

UN PRECONDICIONADOR DE LA MATRIZ DE MASA PARA EVITAR LA MALA POSTURA DEL MODELO DE DOS FLUIDOS

Angel L. Zanotti, Carlos G. Méndez, Norberto M. Nigro y Mario Storti

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)
INTEC-Universidad Nacional del Litoral-CONICET
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
e-mail: mstorti@intec.unl.edu.ar, web page: <http://venus.arcrice.edu.ar/CIMEC>

Palabras Claves: Flujo Multifásico, Modelo de dos Fluidos, Problemas mal puestos.

Resumen. *El modelo multifluido es uno de los principales modelos empleados en la simulación de fenómenos de transporte en sistemas multifásicos dispersos. La aproximación multifluido está basada sobre la hipótesis de un continuo interpenetrado, donde las ecuaciones de conservación de masa y momento son aplicadas a cada fase como un continuo separado. Las interacciones entre fases son incluidas vía leyes constitutivas. Aunque este punto de vista físico ha sido ampliamente aceptado, desde la óptica matemática estamos en presencia de un problema mal puesto que se caracteriza por ser inherentemente no-hiperbólico y no-conservativo. La mayoría de los métodos numéricos aplicados para la solución de este modelo matemático son diseñados como una extensión de aquellos usados para resolver ecuaciones de transporte, siendo estas últimas en general hiperbólicas y conservativas. Definitivamente no es un buen punto de comienzo al menos atendiendo a las reglas básicas del modelado matemático, consecuentemente la implementación numérica puede no ser lo suficientemente robusta.*

La meta de este paper es introducir una simple y novedosa estrategia matemática, basada en el preconditionamiento de la matriz de masa que evita los inconvenientes causados por el comportamiento no-hiperbólico del modelo original.

Dado que este tipo de solución modifica la evolución temporal del sistema, puede ser cuestionada en términos de su falta de capacidad para resolver problemas no estacionarios. Sin embargo esta estrategia puede ser diseñada de forma tal de que no altere la velocidad de propagación de las ondas y consecuentemente es de esperar que no se modifique la evolución temporal del sistema.

1 INTRODUCCION

Se entiende como flujo multifase a todo flujo en el cual se encuentran presentes más de un fluido, donde las fases son asumidas mezcladas sobre escalas de longitud mayores que las escalas de longitud molecular. Ejemplos son burbujas de gas ascendiendo en un líquido, gotas de agua cayendo en el aire, flujos de vapor de agua en una caldera, flujos de agua, gas y petróleo en un pozo petrolero.

Los flujos multifase son encontrados en una gran cantidad de aplicaciones industriales tales como reactores químicos, evaporadores, combustores, fabricación de acero y equipamiento de centrales nucleares. También están presentes en fenómenos naturales (nubes, formación de dunas de arena, etc). De los anteriores ejemplos nosotros vemos que el término *fase* es aplicado en un sentido más amplio que su frecuente uso en termodinámica. Por *fase termodinámica* nosotros nos referimos a la distinción familiar entre los cuatro estados de la materia, sólido, líquido, gas y eventualmente plasma. Las *fases* de un flujo multifásico pueden ser de muy diferentes especies químicas. Los flujos multifásicos no deberían ser confundidos por flujos multicomponente, estos últimos se caracterizan por estar mezclados a nivel molecular, siendo los campos de velocidades y temperatura comunes. En los flujos multifase, las especies son mezcladas para escalas de longitud más grande que las escalas de longitud molecular.

En el presente trabajo es considerado solamente la mezcla de dos fases, una líquida (fase continua) y una gaseosa (fase dispersa).

Ishii¹ clasifica a los *flujos bifásicos* en diferentes formas, una de ellas se centra en las posibles mezclas de fases termodinámicas en el flujo. En esta clasificación podemos distinguir cuatro grupos, flujos de mezclas de *gas-sólido*, *gas-líquido*, *líquido-sólido* y la mezcla de *dos líquidos inmiscibles*. Ishii hace también otra clasificación en su trabajo, que se basa en la estructura de la interfase y la distribución topológica de cada fase en el flujo. Los flujos bifásicos son por lo tanto clasificados de acuerdo a la geometría de la interfase en tres clases; *flujos separados*, *flujos de transición o de mezcla* y *flujos dispersos*. Note que cada una de estas clases tiene subclases definidas por el régimen típico del flujo. Esta clasificación no es la única existiendo otras clasificaciones para flujos bifásicos².

Cuando modelamos un flujo bifásico, es necesario conocer qué fenómenos, efectos y estructuras del flujo son importantes. La estructura del flujo es comúnmente un factor importante. Como mencionamos antes, hay tres clases de estructuras para flujos bifásicos. La estructura del flujo difiere significativamente entre estas clases. Sin embargo la mezcla o flujo de transición es una combinación de las otras dos clases. El modelado de flujos separados y dispersos difiere considerablemente. En algunos casos la estructura exacta o posición no es de importancia, solamente alguna cantidad promediada es necesaria para el análisis del flujo.

Los modelos para flujos bifásicos pueden ser categorizados en dos grandes grupos. En el primer grupo, hay modelos que siguen la interfase entre las dos fases. Estos modelos son ideales para flujos separados. En un segundo grupo, existen modelos donde la posición de la interfase no es seguida específicamente. Flujos dispersos son usualmente modelados usando modelos de este segundo grupo. Idealmente a uno podría interesarle seguir la interfase entre fase para todo tiempo, ya sea para el flujo separado o para el disperso; similar a resolver todas

las escalas relevantes en un flujo turbulento monofluido (DNS). Esto es frecuentemente costoso desde el punto de vista computacional y algunas veces redundante.

Para *flujos bifásicos separados*, donde la estructura entre fases no es muy compleja, es posible usar un modelo que se basa en resolver las ecuaciones para un flujo monofásico las que tienen como condición de contorno a la propia interfase que se encuentra en movimiento. Sin embargo muchos flujos están demasiado mezclados por lo que este último método no es posible emplearlo. Para simular flujos bifásicos separados, métodos de seguimiento de la interfase son usados, donde esta última es representada por un esquema de refinamiento adaptativo expresado por una formulación Lagrangiana o Euleriana. Estos métodos son base del bien conocido método de *front-tracking*³. Tales métodos tienen la ventaja de ser fáciles de implementar y las fuerzas de interfase pueden ser calculadas precisamente, pero ellos son computacionalmente costosos.

Cuando la complejidad de la interfase entre fases en *flujos dispersos* es demasiada elevada para los métodos de seguimiento de la interfase, otro tipo de estrategia es necesaria para simular este tipo de flujos. A continuación dos genéricas aproximaciones pueden ser usadas para modelar flujos dispersos: la aproximación Lagrangiana y la aproximación Euleriana. Para flujos de partículas es posible construir métodos basados en los primeros esquemas de marcado de celdas (Marker and Cell- MAC)⁴ empleados para flujos separados. La idea general es seguir cada partícula del flujo cuando es transportada en la fase continua, aquí las partículas podrían representar una fase. Esta aproximación es referida como una *formulación Lagrangiana-Euleriana*, donde la fase continua es calculada en un esquema de referencia Euleriano. Hay diferentes estrategias para implementar esta idea⁵⁻⁷. Entre estas hay tres diferentes estrategias para el acoplamiento entre fases⁸. En la primer forma de acoplamiento, la única influencia sobre la partícula es debida al flujo circundante a la misma. En la segunda forma de acoplamiento, el fluido es también influenciado por la partícula y en el tercer tipo de acoplamiento la partícula es influenciada por cada una de las otras.

Una diferente forma de modelado de flujos dispersos es tratar a ambas fases como un continuo. Esta aproximación es generalmente referida como *formulación Euleriana-Euleriana o modelo de dos fluidos*, primeramente discutido por Ishii¹. En este modelo cada fase posee su propio conjunto de ecuaciones de balance, donde la interacción entre las fases es realizada vía términos de transferencia entre fases que surgen a partir de las relaciones constitutivas. Por lo tanto en cada punto del dominio están presentes cada una de las fases con una fracción de volumen asociada.

En el presente trabajo el *modelo de dos fluidos* es empleado para simular un flujo bifásico disperso. En las próximas secciones un profundo análisis matemático de este modelo es presentado.

Es bien conocido por la comunidad científica⁹ que en un sentido matemático el modelo de dos fluidos está *mal puesto*, dado que la hiperbolicidad puede no estar garantizada para todos los parámetros del flujo. El modelo es cuestionable por su formulación *no conservativa* la que en conjunto con las *no linealidades* propias del modelo, lo hacen ver como un problema complejo en el sentido matemático.

Las soluciones numéricas de problemas de dos fluidos mal puestos evidencian dos efectos, una excesiva difusión numérica y/o la presencia de inestabilidades. Tales situaciones

son comunes para problemas de valores iniciales mal puestos; por ejemplo ver Joseph y Saut¹⁰. Por lo tanto el éxito de cualquier método numérico para hacer frente a modelos de dos fluidos depende del requerimiento de que tales sistemas estén bien puestos.

El presente trabajo tiene por finalidad proponer un método de preconditionamiento de la matriz de masa que permita hacer al modelo de dos fluidos hiperbólico.

Comenzamos por presentar el modelo diferencial de dos fluidos para un problema unidimensional en su formulación de una presión, o sea se asume que los dos fluidos están en equilibrio de presión, esto es, $p_l = p_g = p$. Desarrollamos luego el análisis de los valores característicos para el problema en particular, con la finalidad de proponer la matriz de preconditionamiento. En esta matriz intervienen dos parámetros, uno β que permite recuperar la hiperbolicidad del problema, y otro γ que nos permite controlar la velocidad de propagación de la perturbación en el medio. Por último se resuelve una serie de problemas numéricos con la finalidad de corroborar que el método de preconditionamiento no afecta a la dinámica del sistema.

2 MODELO DE DOS FLUIDOS

La compleja naturaleza de los flujos multifase, caracterizada por cambios en la configuración geométrica de las fases en diferentes patrones de flujo, hace que sea extremadamente difícil encontrar modelos que reproduzcan la física del sistema y al mismo tiempo no presenten un elevado costo computacional. Modelos matemáticos promediados (ver por ejemplo Ishii¹, Drew and Passman⁹, Zhang and Prosperetti¹¹) asociados con correlaciones experimentales parecen ser la salida más plausible hasta el momento.

Por lo tanto los modelos multicampo son centrales para modelar y simular los procesos de transporte en sistemas multifásicos. La aproximación se basa en tratar a cada fase en particular como un continuo interpenetrado presente en cada punto del dominio con una fracción de volumen asociada, en el cual las leyes de conservación son aplicadas a cada fase como un continuo separado (campo). En esta aproximación leyes constitutivas son provistas para representar las interacciones entre campos. En la Fig. 1 podemos observar una representación esquemática del modelo de dos fluidos.

En esta sección nosotros comenzamos por presentar las *ecuaciones de movimiento promediadas para un flujo bifásico* (ver Ishii¹, Lahey¹²), las cuales han sido obtenidas como resultado de un promediado temporal y/o espacial de las ecuaciones de balance local instantáneas.

El modelo unidimensional de dos fluidos es considerado aquí como un caso especial, donde el flujo se supone isotérmico y fuera de cualquier cambio de fase. Las ecuaciones de gobierno para el flujo bifásico unidimensional son desarrolladas a continuación.

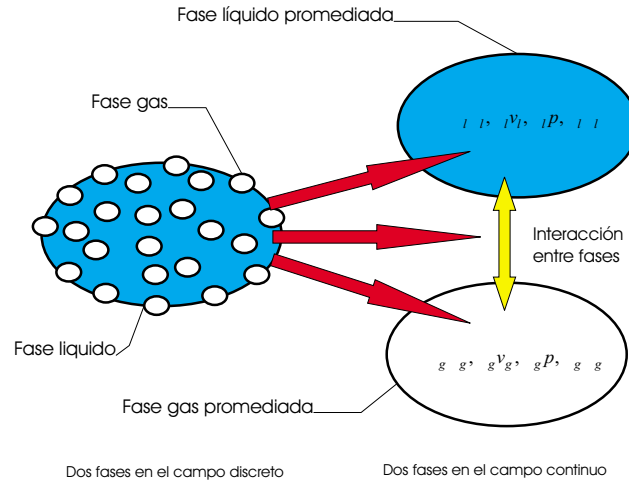


Figura 1: Representación esquemática del modelo de dos fluidos.

2.1 Ecuaciones de Masa y Cantidad de Movimiento

Las ecuaciones de balance de masa y cantidad de movimiento para un flujo bifásico unidimensional pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g v_g)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l v_l)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g v_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g v_g^2)}{\partial x} = -\alpha_g \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_g \rho_g g - F_{wg} - F_l, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l v_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l v_l^2)}{\partial x} = -\alpha_l \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_l \rho_l g - F_{wl} + F_l, \quad (4)$$

donde α , ρ y v son los promedios de la fracción de vacío, densidad, y velocidad respectivamente. Los subíndices g y l representan la fase gaseosa y líquida.

En las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento, F_{wk} siendo $k = (l, g)$ representa la fuerza ejercida por la pared sobre el fluido debida a efectos viscosos, la que en un flujo unidimensional puede ser modelada a partir de un modelo de D'Arcy. En el presente trabajo la misma no es incluida en el análisis de dispersión.

Teniendo en cuenta la restricción algebraica sobre la fracción de volumen $\alpha_g + \alpha_l = 1$, el sistema es reagrupado en término de α_g , p , v_g y v_l . Para tal fin desarrollamos las ecuaciones anteriores en la siguiente forma:

Ecuaciones de continuidad

$$\rho_g \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \rho_g v_g \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \alpha_g \rho_g \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$-\rho_l \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} - \rho_l v_l \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + (1 - \alpha_g) \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Ecuaciones de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} & \rho_g v_g \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \alpha_g \rho_g \frac{\partial v_g}{\partial t} + \rho_g v_g^2 \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \\ & + 2\alpha_g \rho_g v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + \alpha_g \frac{\partial p}{\partial x} - \alpha_g \rho_g g + F_{wg} + F_l = 0 \end{aligned}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & -\rho_l v_l \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + (1 - \alpha_g) \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial t} - \rho_l v_l^2 \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \\ & + 2(1 - \alpha_g) \rho_l v_l \frac{\partial v_l}{\partial x} + (1 - \alpha_g) \frac{\partial p}{\partial x} - (1 - \alpha_g) \rho_l g + F_{wg} - F_l = 0 \end{aligned}. \quad (8)$$

Fuerza de Drag

Para la transferencia de cantidad de movimiento entre fases nos basamos en un modelo simple de D'Arcy y su estructura coincide con la propuesta por Ishii y Zuber¹³ para flujos dispersos

$$F_l = \frac{3}{8} C_d \rho_l (v_g - v_l) |v_g - v_l| \frac{\alpha_g}{r_b} = 0, \quad (9)$$

donde r_b es el radio de las burbujas las cuales se las asume como esferas rígidas, y C_d es el coeficiente de drag. Para el mismo existen correlaciones en función del número de Reynolds de burbuja.

Definiendo como vector de variables dependientes a $\Phi = (\alpha, p, v_g, v_l)$, el sistema de ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento puede ser escrito en forma vectorial compacta como

$$\mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{C} = 0, \quad (10)$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho_g & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_l & 0 & 0 & 0 \\ \rho_g v_g & 0 & \alpha_g \rho_g & 0 \\ -\rho_l v_l & 0 & 0 & (1-\alpha_g)\rho_l \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \rho_g v_g & 0 & \alpha_g \rho_g & 0 \\ -\rho_l v_l & 0 & 0 & (1-\alpha_g)\rho_l \\ \rho_g v_g^2 & \alpha_g & 2\alpha_g \rho_g v_g & 0 \\ -\rho_l v_l^2 & (1-\alpha_g) & 0 & 2(1-\alpha_g)\rho_l v_l \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_g \rho_g g + F_{wg} + F_l \\ -(1-\alpha_g)\rho_l g + F_{wl} - F_l \end{pmatrix}. \quad (13)$$

3 PRECONDICIONAMIENTO DE LA MATRIZ DE MASA

El proceso de regularización del modelo de dos fluidos es un tema de continuo interés para la comunidad científica desde que se descubrió que el modelo invíscido de dos fluidos para la resolución de un flujo bifásico transiente tiene raíces características complejas y por lo tanto esta mal puesto como un problema de valores iniciales, excepto para el caso trivial de igual velocidades de fase.

En esta sección nosotros proponemos un método sencillo que permite hiperbolizar el modelo de dos fluidos para gran parte de los parámetros posibles del flujo. Este método se basa en una matriz que afecta a la matriz temporal \mathbf{A} del sistema presentado anteriormente. La matriz de preconditionamiento \mathbf{M} posee dos parámetros, uno de ellos β el cual solamente afecta a la inercia de la ecuación de masa, y permite hiperbolizar el modelo, mientras que el otro γ afecta a cada uno de los términos temporales de las ecuaciones de balance, siendo su finalidad corregir la velocidad de propagación de las ondas.

Para el desarrollo del método, nosotros nos basamos en el *modelo más simple* propuesto por Drew⁹, que no considera los efectos viscosos, asumiendo que la presión para las respectivas fases p_k ; $k = (l, g)$, son ambas iguales. En este modelo F_l es dada como una combinación algebraica de los campos promediados, no conteniendo este término derivadas de dichos campos. En este modelo las características están dadas por

$$\lambda = \left\{ \infty, \infty, \frac{1}{d}(r \pm s^{1/2}) \right\}, \quad (14)$$

donde

$$\begin{aligned}
 r &= (1 - \alpha_g) \rho_l v_l + (1 - \alpha)^2 \rho_g v_g, \\
 s &= -\alpha_g (1 - \alpha_g)^2 \rho_l^2 (v_g - v_l)^2, \\
 d &= (1 - \alpha_g)^2 \rho_g + \alpha_g (1 - \alpha_g) \rho_l.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Bien podemos observar que tenemos dos características complejas conjugadas, donde el único caso que no existe componente imaginaria es para cuando $v_g = v_l$.

3.1 Análisis de las características. Determinación del parámetro β

Un aspecto del requerimiento de estabilidad puede ser examinado conociendo las características de las ecuaciones de gobierno. El análisis de las características nos brinda información acerca del comportamiento dinámico del modelo diferencial, ante pequeñas perturbaciones y para una longitud de onda tendiendo a cero. El efecto de los términos algebraicos que surgen de las relaciones constitutivas no afecta el análisis de las características del problema.

El carácter dinámico lineal local de la Ec. (10) puede ser examinado a través de la linealización del sistema alrededor de un estado inicial Φ_0 . La ecuación diferencial lineal para una perturbación, $\delta\Phi = \Phi - \Phi_0$ es escrita como

$$\mathbf{A}_0 \frac{\partial \delta\Phi}{\partial t} + \mathbf{B}_0 \frac{\partial \delta\Phi}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} \right)_0 \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Phi} \right)_0 \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Phi} \right)_0 \right] \delta\Phi = 0, \tag{16}$$

donde el subíndice 0 define las cantidades para el estado inicial. Asumiendo la perturbación en forma de una onda viajera

$$\delta\Phi = \delta\Phi^0 \exp[i(kx - \omega t)], \tag{17}$$

donde $\delta\Phi^0$ representa la amplitud inicial de la perturbación. La parte imaginaria de ω gobierna el crecimiento o decrecimiento de la perturbación mientras que la parte real determina la velocidad de propagación de la onda. Reemplazando la Ec. (17) en la Ec. (16) una condición de compatibilidad para $\delta\Phi^0$ es obtenida

$$-i\omega \mathbf{A}_0 \delta\Phi^0 + ik \mathbf{B}_0 \delta\Phi^0 + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} \right)_0 \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Phi} \right)_0 \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Phi} \right)_0 \right] \delta\Phi^0 = 0. \tag{18}$$

Definiendo $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I = \omega_R/k + i\omega_I/k$, la condición para la existencia de una solución no trivial para $\delta\Phi^0$ está dada por

$$\det \left(\mathbf{A}_0 \lambda - \mathbf{B}_0 + \frac{i}{k} \mathbf{D}_0 \right) = 0, \tag{19}$$

donde para un estado inicial uniforme y estacionario \mathbf{D}_0 se define como $\mathbf{D}_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Phi} \right)_0$.

En el límite cuando $k \rightarrow \infty$, Ec. (19) se reduce a la ecuación característica correspondiente a la Ec. (10), dada por

$$\det(\mathbf{A}_0 \lambda - \mathbf{B}_0) = 0. \quad (20)$$

Siendo las características correspondientes imaginarias, se propone como matriz preconditionante a \mathbf{M} , con β y γ como parámetros libres, siendo la forma de \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \gamma \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (21)$$

Definiendo $\tilde{\mathbf{A}}_0 = (\mathbf{M} \mathbf{A})$, la nueva ecuación característica está dada por

$$\det(\tilde{\mathbf{A}}_0 \lambda - \mathbf{B}_0) = 0. \quad (22)$$

Desarrollando el determinante llegamos a la expresión general

$$I_0 \lambda^2 + I_1 \lambda + I_2 = 0, \quad (23)$$

siendo los invariantes de la ecuación anterior

$$I_0 = -\frac{\rho_g \beta \alpha_l + \rho_l \alpha_g}{\gamma^2 \beta (\alpha_l \rho_g + \rho_l \alpha_g)}, \quad (24)$$

$$I_1 = 2 \frac{\rho_l \alpha_g v_l + \rho_g \beta \alpha_l v_g}{\gamma^3 \beta (\alpha_l \rho_g + \rho_l \alpha_g)}, \quad (25)$$

$$I_2 = -\frac{\rho_l v_l^2 \alpha_g + \rho_g v_g^2 \alpha_l}{\beta \gamma^4 (\alpha_l \rho_g + \rho_l \alpha_g)}. \quad (26)$$

Las raíces de la ecuación característica (23) son,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{I_1}{2I_0} \pm \sqrt{\left(\frac{I_1}{2I_0}\right)^2 - \frac{I_2}{I_0}}. \quad (27)$$

Definiendo $C_1 = I_1/(2I_0)$ y $C_2 = I_2/I_0$ con,

$$C_1 = -\frac{\rho_l v_l \alpha_g + \rho_g v_g \beta \alpha_l}{\gamma (\rho_l \alpha_g + \rho_g \beta \alpha_l)}, \quad (28)$$

$$C_2 = \frac{\rho_l v_l^2 \alpha_g + \rho_g v_g^2 \alpha_l}{\gamma^2 (\rho_l \alpha_g + \rho_g \beta \alpha_l)}, \quad (29)$$

tenemos que nuestra nueva expresión para las raíces es

$$\lambda_{1,2} = -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - C_2} . \quad (30)$$

Siendo que buscamos asegurar la hiperbolicidad las raíces no deben ser imaginarias; por lo tanto

$$\Delta = C_1^2 - C_2 \geq 0 . \quad (31)$$

Los valores de β_{crit} son encontrados igualando el discriminante a cero; siendo $A = \alpha_l/\alpha_g$, $B = \rho_l/\rho_g$ y $C = v_l/v_g$ entonces

$$\Delta = C_1^2 - C_2 = -A\beta_{crit}^2 + (BC(C-2) + A)\beta_{crit} + B = 0 . \quad (32)$$

Calculando el β_{crit} a partir de la expresión anterior y reemplazando en la Ec. (30) llegamos a la expresión final para las raíces de la ecuación característica con $\beta = \beta_{crit}$ siendo esta definida a continuación como

$$\begin{aligned} D &= \rho_l v_l^2 \alpha_g + \rho_g v_g^2 \alpha_l , \\ E &= \rho_g v_g^2 \alpha_l + \rho_l \alpha_g (v_l + 2v_g)^2 , \\ \lambda_{1,2} &= \frac{(D \pm \sqrt{E \cdot D})v_g}{(\rho_l \alpha_g ((v_l - v_g)^2 + v_g^2) + \rho_g v_g \alpha_l \pm \sqrt{E \cdot D})\gamma} . \end{aligned} \quad (33)$$

En la Fig. 2 se ha representado los autovalores del problema sin preconditionamiento que surgen como resultado de un barrido en la fracción de vacío y en la relación de velocidades. Como podemos observar los mismos poseen componente imaginaria salvo para relaciones de velocidades $C = v_l/v_g = 1$. La Fig. 3 corresponde al problema preconditionado con $\gamma = 1$, en este caso si bien no existen valores complejos para las características, la velocidad de propagación se ha visto modificada por el parámetro β . Cabe destacar que no solamente se ha modificado el valor máximo de la componente real, sino que también tenemos velocidades de propagación negativas.

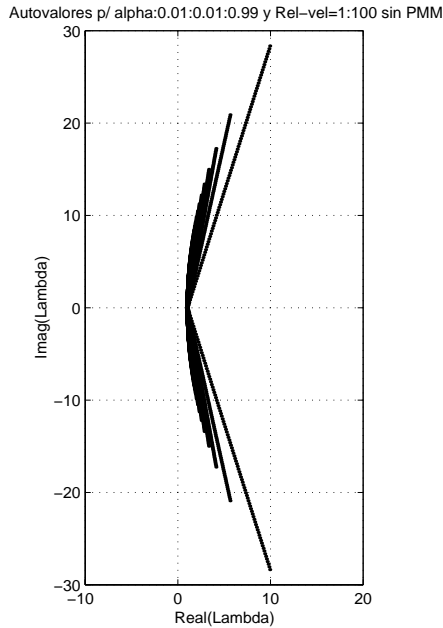


Figura 2: Autovalores para un barrido en α y relación de velocidades sin preconditionar.

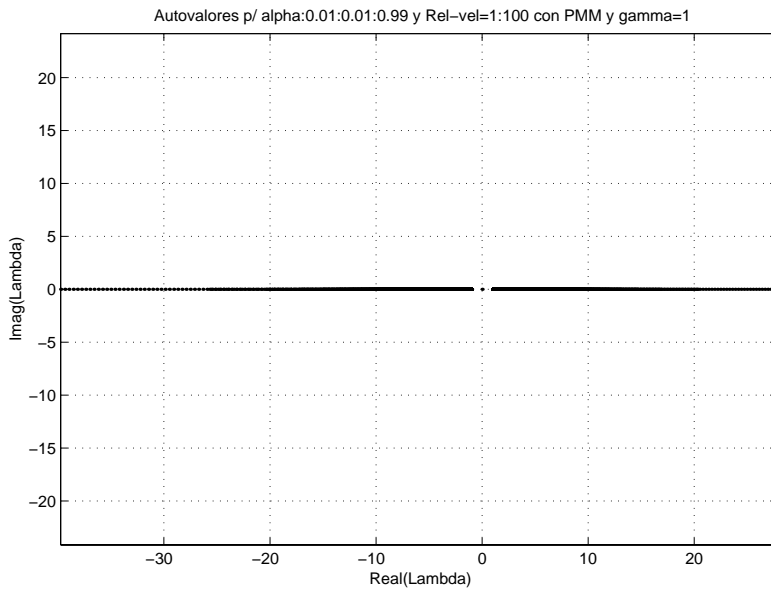


Figura 3: Autovalores para un barrido en α y relación de velocidades con preconditionamiento ($\gamma = 1$).

3.2 Cálculo del parámetro γ . Control de la velocidad de propagación

El parámetro β que permite recuperar la hiperbolicidad del modelo diferencial de dos fluidos modifica la parte real de la característica, siendo por lo tanto la evolución del problema distinta a la original. Con la finalidad de recuperar el comportamiento temporal se afecta a la matriz de preconditionamiento por un parámetro γ cuya determinación es desarrollada a continuación.

Teniendo en cuenta la expresión para los valores característicos (30), vemos que en el caso para el cual $\beta = 1$ y $\gamma = 1$, correspondiente al sistema original, presenta características imaginarias donde la parte real que determina la velocidad de propagación de la información en el medio, esta dada por

$$\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -C_1(\beta = 1; \gamma = 1). \quad (34)$$

El cociente entre la característica para $\beta = \beta_{crit}$ y la parte $\text{Re}(\lambda_{1,2})$ nos permite despejar γ cuya expresión final es

$$\gamma_{1,2} = -\frac{\rho_l \alpha_g + \rho_g + \alpha_l}{\rho_l v_l \alpha_g + \rho_g v_g \alpha_l} \frac{(D \pm \sqrt{E \cdot D}) v_g}{\rho_l \alpha_g ((v_l - v_g)^2 + v_g^2) + \rho_g v_g \alpha_l \pm \sqrt{E \cdot D}}. \quad (35)$$

En la Fig. 4 podemos observar a los valores característicos con el parámetro γ determinado con la expresión anterior, los cuales no presentan componente compleja y además han recuperado el valor de la componente real correspondiente al problema original sin preconditionar.

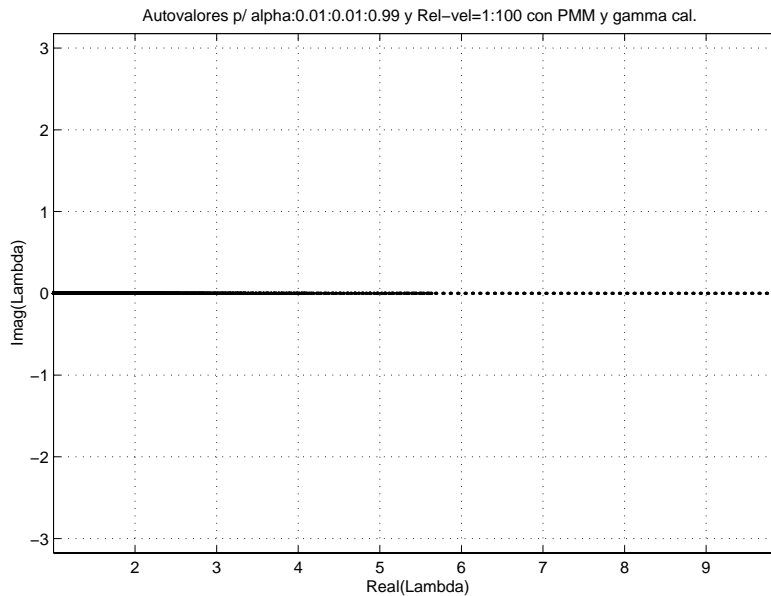


Figura 4: Autovalores para un barrido en α y relación de velocidades con preconditionamiento y $\gamma \neq 1$.

4 RESULTADOS

Las implementaciones numéricas del modelo de dos fluidos sin preconditionar son propensas a desarrollar inestabilidades que crecen y se propagan en el dominio. Estas inestabilidades son más favorables de presentarse cuando los valores de la fracción de vacío son elevados. Factores que también contribuyen a dar origen a las mismas son las altas relaciones de densidad y velocidad. Por lo tanto diseñamos un ejemplo que se resuelve para dos condiciones iniciales diferentes, una favorable y otra desfavorable. En el último caso se

compara los resultados obtenidos con el código **Relap**¹⁴ utilizado para resolver flujos multifásicos en centrales nucleares y el código comercial **CFX**. En ambos casos se perturba el campo de fracción de vacío con una onda sinusoidal, estando el resto de los campos con valores uniformes. Esta onda viaja a través del dominio alcanzando los contornos. Siendo periódicos el primer y último nodo, el dominio y sus condiciones de contorno constituyen un problema equivalente a uno con dominio de extensión infinita en el que viaja una onda de longitud finita.

El presente método fue implementado en la aplicación para flujos bifásicos **Bubbly** escrita en el código PETSC-FEM¹⁵ desarrollado en el CIMEC.

4.1 Descripción

El ejemplo consiste en un dominio unidimensional, con una longitud $L = 0.4$ m, discretizado en 100 elementos, estando los nodos equidistantes entre sí. Las condiciones de contorno son periódicas para el primer y último nodo. A continuación pasamos a desarrollar los dos casos antes mencionados.

Caso I

Las condiciones iniciales están dadas por :

- 1.- Velocidad del líquido $v_l = 2$ m/s ; uniforme.
- 2.- Velocidad del gas $v_g = 2.5$ m/s ; uniforme.
- 3.- Presión $p = 0$; uniforme.
- 4.- Fracción de vacío, $\alpha = \alpha_{medio} + \alpha_{ampl} \sin(4\pi x/L)$; $\alpha_{medio} = 0.1$; $\alpha_{ampl} = 0.05$.

En este caso las relaciones de densidad y velocidad son bajas, el campo de fracción de vacío es perturbado con una onda de amplitud 0.05. La finalidad de este caso es determinar si existe modificación en la solución por parte del método de preconditionamiento. Se han comparado los resultados obtenidos con y sin preconditionamiento en la misma formulación. Como podemos ver en la Fig. 5 luego de un ciclo el problema preconditionado con $\gamma=1$, posee la misma ley para la fracción de vacío que el problema original sin preconditionar. La Fig. 6 corresponde a un acercamiento, donde observamos que la amplitud es un 0.44 % menor y existe un defasaje espacial de 1 %.

Caso II

- 1.- Velocidad del líquido $v_l = 1$ m/s ; uniforme.
- 2.- Velocidad del gas $v_g = 10$ m/s ; uniforme.
- 3.- Presión $p = 0$; uniforme.
- 4.- Fracción de vacío, $\alpha = \alpha_{medio} + \alpha_{ampl} \sin(4\pi x/L)$; $\alpha_{medio} = 0.5$; $\alpha_{ampl} = 0.45$.

El caso es completamente desfavorable para el modelo de dos fluidos, la idea principal es estimar cuán robusto es el método, para lo cual lo comparamos con el código **Relap**. En la Fig. 7 observamos los resultados con preconditionamiento de la matriz de masa, para 5 pasos de tiempo de 0.001 s. Al compararlo con la Fig. 8 correspondiente al **Relap** observamos que las velocidades que predice el mismo son considerablemente mayores y están defasadas 0.10 m; el problema diverge para 0.0035 s, mientras que en la aplicación con preconditionamiento podemos obtener la solución estacionaria del problema. El otro campo que se compara es la fracción de gas. La Fig. 9 corresponde a la solución con preconditionamiento y la Fig. 10 al Relap. En la fracción de vacío no existen grandes diferencias entre códigos, sin embargo la fracción de gas con el método de preconditionamiento experimenta una inercia mayor, probablemente atribuida a que hasta el momento no está implementada la corrección de la velocidad de propagación ($\gamma = 1$). Cabe destacar que también el problema ha sido resuelto en el código comercial **CFX**, el mismo diverge en 7 pasos de tiempo de 0.001 s. Por último presentamos el campo del parámetro β de la matriz de preconditionamiento Fig. 11.

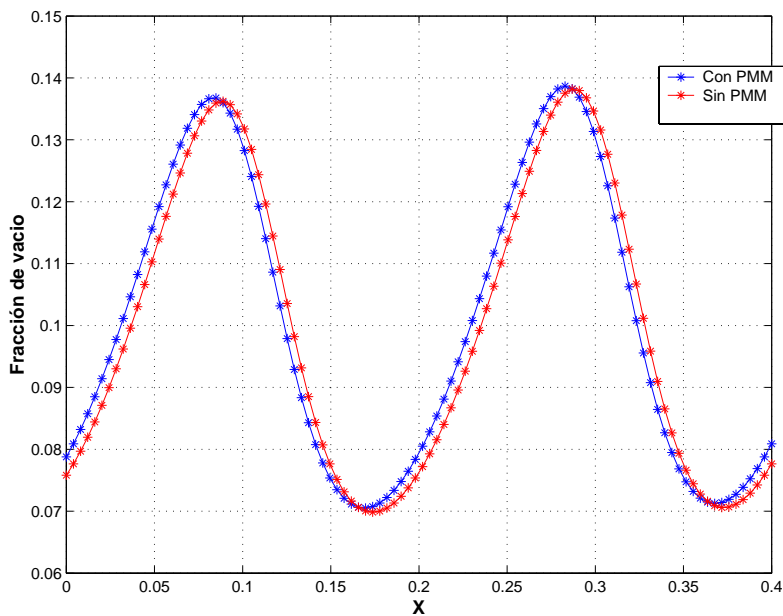


Figura 5: Fracción de vacío con y sin preconditionamiento para $t = 1.5$ s.

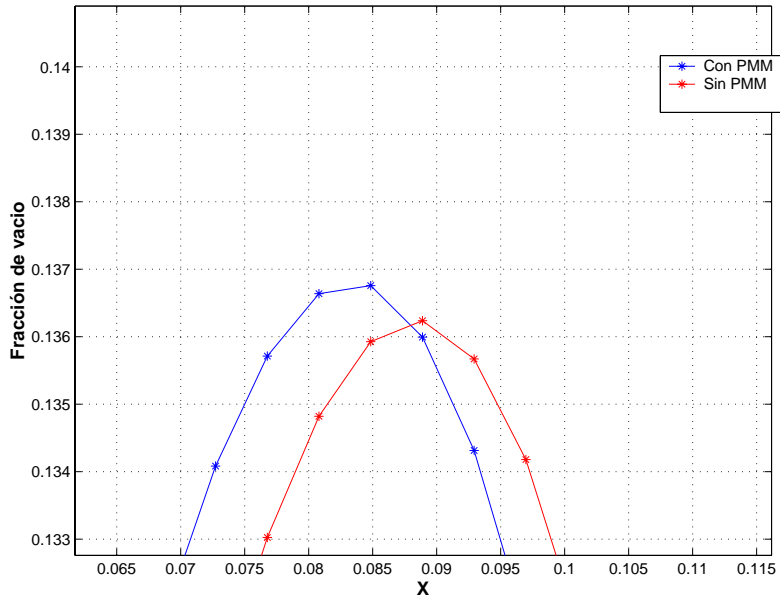


Figura 6: Defasaje de la fracción de vacío para $t = 1.5$ s.

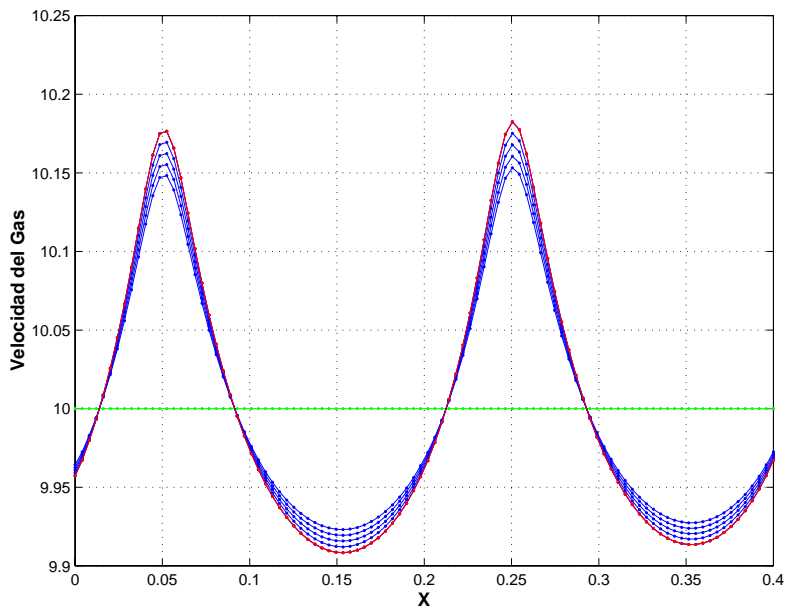


Figura 7: Velocidad del gas para la formulación con preconditionamiento de la matriz de masa, 5 pasos de 0.001 s.

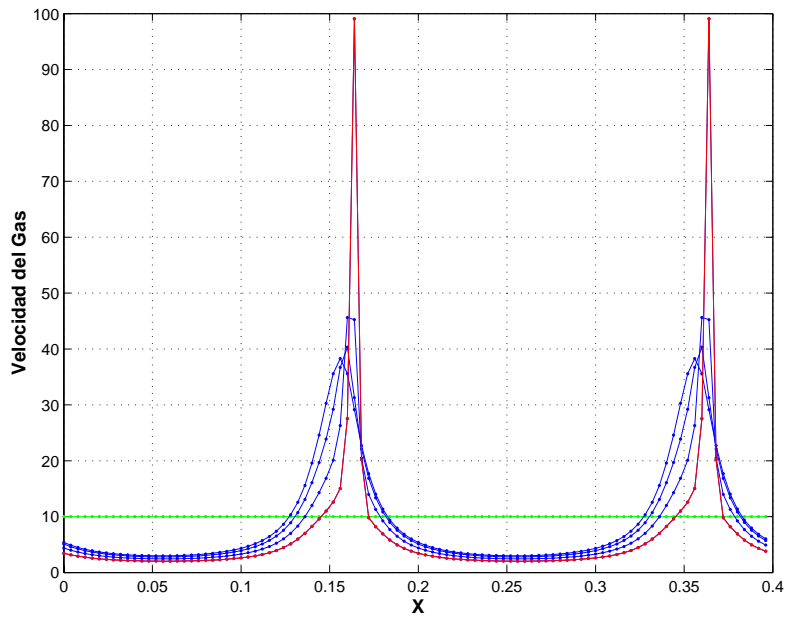


Figura 8: Velocidad del gas obtenida con el código Relap, 3 pasos de 0.001 s y 1 paso de 0.0005 s.

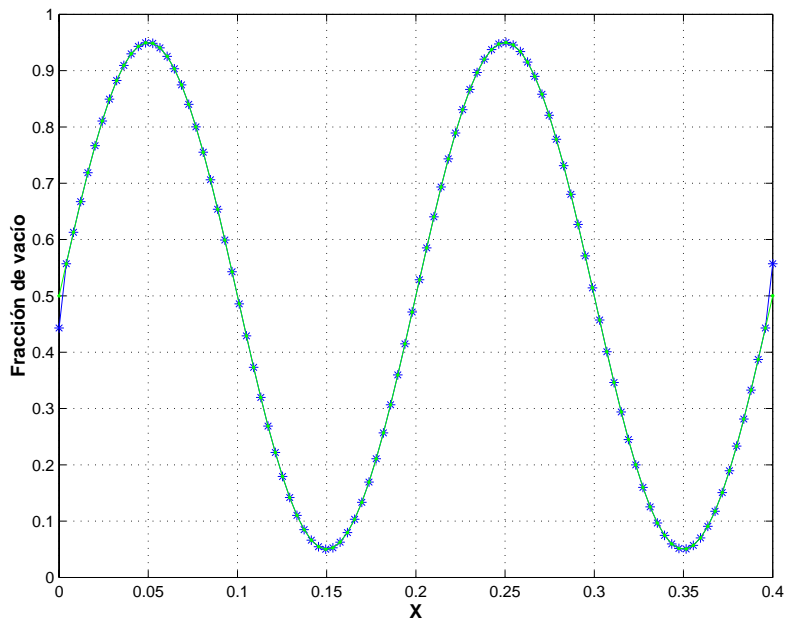


Figura 9: Fracción de vacío para la formulación con preconditionamiento de la matriz de masa, 5 pasos de 0.001 s.

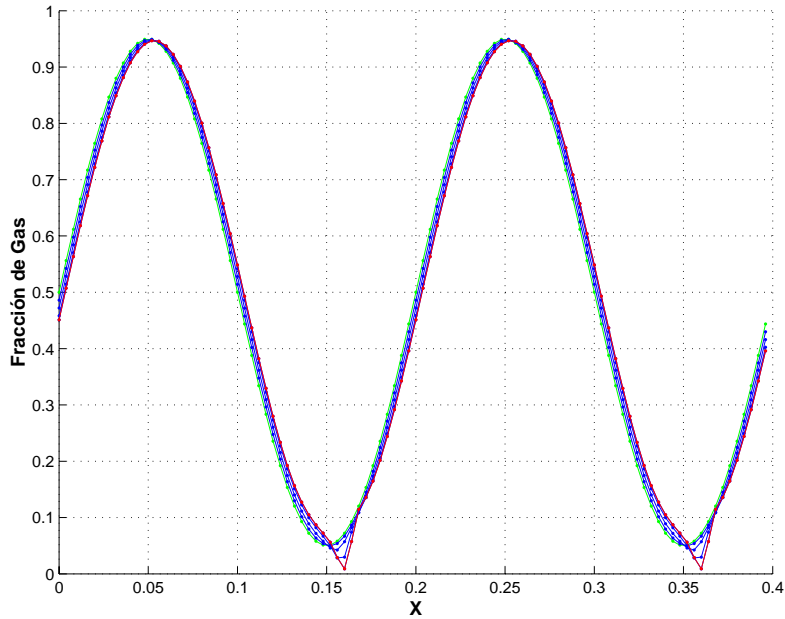


Figura 10: Fracción de vacío obtenida con el código Relap, 3 pasos de 0.001 s y 1 paso de 0.0005 s.

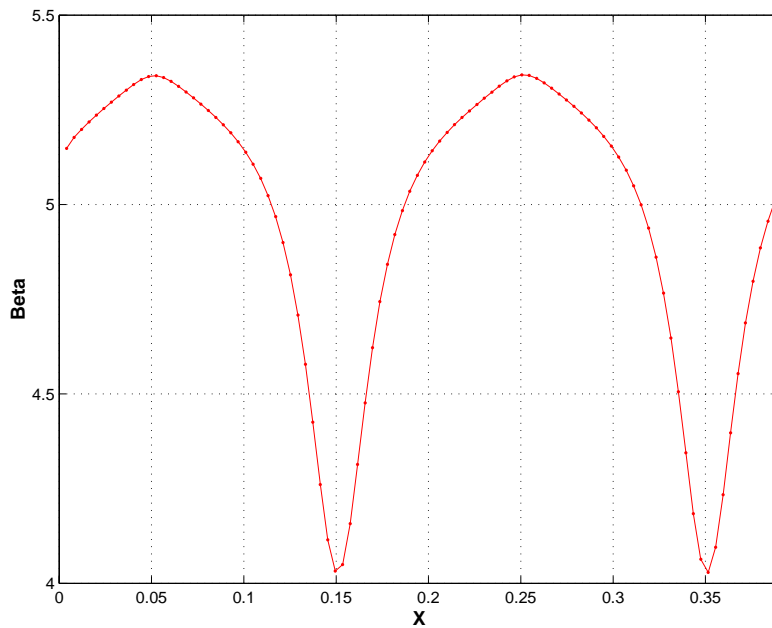


Figura 11: Parámetro β para la formulación con preconditionamiento de la matriz de masa, para un tiempo $t = 5$ s.

5 CONCLUSIONES

Se desarrolló en este trabajo un método de preconditionamiento de la matriz de masa del modelo de dos fluidos, con el objetivo de hacer al mismo hiperbólico. La matriz de preconditionamiento que se obtuvo cuenta con dos parámetros, el primero β tiene la finalidad

de lograr la hiperbolicidad del modelo y el segundo γ recupera la velocidad de propagación de las ondas del modelo original. Ambos parámetros son función de la fracción de vacío y de las relaciones de velocidad y densidad.

El análisis de las características del modelo preconditionado, no evidencia componente imaginaria y mantiene la componente real del modelo original. Se implementó numéricamente el modelo considerando $\gamma = 1$ y se resolvió un ejemplo con altas relaciones de velocidad, densidad y fracción de vacío. Se compararon los resultados obtenidos con el método de preconditionamiento con los resultados del código Relap. En el ejemplo analizado este último diverge en unos pocos pasos de tiempo, mientras que con el presente método podemos resolverlo para todo tiempo. Utilizando $\gamma = 1$ no se puede asegurar la precisión del método para describir la evolución en el tiempo del sistema pero sí es posible determinar su estado estacionario ya que la matriz de preconditionamiento sólo afecta al término temporal de la ecuación de transporte. La implementación del parámetro γ y la aplicación del método a problemas en dos y tres dimensiones serán las próximas etapas a ser desarrolladas.

REFERENCIAS

- [1] M. Ishii, "Thermofluid Dynamic Theory of Two phase Flow". Eyrolles, Paris, (1975).
- [2] G. F. Hewitt. Section 2. In G. Hedsroni, editor, "Handbook of Multiphase systems". McGraw-Hill, (1982).
- [3] S. O. Univerdi and G. Tryggvason. "A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows". *Journal of Computational Physics* **100**, 2537 (1992).
- [4] F. H. Harlow and J. E. Welch. "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluids with a free surface". *Physics of Fluids* **8**, 2182 (1965).
- [5] M. J. Andrews and P. J. ORourke. "The multiphase particle-in-cell (MP-PIC) method for dense particulate flows". *International Journal of Multiphase Flow* **22**, 379 (1996).
- [6] C. T. Crowe, M. P. Sharma, and D. E. Stock. "The particle-source-in-cell method for gas droplet flow". *Journal of Fluids Engineering* **99**, 325 (1977).
- [7] N. A. Patankar and D. D. Joseph. "Modeling and numerical simulation of particulate flows by the Eulerian-Lagrangian approach". *International Journal of Multiphase Flow* **27**, 1659 (2001).
- [8] C. Crowe, M. Sommerfeld, and Y. Tsuji. "Multiphase Flows with Droplets and Particles". CRC Press, (1998).
- [9] D. A. Drew and S. L. Passman, "Theory of Multicomponent Fluids". Applied Mathematical Sciences 135, SpringerVerlag, New York, Berlin, Heidelberg, (1998).
- [10] D. D. Joseph and J. C. Saut, "Short Wave Instabilities and Ill Posed Initial Value Problems". *Journal of Theoretical and Computational Fluid Mechanics* **1**, 191 (1990).
- [11] D. Z. Zhang and A. Prosperetti, "Ensemble phaseaveraged equations for bubbly flows". *Phys. Fluids* **6**, 295 (1994).
- [12] R. T. Lahey Jr. and D. A. Drew. "The three dimensional time and volume averaged conservation equations of two-phase flows". *Adv. Nucl. Sci. Technol.* **20**, 1 (1988).
- [13] M. Ishii and N. Zuber, "Relative motion and interfacial drag coefficient in dispersed two-phase flow of bubbles, drops and particles", *AIChE J.* **25**, 843 (1979).

- [14] V. H. Ransom et al., RELAP5/MOD2 Code Manual 1, Code 2, Structure, System Models, and Solution Methods, NUREG/CR 4312, (1985).
- [15] (PETSc-FEM) A General Purpose, Parallel, Multi-Physics (FEM) Program, Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), Página Web: <http://www.cimec.org.ar/petscfem/>.