación (26) refleja este hecho reduciéndose a: $\vec{F}^{n+1} = \vec{F}^n$.

3 RESULTADOS

Con el objetivo de aplicar las herramientas de simulación desarrolladas a un sistema de características reales, se llevó a cabo el análisis de las tensiones cortantes en la geometría de una arteria carótida. La simulación computacional se realizó utilizando una versión generalizada del código PARFEMCO ⁹ que resuelve las ecuaciones de Navier Stokes Generalizadas en dominios 3D por el Método de Elementos Finitos. Los elementos utilizados son del tipo P1-P1 (velocidad-presión) estabilizados mediante un esquema S.U.P.G. para la ecuación de momento y un esquema S.P.G.P. para la ecuación de continuidad ¹². El tratamiento temporal de los diferentes términos que componen el esquema numérico de las ecuaciones de Navier Stokes, se realizó de manera tal de obtener un sistema lineal, atrasando temporalmente parte del término convectivo (término no lineal) ¹². Asimismo, la componente no lineal del término difusivo se evaluará en atraso temporal ¹, con la finalidad de mantener dicha característica lineal. Notar que, el modelo no newtoniano utilizado en adelante en las aplicaciones será el modelo de Casson con Cut-Off ⁵.

3.1 Geometría.

La geometría tratada corresponde a una arteria carótida (en la zona de su bifurcación principal) obtenida a partir de imágenes médicas ³. En la Figura 4 se muestra la grilla no estructurada correspondiente, obtenida mediante el método de Triangulación Delaunay, a partir de la reconstrucción de las imágenes antes mencionadas. Las longitudes características de la geometría son $H = 0.05 \text{ m}$. y $D_0 = 0.01 \text{ m}$.

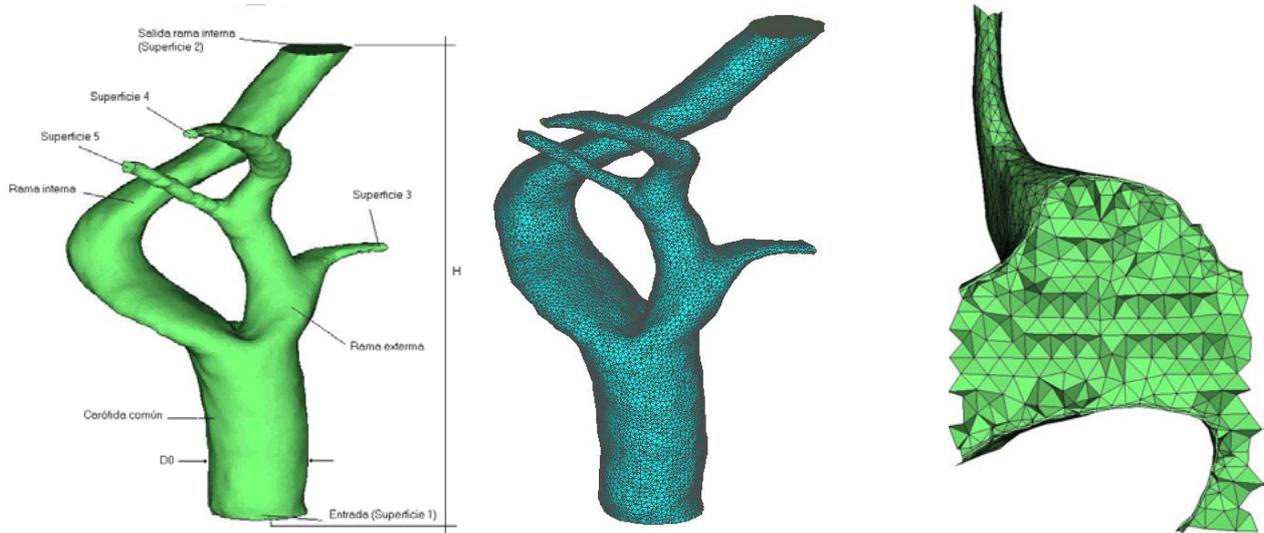


Figura 4: Descripción de la Geometría (Izq.). Grilla 3D correspondiente (Centro.). Corte de la grilla 3D (Der.).

Para el cálculo de las tensiones cortantes y la aplicación de las condiciones de contorno (variables en tiempo y espacio), se realizó la reconstrucción de la grilla bidimensional de superficie (compuesta por triángulos no estructurados) a partir de la grilla tridimensional mostrada, de modo de contar separadamente con cada una de las superficies a las cuales les corresponden diferentes condiciones de contorno. Posteriormente se agregó a la discretización empleada una capa delgada de elementos vecina a la superficie de un espesor $h_{\text{capa}} \approx 0.00015$ m. de modo de mejorar la precisión en el cálculo de las tensiones cortantes (Ver Figura 4). Finalmente se obtuvo una grilla compuesta de 196273 tetraedros de un tamaño típico de 0.00085 m y 40827 nodos.

3.2 Condiciones de Contorno.

Las condiciones de contorno impuestas a este problema serán:

De Velocidad: en la entrada (Superficie 1) y en la salida principal (Superficie 2), utilizando el programa descrito en la sección 2.2.1.

De Fuerza: en las salidas secundarias (Superficies 3, 4 y 5), utilizando el modelo descrito en la sección 2.2.2.

3.3 Parámetros.

La simulación computacional se llevó a cabo con los parámetros del fluido mostrados en la Tabla 1. Los parámetros correspondientes a la red capilar, utilizados en la imposición de las condiciones de contorno en las bifurcaciones de la rama externa, se muestran en la Tabla 2

Tabla 1: Propiedades del fluido circulante.

Densidad del Fluido. [Kg./m ³]	1034.0
Viscosidad Asintótica. [Pa.s]	0.0032
Tensión Umbral. [Pa]	Fluido Newtoniano: 0.0 Fluido No Newtoniano: 0.009

Tabla 2: Propiedades de la Red Capilar.

C _L	0.5
C _A	0.52
C _ε	0.4
E [Pa]	4000.0
L ₀ [m]	0.089
D ₀ [m]	0.0064
ε ₀ [m]	0.00063

Con la finalidad de caracterizar las tensiones cortantes, seleccionaremos como parámetros, siguiendo el trabajo de Taylor¹³, los índices *mWSS* (mean Wall Shear Stress) y *OSI* (Oscillatory Shear Index) detallados a continuación:

$$\tau_{mean(x,y,z)} = \left| \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\tau}_{s(x,y,z)} dt \right| \quad mWSS_{(x,y,z)} = \frac{1}{T} \int_0^T |\bar{\tau}_{s(x,y,z)}| dt \quad OSI_{(x,y,z)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau_{mean(x,y,z)}}{mWSS_{(x,y,z)}} \right)$$

De las definiciones dadas, el índice *mWSS* representa el efecto promedio del esfuerzo cortante sobre el endotelio, en tanto que el índice *OSI* mide los cambios de dirección que sufre dicha variable, promediados en un pulso cardiaco.

A los fines de comparar los resultados obtenidos en los casos no-newtoniano y newtoniano, definiremos:

$$\Delta B_{(x,y,z)} = \frac{B_{No_Newtoniano(x,y,z)} - B_{Newtoniano(x,y,z)}}{B_{No_Newtoniano(x,y,z)} + B_{Newtoniano(x,y,z)}}$$

Dado que las cantidades a comparar son siempre positivas, se cumple:

$$\begin{aligned} B_{No_Newtoniano(x,y,z)} &\gg B_{Newtoniano(x,y,z)} \Rightarrow \Delta B_{(x,y,z)} \rightarrow 1 \\ B_{No_Newtoniano(x,y,z)} &\cong B_{Newtoniano(x,y,z)} \Rightarrow \Delta B_{(x,y,z)} \rightarrow 0 \\ B_{No_Newtoniano(x,y,z)} &\ll B_{Newtoniano(x,y,z)} \Rightarrow \Delta B_{(x,y,z)} \rightarrow -1 \end{aligned}$$

Es importante destacar que la elección de este índice comparativo posee la ventaja, respecto a la diferencia relativa:

$$\delta B_{(x,y,z)} = \frac{B_{No_Newtoniano(x,y,z)} - B_{Newtoniano(x,y,z)}}{B_{No_Newtoniano(x,y,z)}}$$

de mantener acotada la escala entre -1 y 1, dado que, el denominador tiende a cero si y sólo si el numerador también lo hace.

La relación entre ambas es la siguiente:

$$\delta B_{(x,y,z)} = \frac{2 \Delta B_{(x,y,z)}}{1 + \Delta B_{(x,y,z)}}$$

3.4 Flujo Estacionario.

A los fines de iniciar el análisis de la manera más sencilla posible, se realizó un cálculo con un flujo estacionario en la entrada del tronco común. En la Tabla 3 se especifican los valores correspondientes a los caudales impuestos en la entrada de la carótida común y en la salida de la carótida interna. Sobre la base de los valores mostrados en las Tablas 1 y 3, podemos calcular los valores de los parámetros adimensionales correspondientes, mostrados en la Tabla 4.

Tabla 3: Caudales correspondientes a las condiciones de contorno de velocidad impuesta.

Q ₁ : Caudal de Entrada. [m ³ /s]	4.94 x 10 ⁻⁶
Q ₂ : Caudal de Salida Principal. [m ³ /s]	2.06 x 10 ⁻⁶

Tabla 4: Parámetros adimensionales. Régimen Estacionario.

Re _∞	203.0
Ca	Fluido Newtoniano: 0.0 Fluido No Newtoniano: 0.45

El estado estacionario se logró a partir de simular el transitorio hasta alcanzar la invariancia de la solución en el tiempo.

Un análisis comparativo de los campos de velocidades ⁶ muestra que en el caso estacionario no existe una diferencia notable en el campo de velocidades entre los casos newtoniano y no newtoniano. Sólo se ven afectados los flujos secundarios, hecho que toma relevancia en zonas de flujo estanco. Esta semejanza entre los campos de velocidades puede deberse a que el orden de magnitud del número adimensional *Ca* que representa los efectos reológicos no lineales es poco apreciable respecto al término de difusión lineal. Sin embargo, esto no necesariamente implica que los valores obtenidos para la tensión cortante sean similares para los flujos newtonianos y no newtonianos, ya que además de su influencia sobre flujo, el modelo no newtoniano influye directamente en el cálculo de las tensiones cortantes por medio de la viscosidad aparente.

En la Figura 5 se muestra la distribución del índice *mWSS* en la superficie de la geometría tratada, para el caso no newtoniano. En la Figura 6 se presenta la distribución del índice $\Delta mWSS$ (Notar que el índice *OSI* es nulo en todo punto para el caso estacionario).

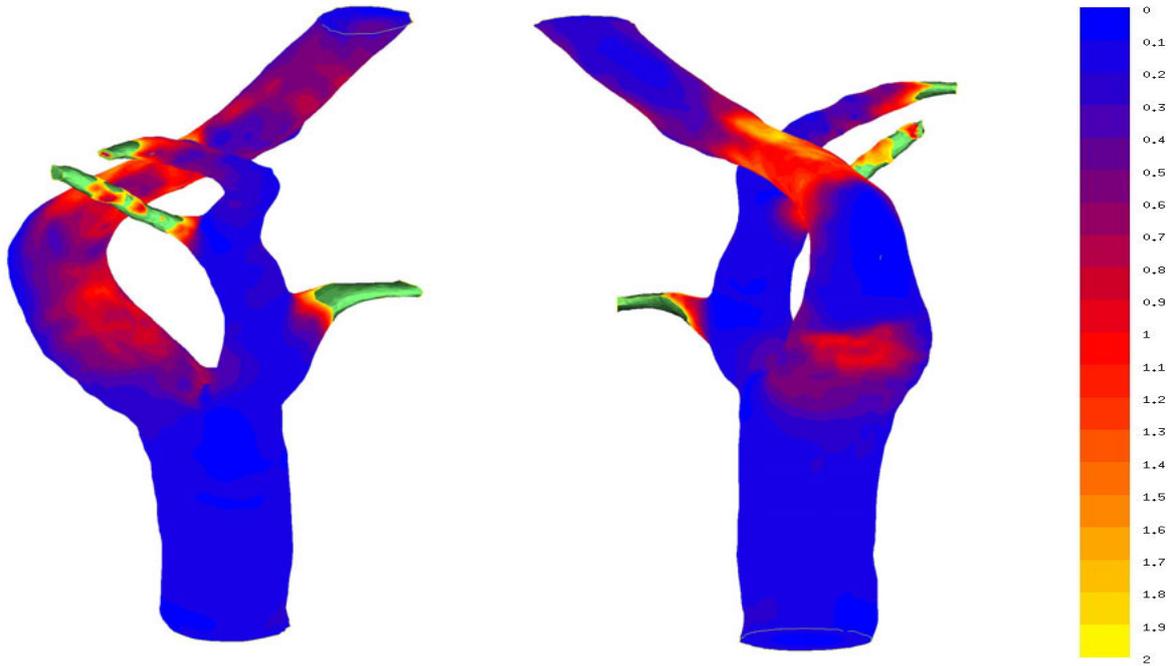


Figura 5: Distribución del $mWSS$ para el caso no newtoniano. Flujo Estacionario. (Zonas en verde: Fuera de escala)

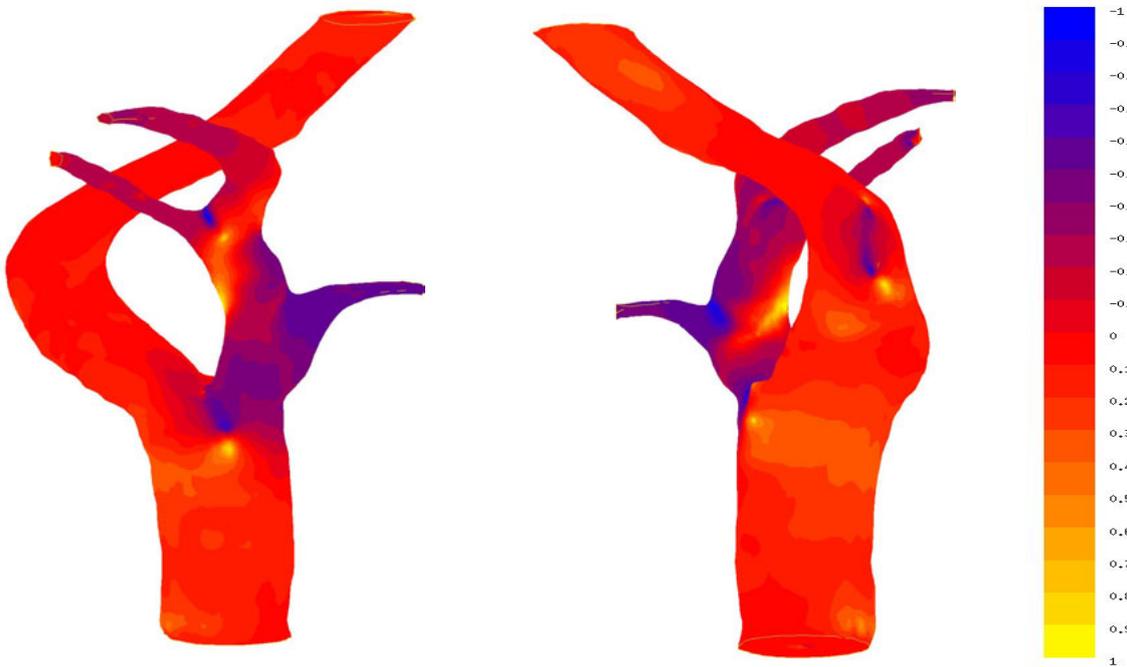


Figura 6: Distribución de $\Delta mWSS$. Flujo Estacionario.

Dado que $mWSS$ es siempre positivo, las zonas donde $\Delta mWSS$ es positivo, el valor obtenido con el modelo no newtoniano es mayor que el obtenido con el modelo newtoniano. Esto ocurre en gran parte del dominio, principalmente en zonas donde hay una dirección

dominante de flujo y puede entenderse comparando la situación con la de un flujo paralelo ⁶, donde las tensiones cortantes son claramente mayores en el caso no newtoniano. Sin embargo, existen ciertas zonas, donde el valor de la tensión cortante “newtoniana” es mayor que el valor obtenido con el modelo no newtoniano. En general, este fenómeno se produce en zonas de bajas tensiones cortantes. Mediante el análisis de los patrones de flujo, pudimos observar que esto es debido a que en las zonas estancas, los flujos secundarios son dominantes y en el caso no newtoniano estos se ven muy disminuidos por el aumento local de la viscosidad.

Puede mostrarse ⁵ que: $|\vec{\tau}_s| = 2\mu_{(\hat{d})} \sqrt{\hat{n} \cdot \bar{\bar{D}}^2 \cdot \hat{n} - (\hat{n} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \hat{n})^2}$ donde \hat{n} la normal a la superficie,

$\bar{\bar{D}} = \frac{\bar{\nabla}\vec{v} + \bar{\nabla}\vec{v}^T}{2}$ es el tensor tasa de deformación y $\hat{d} = \sqrt{\frac{\bar{\bar{D}}:\bar{\bar{D}}}{2}}$ es el segundo invariante de tensor antes mencionado

El $mWSS$ puede expresarse como un producto entre la viscosidad aparente y el gradiente de velocidades, el cuál esta acotado por la tensión umbral (Modelo de Casson) o tiende a cero (Modelo de Casson con Cut-Off) cuando \hat{d} tiende a cero. Por lo tanto, por ser el gradiente de velocidad del flujo newtoniano mayor que el correspondiente al flujo no newtoniano; y dado que el aumento de la viscosidad no alcanza a compensar la disminución de dicho gradiente, entonces las tensiones cortantes en la superficie son menores. Este hecho es relevante al evaluar las zonas de bajas tensiones, sensibles a la deposición de placas, donde el modelo newtoniano da una predicción optimista (tensiones cortantes más altas) que el modelo no newtoniano, en la situación fisiológica de estudio.

3.5 Flujo Pulsante.

Finalmente, tratando de corroborar los fenómenos presentes en el flujo estacionario se presenta la simulación con flujo pulsante en la entrada, más fiel al caso real. En la Figura 1 se observa el pulso de presión utilizado como dato del programa de cálculo de flujo paralelo. El período correspondiente es 0.81 seg. En la Figura 7 se muestra la variación temporal del caudal en cada una de las ramas de salida correspondientes a la arteria.

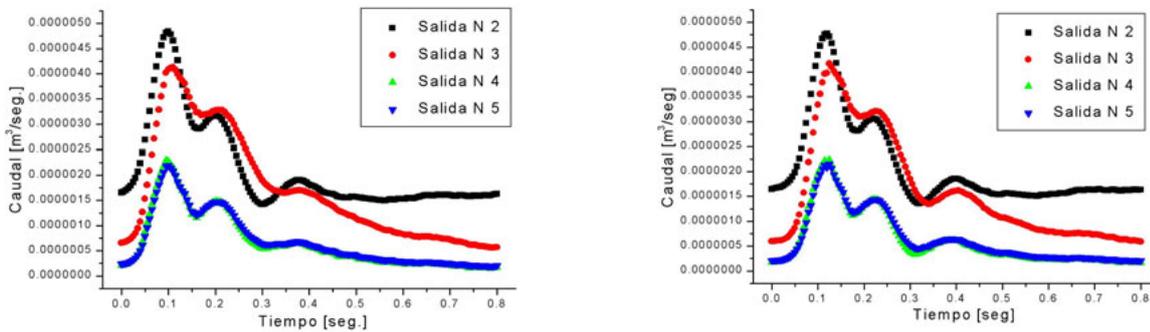


Figura 7: Caudal en las salidas de la rama externa. Izquierdo: Newtoniano. Derecha: No Newtoniano.

El promedio temporal del caudal impuesto en las secciones de entrada y salida de la rama interna (salida principal) es igual al valor correspondiente al caudal en el caso

estacionario (Tabla 3). A partir de los valores presentados en la Tabla 1 y en la Figura 7 podemos calcular los parámetros adimensionales que caracterizan el problema; los cuales se basan en los datos correspondientes a los valores máximo y mínimo del caudal en la rama de entrada (suma de los caudales en las salidas). En la Tabla 5 se muestran los valores calculados.

Tabla 5: Parámetros adimensionales. Régimen Pulsátil.

$Re_{\infty Min}$	97.0
$Re_{\infty Max}$	523.0
Ca_{Min}	Fluido Newtoniano: 0.0 / Fluido No Newtoniano: 0.17
Ca_{Max}	Fluido Newtoniano: 0.0 / Fluido No Newtoniano: 0.92

El estado puramente pulsante se logró simulando 5 períodos cardíacos a partir de la solución estacionaria correspondiente a cada caso, tiempo para el cual las diferencias entre dos soluciones separadas temporalmente por un período se hicieron despreciables.

En la Tabla 6 se encuentra una comparación porcentual entre los promedios temporales de caudal en las salidas de la rama externa (respecto al caudal de entrada). Se muestran los resultados obtenidos para los casos newtoniano y no newtoniano tanto en régimen estacionario como pulsátil. Es importante notar la gran variación en el caudal medio en cada rama entre los regímenes estacionario y pulsante que se presenta en el flujo newtoniano. Esto se debe a las notorias recirculaciones e inversiones de flujo presentes, las cuales no se producen en el flujo no newtoniano.

Tabla 6: Comparación porcentual entre los promedios temporales de caudal en las ramas de salida.

Régimen	Fluido	Q_{2mean}	Q_{3mean}	Q_{4mean}	Q_{5mean}
Estacionario	Newtoniano	42.0%	40.8%	8.3%	8.9%
Pulsante	Newtoniano	42.0%	33.2%	12.1%	12.7%
Estacionario	No Newtoniano	42.0%	33.2%	12.2%	12.6%
Pulsante	No Newtoniano	42.0%	32.5%	12.5%	13.0 %

No se observan diferencias notables entre los campos de velocidades correspondientes a los flujos newtoniano y no newtoniano ⁶, salvo algunas diferencias en los flujos secundarios en las zonas de bifurcación y en la curvatura de la rama principal. En estas zonas los vórtices generados por los cambios de sección y las desaceleraciones del flujo durante la diástole son menos notorios en el flujo no newtoniano.

En la Figuras 8 y 9 se muestran respectivamente la distribución del índice $mWSS$ para el flujo no newtoniano y de la diferencia relativa $\Delta mWSS$.

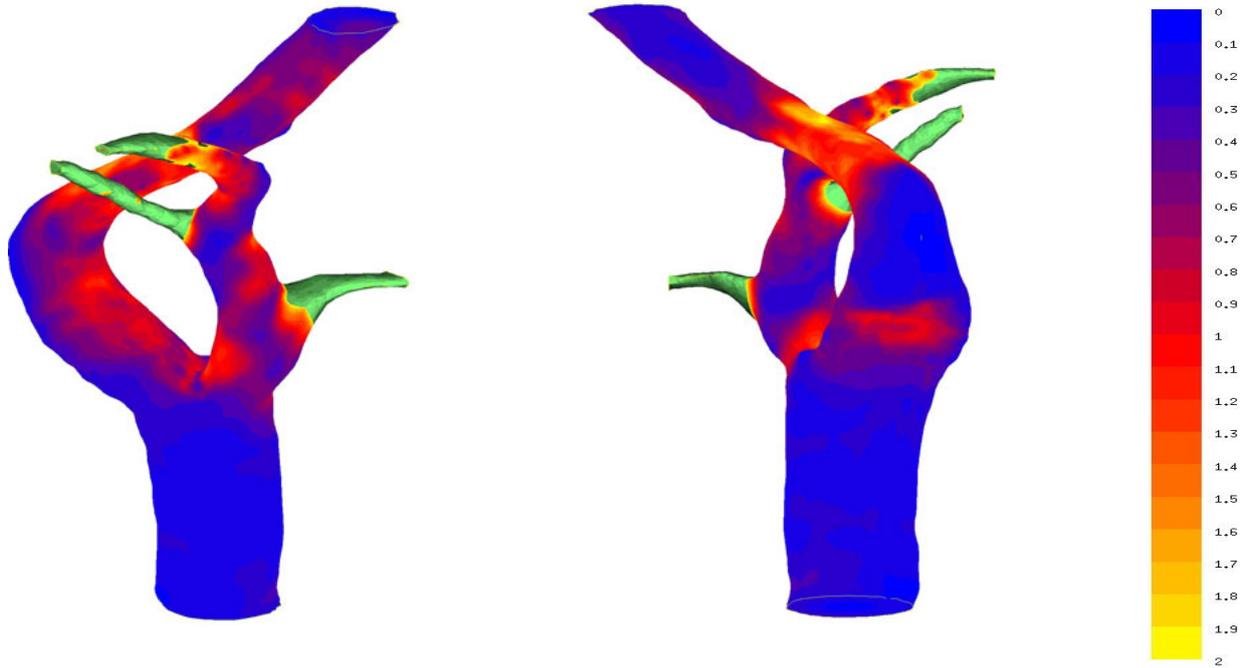


Figura 8: Distribución del $mWSS$ para el caso no newtoniano. Flujo Pulsante. (Zonas en verde: Fuera de escala)

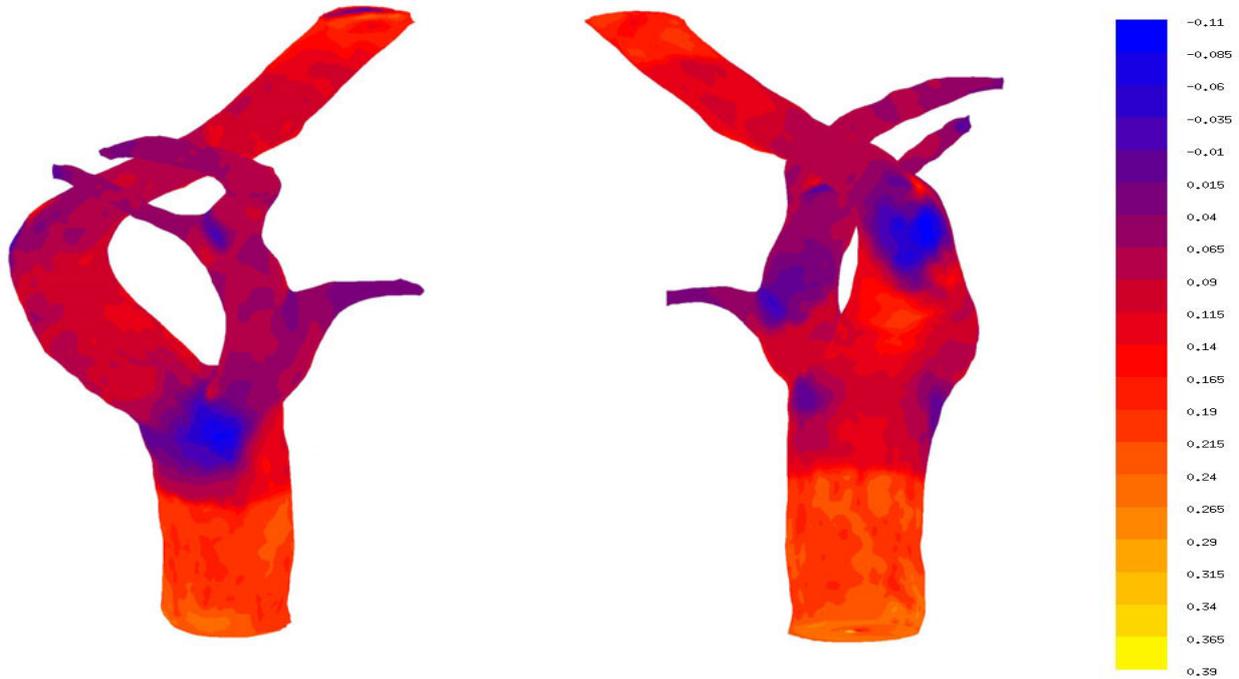


Figura 9: Distribución de $\Delta mWSS$. Flujo Pulsante.

Las diferencias entre los valores de $mWSS$ obtenidas con ambos modelos constitutivos son en promedio de un -25% (tensiones newtonianas un 25% mayores en zonas de bajos esfuerzos cortantes) y 30% (tensiones no newtonianas un 30% mayores en zonas de altos

esfuerzos cortantes), pudiendo trepar en ciertas zonas localizadas y de relativo interés a valores de entre -60% y 70%.

Puede observarse que las Figuras 8 y 9 muestran características similares a las correspondientes a flujo estacionario, sin embargo se incrementan las zonas (de color azul en la Figura 9) donde $mWSS$ newtoniano es mayor que su contraparte no newtoniano. Sin duda este incremento se debe al efecto del flujo pulsante, el cual genera un aumento de zonas de recirculación y de flujo estanco (en un sentido medio).

En la Figuras 10 y 11 se muestran respectivamente la distribución del índice OSI para los flujos no newtoniano y newtoniano. En este caso no mostramos el valor de ΔOSI dado que, el índice OSI es por su definición una variable relativa.

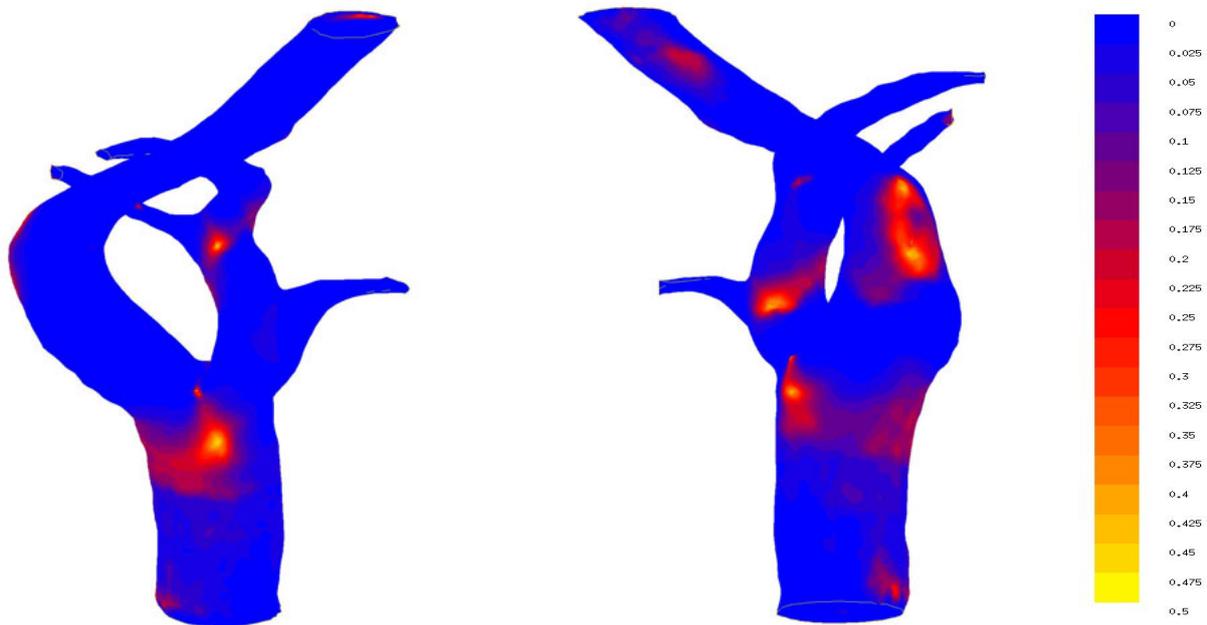


Figura 10: Distribución del OSI para el caso no newtoniano Flujo Pulsante.

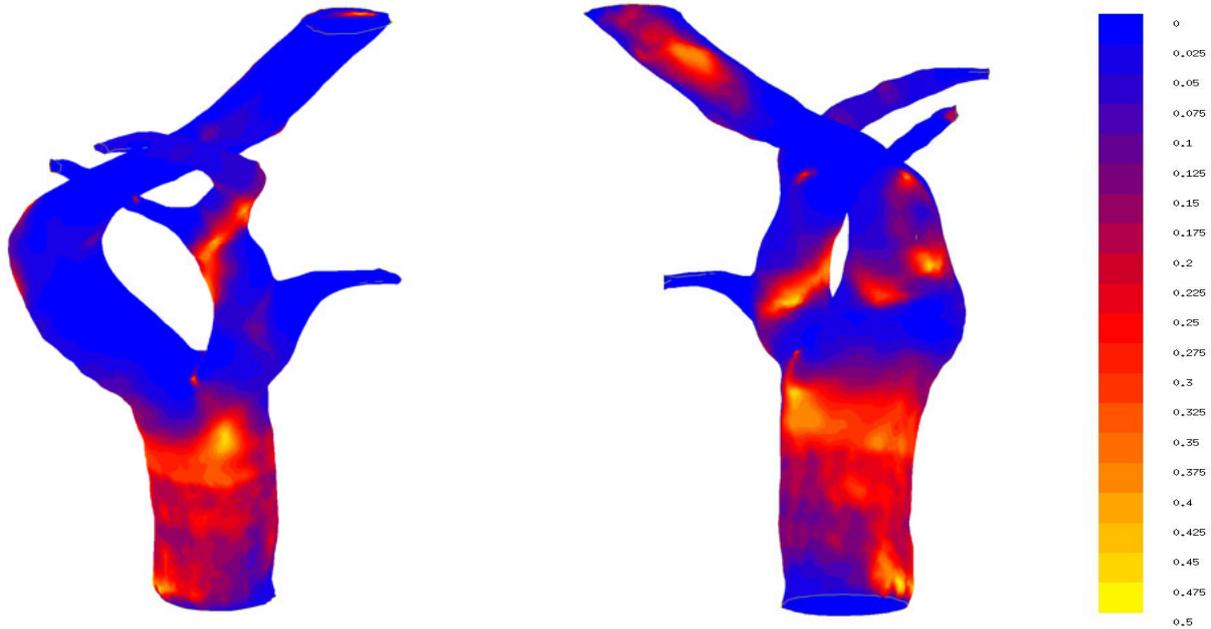


Figura 11: Distribución del *OSI* para el caso newtoniano Flujo Pulsante.

Podemos notar de las figuras anteriores que la distribución de altos valores de *OSI* es más localizada en el caso no newtoniano, lo cual se debe a la disminución de las zonas de flujo secundario donde el campo de velocidades oscila debido a las aceleraciones y desaceleraciones del pulso cardíaco; disminución causada por la mayor viscosidad del flujo no newtoniano.

4 CONCLUSIONES

Para los valores típicos de la sangre en adultos sanos, un análisis comparativo de los campos de velocidades ⁶ muestra que en el caso estacionario no se observan diferencias notables en el campo de velocidades entre los casos newtoniano y no newtoniano, en la geometría carotídea aquí analizada. Sólo se ven afectados los flujos secundarios, hecho que toma relevancia en zonas de flujo estanco. Esto puede deberse a que el orden de magnitud del número adimensional *Ca* que representa los efectos viscosos no lineales es poco apreciable respecto al término de difusión lineal.

El valor de *mWSS* obtenido con el modelo no newtoniano es mayor que el obtenido con el modelo newtoniano. Esto ocurre en gran parte del dominio, principalmente en zonas donde hay una dirección dominante de flujo, y puede entenderse comparando la situación con la de un flujo paralelo, donde las tensiones cortantes son claramente mayores en el caso no newtoniano. Sin embargo, existen ciertas zonas donde el valor de la tensión cortante “newtoniana” es mayor que el valor obtenido con el modelo no newtoniano. En general, este fenómeno se produce en zonas de bajas tensiones cortantes. Por lo tanto, siendo el gradiente de velocidad del flujo newtoniano mayor que el correspondiente al flujo no newtoniano; y dado que el aumento de la viscosidad no alcanza a compensar la disminución de dicho gradiente, entonces las tensiones cortantes en la superficie son menores. Este hecho es

relevante al evaluar las zonas de bajas tensiones, sensibles a la deposición de placas, donde el modelo newtoniano da una predicción optimista (tensiones cortantes más altas) que el modelo no newtoniano.

En flujo pulsante no se observan diferencias notables entre los campos de velocidades correspondientes a los flujos newtoniano y no newtoniano, salvo algunas diferencias en los flujos secundarios en las zonas de bifurcación y en la curvatura de la rama principal. En estas zonas los vórtices generados por los cambios de sección y las desaceleraciones del flujo durante la diástole son menos notorios en el flujo no newtoniano.

Existe una cierta variación en el caudal medio en cada rama en un flujo newtoniano, entre los regímenes estacionario y pulsante. Esto se debe, a diferencia de lo que sucede para un flujo no newtoniano, a las notorias recirculaciones e inversiones de flujo presentes.

Las diferencias entre los valores de $mWSS$ obtenidas con ambos modelos constitutivos son en promedio de un -25% (tensiones newtonianas un 25% mayores en zonas de bajos esfuerzos cortantes) y 30% (tensiones no newtonianas un 30% mayores en zonas de altos esfuerzos cortantes), pudiendo variar en ciertas zonas localizadas y de relativo interés a valores de entre -60% y 70%. La distribución espacial de las tensiones cortantes muestra características similares a las correspondientes a flujo estacionario, sin embargo se incrementan las zonas donde $mWSS$ newtoniano es mayor que su contraparte no newtoniano. Sin duda este incremento se debe al efecto de la pulsatilidad, el cual genera un aumento de zonas de recirculación y de flujo estanco (en un sentido medio).

La distribución de altos valores de OSI es más localizada en el caso no newtoniano, lo cual se debe a la disminución de las zonas de flujo secundario donde el campo de velocidad oscila debido a las aceleraciones y desaceleraciones del pulso cardíaco; disminución causada por la mayor viscosidad del flujo no newtoniano.

Concluimos que los modelos Newtonianos Generalizados presentan en flujo laminar ciertas ventajas que, sumadas a un modelado constitutivo más preciso del comportamiento de la sangre, los hace atractivos para su utilización en simulaciones computacionales del flujo sanguíneo. Todo esto, sumado a la simplicidad de implementación a partir de un código de cálculo para fluidos newtonianos, justifica su utilización.

5 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, a través del proyecto PICT 12-06337.

6 REFERENCIAS

- [1] F. Basombrío, E. Dari, G. Buscaglia, R. Feijóo. Numerical Experiments in Complex Hemodynamics Flows. Non-Newtonian Effects. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2002. Vol. 16 (4), p. 231-246.
- [2] Raúl A. Feijóo, Marcelo Javier Vénere, Enzo A. Dari, y Luiz Bevilacqua. Hemodinámica del sistema cardiovascular humano y su simulación computacional. Centro de modelos Complejos. 1999.

- [3] Peter F. Davies et al. Spatial relationships in early signaling events of flow mediate endothelial mechanotransduction. *Annu. Rev. Physiol.* 1997. 59:527–49.
- [4] J. Cebral, R. Lohner, J. Burgess. Computer simulation of cerebral artery clipping: Relevance to aneurysm neuro-surgery planning. ECCOMAS 2000.
- [5] J. Leiva, F. Bonetto, F. Basombrío. Influencia del comportamiento no newtoniano de la sangre en las tensiones cortantes sangre endotelio en un dispositivo de circulación extracorpórea. Proceedings ENIEF 2004.
- [6] J. Leiva. Análisis Computacional de los Efectos No Newtonianos de la Sangre sobre la Pared Arterial. Trabajo especial de la carrera de Ing. Nuclear. Instituto Balseiro. 2003.
- [7] S. Felicelli, G. Buscaglia. GPFEP: Un sistema de generación de programas de elementos finitos, 1994. Publicación Interna.
- [8] M. Kaaramanoglu. <http://hemodynamics.ucdavis.edu/mustafa/Pulse.htm>.
- [9] M. Cantero. Simulación de flujos turbulentos, obstruidos y térmicamente acoplados por el método de elementos finitos. Trabajo especial de la carrera de Ing. Nuclear. Instituto Balseiro. 2000.
- [10] F. Basombrío, S. Urquiza. Propagación no lineal de ondas en el sistema cardiovascular. Ondas de choque (En preparación).
- [11] R. Armentano, H. Baglivo, E. Cabrera Fischer, R. Sanchez. Hipertensión Arterial Límitrofe. Centro Editor de la Fundación Favaloro. 1994. Pag. 69.
- [12] R. Codina. A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. And Eng.* Volume 190, Issues 20-21, 2001, p. 2681-2706.
- [13] C.A. Taylor, (2000) Finite Element Modeling of Blood Flow: Relevance to Atherosclerosis. To appear in *Computational Fluid-Structure Interaction in the Cardiovascular System* edited by P. Verdonck and K. Perktold.