

TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA APLICADA A ENSAIOS NÃO DESTRUTIVOS UTILIZANDO O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Jader P. C. da Silva, Cícero R. de Lima

*Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do ABC –
UFABC, Av. dos Estados 5001, Santo André - SP Brasil, <http://www.ufabc.edu.br>*

Palavras-chave: ensaios não-destrutivos, tomografia por impedância elétrica, otimização topológica.

Resumo. Ensaios não-destrutivos (ENDs) são testes realizados para detecção de trincas na superfície ou no interior de estruturas mecânicas, sem prejudicar a funcionalidade da estrutura testada. Existem vários métodos propostos para este tipo de ensaios, sendo os mais comuns os que utilizam líquidos penetrantes, partículas magnéticas, ultrassom e radiografia para visualizar o defeito na estrutura. Este trabalho propõe a utilização da Tomografia por Impedância Elétrica (TIE), que é uma técnica de monitoração, onde imagens são obtidas a partir da aplicação de uma sequência de correntes elétricas em eletrodos posicionados em torno do objeto. O objetivo principal do trabalho é a implementação de um algoritmo para reconstrução de imagens na TIE usando o Método de Otimização Topológica (MOT), cujo algoritmo computacional combina o Método de Elementos Finitos (MEF) e a Programação Linear Sequencial (PLS). O problema de obtenção da imagem de TIE pelo MOT consiste em se obter a distribuição de condutividade no domínio da estrutura que minimize a diferença entre os potenciais elétricos medidos nos eletrodos e os calculados no modelo computacional do domínio usando elementos finitos. Para ilustrar, são apresentados alguns resultados obtidos utilizando-se dados numéricos de domínios bidimensionais.

1 INTRODUÇÃO

Ensaio não-destrutivo (ENDs) são testes realizados para detecção de falhas ou anomalias no interior de estruturas mecânicas, sem danificar a superfície e funcionalidade da estrutura testada (Shull, 2002). A detecção e avaliação prévia de trincas ou fissuras na superfície ou interior de componentes estruturais mecânicos é extremamente importante para garantir a integridade e aumentar o tempo de vida útil desses componentes. Existe uma variedade de métodos propostos para este tipo de ensaio, sendo que os mais tradicionais são baseados na detecção de falhas através da utilização de líquidos penetrantes, partículas magnéticas, ultrassom e radiografia (raios X e gama).

Outro método com potencial aplicação para ENDs é a Tomografia por Impedância Elétrica (TIE). Esse método vem sendo estudado pela comunidade científica, desde o final da década de 80, como ferramenta alternativa de baixo custo para o diagnóstico da propagação de trincas em componentes estruturais mecânicos utilizados nas indústrias automobilística, aeronáutica e construção civil. A TIE é uma técnica de natureza não-invasiva aplicada para estimação da distribuição de condutividades (ou resistividades) no interior de um objeto, mediante informação de potenciais elétricos medidos no contorno do objeto. Esta técnica permite obter imagens de qualquer seção transversal de um corpo, onde cada pixel na imagem representa um valor de condutividade elétrica estimada (Cheney et al., 1999). A imagem de tomografia é gerada mediante valores de potenciais elétricos obtidos com a aplicação de uma sequência alternada de correntes elétricas numa cinta de eletrodos colocada na superfície do objeto, em torno da seção transversal que se deseja observar (como ilustrado na Figura 1).

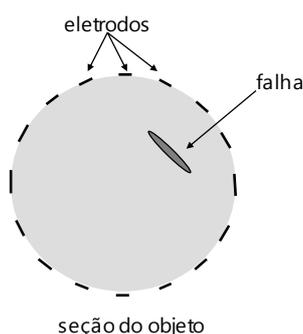


Figura 1 - Eletrodos posicionados em torno da seção do objeto.

Um dos eletrodos é levado a potencial zero ("aterramento") e uma corrente é aplicada por dois ou mais eletrodos, a uma intensidade constante, segundo um certo padrão de excitação elétrica (Newell et al., 1988). Tendo as informações de potenciais elétricos disponíveis, procede-se a solução do sistema inverso de equações, através de um algoritmo computacional, que relaciona os potenciais elétricos medidos e correntes aplicadas com a distribuição de condutividade no interior da seção

considerada do objeto, de maneira a se obter uma imagem que represente a mais provável distribuição de condutividades dentro do domínio.

O princípio de ação da TIE, aplicada aos ENDS, tem como base a alteração na distribuição de condutividade elétrica no material da estrutura, provocada pelo surgimento da trinca. Há vários trabalhos teóricos e experimentais que descrevem a detecção de falhas (trincas ou fissuras) utilizando-se a técnica da TIE (Friedman and Vogelius, 1989; Eggleston, 1989; Lazarovitch et al., 2002). Sendo que, atualmente são encontrados na literatura diversos trabalhos que consolidam a TIE para aplicações em detecção de fissuras, bolhas e corrosão interna em componentes estruturais metálicos (Santosa and Vogelius, 1991; Bruhl et al., 2000) e para identificação de falhas em estruturas de concreto (Hou and Lynch, 2008; Karhunen et al., 2010).

Além da área de ENDS, são encontradas aplicações da TIE na geofísica e em processos industriais, tais como para localizar depósitos de minerais subterrâneos, detectar contaminantes químicos dissolvidos em águas subterrâneas, visualizar bolhas em escoamento de fluidos bifásicos, entre outros (York, 2001). Outras aplicações também são encontradas em exames clínicos da área médica, tais como monitoração de fluido nos pulmões, monitoração das funções cardíaca e do fluxo sanguíneo, detecção de tumores, entre outros (Holder, 1993). Uma revisão abrangente sobre essas aplicações da TIE pode ser vista em (Borcea, 2002).

Um tomógrafo de TIE consiste num importante instrumento a ser usado em ensaios com testes não-destrutivos, cujas principais vantagens consistem na habilidade da técnica da TIE em lidar com estruturas geometricamente complexas, na possibilidade de redução dos custos dos ensaios e na portabilidade do aparelho de TIE. No entanto, a desvantagem está na limitação para ensaios com materiais eletricamente não condutivos e na resolução da imagem que é relativamente baixa (Lazarovitch et al., 2002).

A detecção de trincas em componentes estruturais utilizando-se a TIE é estudada na literatura utilizando-se diversos tipos de algoritmos de reconstrução de imagem originais baseados nos métodos de Backprojection (Liepa et al., 1993), Newton-Raphson (Santosa and Vogelius, 1991), e Filtro de Kalman (Yorkey et al., 1987). O algoritmo do Backprojection deforma a imagem consideravelmente, forçando a distribuição de condutividades a se projetar sobre um círculo. Já, os algoritmos baseados em Newton-Raphson e Filtro de Kalman têm seu desempenho melhor para obtenção de imagens relativas (variações de condutividade entre dois instantes). No presente trabalho, é proposto a aplicação do Método de Otimização Topológica (MOT) para a obtenção da imagem de tomografia de TIE para fins de ensaios não-destrutivos.

Essencialmente, o MOT busca a distribuição de material (que define a distribuição de condutividade) no interior de um domínio de projeto, retirando e adicionando material em cada ponto desse domínio de maneira à extremizar uma função objetivo especificada, satisfazendo dadas restrições impostas ao problema de otimização (Bendsøe and Sigmund, 2003). O algoritmo de MOT aplicado à TIE é classificado

como um método absoluto (obtenção de imagens estáticas) e tem como principal vantagem a possibilidade de inclusão de várias restrições no problema de construção da imagem restringindo facilmente o espaço de solução, evitando imagens sem significado clínico e propagação de erros.

As seções seguintes deste trabalho estão organizadas da seguinte maneira. Na seção 2 são descritos a formulação e o procedimento para a solução do problema de otimização topológica aplicado à obtenção de imagem através da TIE. Os resultados obtidos utilizando-se dados numéricos de potenciais elétricos em domínios bidimensionais são mostrados na seção 3. Na seção 4 são apresentadas as conclusões e trabalhos futuros.

2 IMPLEMENTAÇÃO DO MOT APLICADO À TIE

O problema de obtenção da imagem de TIE pelo Método de Otimização Topológica (MOT) consiste em se obter a distribuição de condutividade no domínio da seção que minimize a diferença entre os potenciais elétricos medidos nos eletrodos e os calculados num modelo computacional da seção (Lima et al., 2007). A solução desse problema de otimização topológica é obtida combinando-se o Método de Elementos Finitos (MEF) (Bathe, 1996) e o algoritmo de otimização conhecido por Programação Linear Sequencial (PLS) (Haftka et al., 1996). No MOT, o domínio de projeto é dividido em elementos finitos cuja malha do modelo de MEF não é alterada durante o processo de otimização. O material em cada ponto do domínio de projeto pode variar de um material A à outro material B, assumindo materiais intermediários entre A e B conforme uma lei de mistura dos dois materiais conhecida por modelo de material. Neste trabalho, o modelo material usado é o método das densidades (Bendsøe and Sigmund, 2003), onde as propriedades de condutividade (\mathbf{c}_i) de cada elemento são definidas da seguinte maneira:

$$\mathbf{c}_i = \rho_i^p \mathbf{c}_A + (1 - \rho_i^p) \mathbf{c}_B, \quad \text{com: } 0 \leq \rho_i \leq 1, i = 1 \dots N \quad (1)$$

onde \mathbf{c}_A e \mathbf{c}_B são as propriedades de condutividade dos materiais básicos que compõem o domínio de projeto. Por exemplo, A poderia ser o material da trinca e B ser o material estrutural da estrutura examinada. Os valores de cada ρ_i podem variar de 0 (indicando a presença de B) a 1 (indicando a presença de A). O excesso de material intermediário pode ser evitado com o uso de um fator de penalidade (p), cujo valor deve ser ajustado (Bendsøe and Sigmund, 2003).

O problema de otimização para obtenção de imagem usando a TIE, cuja solução é obtida através de um algoritmo de MOT, é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } F &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} (\phi_j - \phi_{j0})^2 \\ \text{Sujeito à: } & \text{equação de equilíbrio do meio condutivo} \\ & 0 \leq \rho_i \leq 1 \quad i = 1 \dots N \end{aligned} \quad (2)$$

onde F é a função objetivo relacionada com a diferença entre os valores do potencial elétrico medidos nos eletrodos (ϕ_{ij0}) e os calculados no modelo computacional do domínio usando elementos finitos (ϕ_{ij}). ne e np são o número de casos de carga de corrente aplicados e o número de pontos de medição (eletrodos), respectivamente. ρ_i são as variáveis de projeto relacionadas com a quantidade de material em cada elemento do domínio.

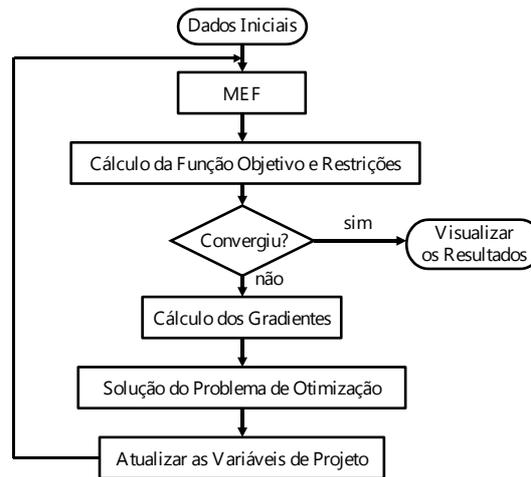


Figura 2 – Fluxograma do algoritmo de MOT.

A solução do problema de otimização da Eq. (2) é obtida numericamente pelo algoritmo iterativo do MOT, cujas etapas são mostradas na Figura 2. O modelo de MEF do domínio do projeto é fornecido ao algoritmo como dados iniciais. Os potenciais elétricos são obtidos através da análise do modelo de MEF, e são utilizados no cálculo da função objetivo e restrições. O algoritmo resolve o problema não-linear dividindo-o numa sequência de subproblemas lineares, que são resolvidos com programação linear (PL) (Haftka et al., 1996). A linearização do problema é feita através de uma expansão da função objetivo numa Série de Taylor, aproveitando-se os termos de 1ª. ordem. Essa linearização requer o cálculo dos gradientes da função objetivo em relação às variáveis de projeto. O algoritmo de otimização fornece um novo conjunto de variáveis de projeto (distribuição ótima de condutividades), que são utilizadas numa nova análise de MEF. As iterações continuam até que haja a convergência do valor da função objetivo.

Os gradientes (ou derivadas) da função objetivo e restrições são chamados de sensibilidades do problema de otimização topológica. Esses gradientes são utilizados na PLS para a linearização da função objetivo em relação às variáveis do problema. Neste trabalho, a formulação matemática dos gradientes da função objetivo do problema de otimização da Eq. (2) é desenvolvida analiticamente através do método adjunto (Lima et al., 2007). A formulação matricial para o cálculo desses gradientes pode ser vista no Apêndice.

3 RESULTADOS

Um algoritmo de MOT aplicado à TIE é implementado em MatLab® para fins de detecção de trincas em um meio condutivo. Nesta seção, serão apresentados quatro exemplos para ilustrar a reconstrução de imagem através do algoritmo implementado. Sendo dois exemplos em que o interior do objeto submetido a tomografia possui um material previamente conhecido, e outros dois exemplos em que o objeto possui um furo central.

Neste trabalho, não são utilizados elementos de eletrodos, comumente encontrados nos trabalhos com TIE. Essa decisão é respaldada em Paulson (2004), que mostra que a impedância de contato entre eletrodo e a superfície do objeto pode ser diminuída através da escolha cuidadosa de um eletrodo do mesmo material do objeto submetido a tomografia. Assim, considerando que os ensaios não-destrutivos sejam realizados em estruturas cujo material condutivo possui propriedades semelhantes aos materiais dos eletrodos, é possível dispensar a implementação de um elemento para simular a impedância de contato entre o eletrodo e a superfície da estrutura.

3.1 Domínio com três materiais

O algoritmo implementado neste trabalho é testado com o auxílio de fantasmas numéricos, que são modelos computacionais da seção do objeto que contém a falha (trinca ou fissura). Nestes exemplos, o domínio do fantoma é constituído em grande parte por material condutivo (material 1), que apresenta em seu interior outras regiões menores de material também condutivo (material 2). Nesta seção, o algoritmo é utilizado para detectar a presença de uma e de duas fissuras (material 3) no interior do objeto (ver Figura 3).

O material 2 é previamente conhecido, ou seja, este material representa uma região fixa no domínio de projeto e não participa da otimização. Por exemplo, isso poderia ser considerado como sendo um eixo mecânico que contém em seu interior outro objeto fixo e com material diferente.

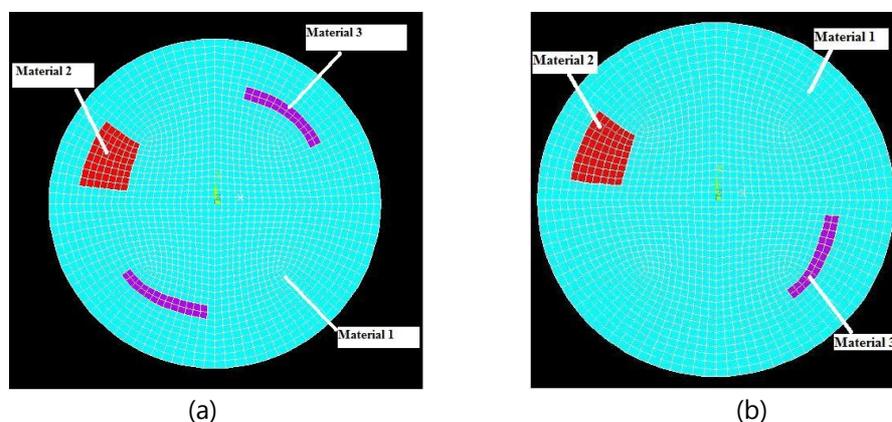


Figura 3 - Fantasmas com três tipos de materiais: (a) duas trincas, (b) uma trinca.

O fantoma numérico utilizado nesse exemplo pode ser visto na Figura 3. O fantoma tem diâmetro de 90 cm e foi discretizado em 1728 elementos quadriláteros. A corrente elétrica é aplicada em 16 eletrodos (nós de eletrodos) dispostos equidistantemente no contorno do fantoma. Para obter os potenciais elétricos "medidos" (ϕ_{ij0}), um par de eletrodos diametrais é excitado eletricamente. Desta maneira, um eletrodo é "aterrado" (potencial nulo) e o outro recebe a aplicação de corrente elétrica de 10 mA. Esse processo é chamado de padrão de excitação diametral (Lima et al., 2007). O par de eletrodos é trocado sucessivamente até completar um ciclo, desta forma obtém-se um número suficiente de observações sob diferentes ângulos.

No fantoma da Figura 3, a região em azul simula a presença de um material de baixa resistividade (latão, $8 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$), a região em vermelho simula outro material de baixa resistividade (alumínio, $2,8 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$) e a região em roxo representa a presença de um material de alta resistividade ($2500 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$). Adota-se que a trinca (região roxa) seja um espaço vazio preenchido por ar.

A reconstrução da imagem é feita em uma malha menos discretizada (com 432 elementos quadriláteros) para evitar o chamado "crime de inversão", que ocorre ao utilizar a mesma malha para o fantoma e para a reconstrução da imagem. A seguir é mostrada a imagem reconstruída pelo algoritmo implementado, bem como os gráficos com valores absolutos de resistividades de cada elemento e a curva de convergência da função objetivo.

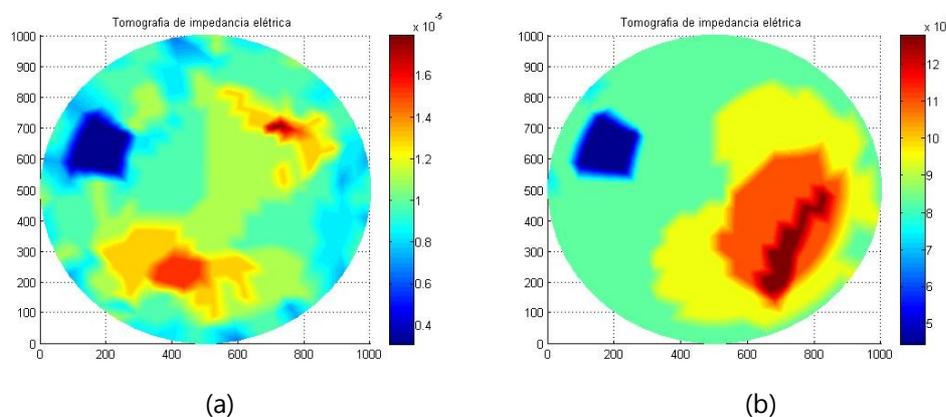


Figura 4 – Resultados com materiais diferentes no interior do objeto: (a) duas trincas, (b) uma trinca.

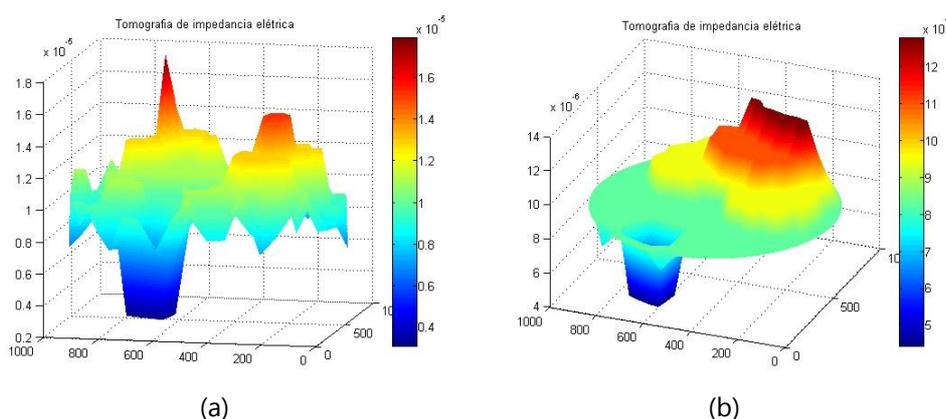


Figura 5 – Gráfico das resistividades por região do elemento: (a) duas trincas, (b) uma trinca.

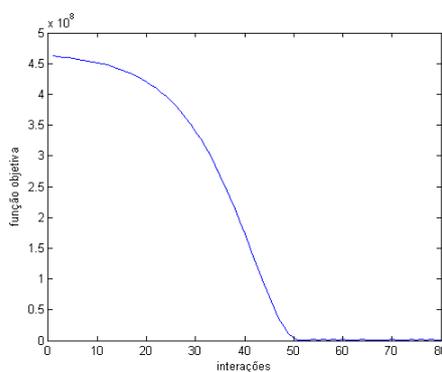


Figura 6 – Gráfico da convergência da função objetivo

A partir desses resultados, é possível concluir que o algoritmo detecta a falha no objeto (trincas), minimizando a função objetivo. Através da Figura 5, pode-se observar que os valores das resistividades estão bem distintos entre si. Apesar do valor de resistividade da região da trinca ainda estar abaixo do valor real ($2500 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$), os resultados obtidos fornecem uma boa resposta em termos de detecção e monitoramento do aparecimento da falha no objeto.

3.2 Domínio com furo central

Neste exemplo, o algoritmo implementado é utilizado para a detecção de uma e duas falhas (trinca ou fissura) em um domínio que possui geometria circular com um furo central, ou seja, na região central do domínio não há condução da corrente elétrica.

O fantoma numérico da seção do objeto com furo central é mostrada na Figura 7. O diâmetro externo e interno do fantoma é igual a 90 cm e 30 cm, respectivamente. O domínio do fantoma é discretizado em 1680 elementos quadriláteros. A corrente elétrica de 10 mA é aplicada, segundo o padrão diametral, em 16 eletrodos dispostos equidistantemente no contorno do fantoma.

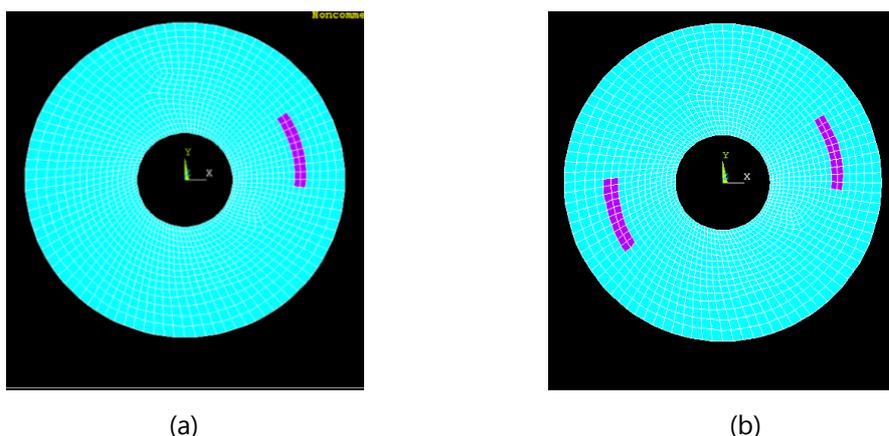


Figura 7 – Fantasmas con un furo central: (a) una trinca, (b) duas trincas

A região em azul na Figura 7 representa um material de baixa resistividade (latão, $8 \times 10^{-6} \Omega\text{cm}$) e a região em roxo representa a presença de um material de alta resistividade (ar, $2500 \times 10^{-6} \Omega\text{cm}$), simulando a região onde a trinca ocorre.

A reconstrução da imagem foi feita em uma malha menos discretizada (com 420 elementos). A seguir, são apresentados os resultados obtidos com o algoritmo implementado. A Figura 8 mostra a imagem reconstruída pelo algoritmo para os dois casos propostos (uma e duas trincas no domínio). Os valores de resistividades de cada elemento do domínio discretizado são mostrados nos gráficos da Figura 9.

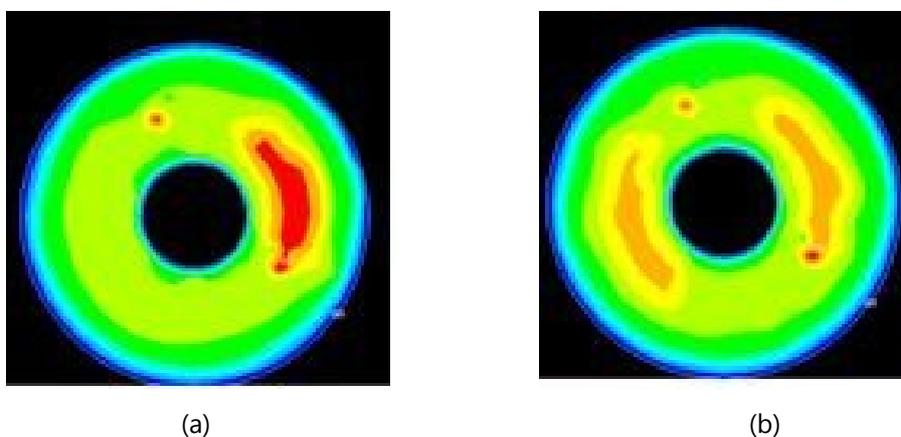
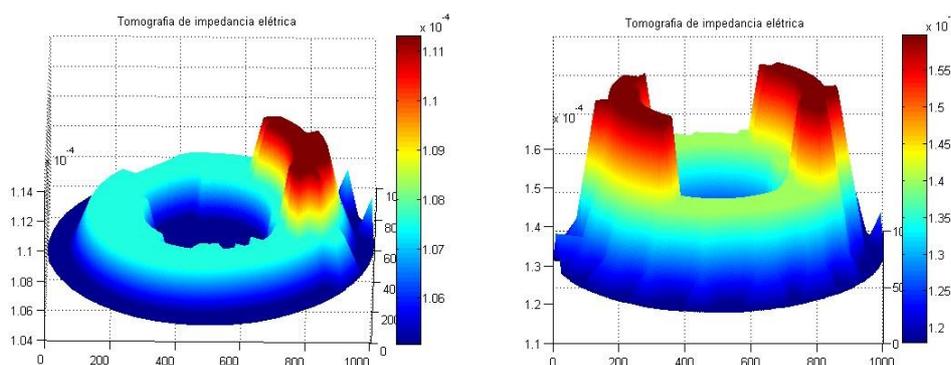


Figura 8 – Resultados con Furo Central: (a) una trinca, (b) duas trincas.



(a)

(b)

Figura 9 - Gráfico das resistividades por região do elemento: (a) uma trinca, (b) duas trincas.

Pode-se observar na Figura 8 que o algoritmo detecta a perturbação provocada pelas trincas. Na Figura 9, observa-se que os valores de resistividades são bem distintos entre si.

4 CONCLUSÃO

Um algoritmo de otimização topológica aplicado à TIE foi proposto para detecção de fissuras em meios condutivos. Este algoritmo utiliza modelos de MEF para obtenção dos potenciais elétricos em cada ponto da estrutura, uma função objetivo comumente aplicada para solução do problema inverso da TIE, modelo de material baseado no método das densidades para a mistura de dois materiais e um método de otimização baseado na PLS. O algoritmo escrito na linguagem do MatLab® foi implementado para executar o processo iterativo do MOT. Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos utilizando-se valores de potenciais elétricos calculados numericamente numa simulação de MEF (fantoma numérico). Os resultados obtidos demonstram que o algoritmo implementado é capaz de estimar em algumas dezenas de iterações os valores de condutividade absoluta de dois materiais no interior do domínio (circular). No entanto, ainda é necessário aprimorar o algoritmo para que ele seja capaz de trabalhar com dados extraídos experimentalmente de um fantoma real (dados com ruído).

Como considerações finais, observa-se que o MOT pode ser aplicado para obter imagens de TIE de estruturas condutivas, que permite o monitoramento para detecção de falhas (trincas ou fissuras) no material da estrutura. Além disso, o MOT aceita facilmente a inclusão restrições no problema de reconstrução de imagem, limitando o espaço da solução e, assim, evitando imagens sem significado prático. Por exemplo, é possível limitar no domínio de projeto à região em que a presença da trinca pode ocorrer, além de permitir lidar com a presença de regiões conhecidas no interior do domínio.

REFERENCES

- Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- Bendsøe, M. P., and Sigmund, O., *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- Borcea, L., *Electrical Impedance Tomography*, *Inverse Problems*, 18:6:99–136, 2002.
- Bruhl, M., Hanke M., and Pidcock M., *Crack Detection Using Electrostatic Measurements*. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 35:595-605, 2000.
- Byun, J.K., Lee, J.H., Park, I.H., Lee, H.B., Choi, K., and Hahn, S.Y., *Inverse Problem Application of Topology Optimization Method with Mutual Energy Concept and Design Sensitivity*, *Proceedings of IEEE Magnetic*, 296-300, 1999.
- Cheney, M., Isaacson D. and Newell J. C., *Electrical impedance tomography*, *SIAM*

- Review*, 41:85–101, 1999.
- Eggleston, M., Schwabe R., Isaacson, D. and Coffin L. The application of electric current computed tomography to detect imaging in metals. [S.I.]: in *Review of Progress in Quantitative NDE*, D.O. Thompson and D.E. Chimenti, eds. Plenum, New York, 1989.
- Friedman, A. and Vogelius M., Determining cracks by boundary measurements. *Indiana Univ. Math. J.*, 38:527-556, 1989.
- Haftka, R. T., Gürdal Z. and Kamat M. P., *Element of Structural Optimization*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- Holder D., *Clinical and Physiological Applications of Electrical Impedance Tomography*, UCL, Press, London, 1993.
- Hou, T.-C., and Lynch, J. P., Electrical Impedance Tomographic methods for sensing strain fields and crack damage in cementitious structures, *J. Intellig. Mat. Syst. and Struct.*, 2008.
- Karhuen, K., Seppänen A., Lehtikoinen A., Monteiro P. J.M., and Kaipio J. P., Electrical Resistance Tomography imaging of concrete. *Cement and Concrete Research*, 137–145, 2010.
- Lazarovitch, R., Rittel D., and Bucher I., Experimental Crack Identification using Electrical Resistance Tomography. *NDT&E International*, 35:301-316, 2002.
- Liepa, V., Santosa, F., Vogelius, M., Crack determination from boundary measurements-reconstruction using experimental data. *J Nondestruct Eval*, 12(3):163-74, 1993
- Lima, C. R., Mello, L. A. M., Lima, R. G., and Silva, E. C. N., Electrical impedance tomography through constrained sequential linear programming: a topology optimization approach, *Measurement Science and Technology*, 18 (9): 2847-2858, 2007.
- Newell, J., Gisser D. and Isaacson D., An electric current tomography, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 35:828-833, 1988.
- Paulson, K. S., Pidcock M. K., and McLeod C. N., A Probe for Organ Impedance Measurement, *IEEE Transactions On Biomedical Engineering*, 51:1838-1844, 2004.
- Santosa, F. and Vogelius M., A computational algorithm to determine cracks from electrostatic boundary measurements. *Internat. J. Engrg. Sci.* 29:917-937, 2001.
- Shull, P. J., *Nondestructive evaluation theory, techniques, and applications*. New York, NY: Marcel Dekker, Inc, 2002.
- York, T., Status of electrical tomography in industrial applications. *Journal of Electronic Imaging*, 10:608-619, 2001.
- Yorkey, T. J., Webster J. G. and Tompkins W. J., Comparing Reconstruction Algorithms for Electrical Impedance Tomography, *IEEE Trans Biomed Eng.*, 34:843-52, 1987.

APÊNDICE – ANÁLISE DAS SENSIBILIDADES

Aplicando a regra da cadeia na equação da função objetivo do problema de otimização topológica, Eq. (2), a derivada dessa função em relação às variáveis do problema (ρ) é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial F}{\partial \phi_{ij}} \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \rho} = \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0}) \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \rho}. \quad (i)$$

O gradiente da Eq. (i) é calculado a seguir, usando-se o teorema da reciprocidade (Byun et al., 1999). Segundo a formulação de MEF, para o domínio discretizado em elementos finitos, podemos expressar o conceito de energia mútua na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{I}_1^T \boldsymbol{\Phi}_2 = \mathbf{I}_2^T \boldsymbol{\Phi}_1 \quad (ii)$$

onde \mathbf{I} é vetor de corrente elétrica aplicado, $\boldsymbol{\Phi}$ é o vetor de potencial elétrico, os subscritos $_1$ e $_2$ indicam o primeiro e o segundo caso de excitação elétrica aplicados e T indica a transposição do vetor.

Inicialmente, admite-se uma excitação elétrica fictícia cuja única componente não nula é uma corrente unitária aplicada num ponto. A partir da equação de equilíbrio ($\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{I}$), proveniente da formulação de MEF, temos:

$$\boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_2 = \phi_1 \text{ (energia mútua)} \quad (iii)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de condutividade global do domínio discreto.

Derivando os dois lados da Eq. (iii) em relação às variáveis do problema de otimização, temos:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_2)}{\partial \rho} = \frac{\partial(\phi_1)}{\partial \rho} \quad (iv)$$

O gradiente do lado esquerdo da Eq. (iv) é a derivada da energia mútua do sistema, a qual é desenvolvida da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_2)}{\partial \rho} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_1^T}{\partial \rho} \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_2 + \boldsymbol{\Phi}_1^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \boldsymbol{\Phi}_2 + \boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{K} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_2}{\partial \rho} \quad (v)$$

Derivando a equação de equilíbrio $\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}_1=\mathbf{I}_1$ (primeiro caso de carregamento) em relação às variáveis do problema (ρ) e considerando que o vetor de corrente elétrica \mathbf{I}_1 não varia com as variáveis ρ , temos:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_1}{\partial \rho} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \boldsymbol{\Phi}_1 \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_1^T}{\partial \rho} = -\boldsymbol{\Phi}_1^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \mathbf{K}^{-1} \quad (vi)$$

De maneira análoga, derivando a equação de equilíbrio $\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}_2=\mathbf{I}_2$ (segundo caso de carregamento), temos:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_2}{\partial \rho} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \boldsymbol{\Phi}_2 \quad (vii)$$

Substituindo as Eqs. (vi) e (vii) na Eq. (v), simplificando e retornado à Eq. (iv), temos:

$$\frac{\partial(\Phi_1^T \mathbf{K} \Phi_2)}{\partial \rho} = -\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \Phi_2 = \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho} \tag{viii}$$

Na TIE, para um caso de excitação elétrica ($j=1...ne$), são feitas várias medições ($i=1...np$) ao redor da seção do corpo em diferentes pontos de medição (eletrodos). Assim, considere a configuração do domínio para o primeiro ponto de medição ($i=1$), mostrado na figura abaixo.

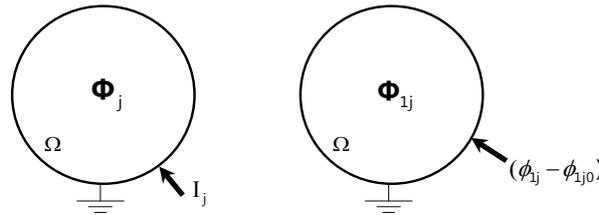


Figura – Aplicação do primeiro ponto de medição.

A excitação fictícia é considerada um vetor cujas componentes são:

$$\mathbf{I}_{1j}^T = \{ (\phi_{1j} - \phi_{1j0}) \quad 0 \quad 0 \quad \dots \} \tag{ix}$$

Esse vetor de corrente elétrica produz no domínio Ω uma distribuição de potencial Φ_{1j} . Sabendo-se que a corrente elétrica $(\phi_{1j} - \phi_{1j0})$ é constante durante o caso de excitação elétrica, aplicando a Eq. (viii) temos:

$$-\Phi_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \Phi_{1j} = (\phi_{1j} - \phi_{1j0}) \frac{\partial \phi_{1j}}{\partial \rho} \tag{x}$$

Então, repetindo o procedimento acima para o np -ésimo ponto de medição, obtemos:

$$-\Phi_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \Phi_{npj} = (\phi_{npj} - \phi_{npj0}) \frac{\partial \phi_{npj}}{\partial \rho} \tag{xi}$$

Considerando o desenvolvimento da primeira somatória (de 1 a np) da Eq. (i):

$$\frac{dF}{d\rho} = \sum_{j=1}^{ne} \left[(\phi_{1j} - \phi_{1j0}) \frac{\partial \phi_{1j}}{\partial \rho} + (\phi_{2j} - \phi_{2j0}) \frac{\partial \phi_{2j}}{\partial \rho} + \dots + (\phi_{npj} - \phi_{npj0}) \frac{\partial \phi_{npj}}{\partial \rho} \right] \tag{xii}$$

Comparando a Eq. (xii) e as Eqs. (x) e (xi) e considerando todos os np pontos de medição, conclui-se que a derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = -\sum_{j=1}^{ne} \left(\Phi_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \Phi_{1j} + \Phi_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \Phi_{2j} + \dots + \Phi_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \Phi_{npj} \right) \tag{xiii}$$

Agrupando os termos semelhantes da Eq. (xiii), vem:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = - \sum_{j=1}^{ne} \boldsymbol{\Phi}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \underbrace{(\boldsymbol{\Phi}_{1j} + \boldsymbol{\Phi}_{2j} + \dots)}_{\boldsymbol{\Phi}_{2j}} \quad (\text{xiv})$$

Como a formulação de MEF neste caso é linear, podemos obter a somatória de potenciais aplicando simultaneamente todos os np pontos de medição usando o seguinte vetor de corrente elétrica:

$$(\mathbf{I}_{2j}^n)^T = \mathbf{I}_{1j}^T + \mathbf{I}_{2j}^T + \dots \Rightarrow (\mathbf{I}_{2j}^n)^T = \{(\phi_{1j} - \phi_{1j0}) \quad (\phi_{2j} - \phi_{2j0}) \quad \dots \quad (\phi_{npj} - \phi_{npj0})\} \quad (\text{xv})$$

Assim, o vetor $\boldsymbol{\Phi}_{2j}^n$ pode ser calculado através da seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_{2j}^n = \mathbf{I}_{2j}^n \quad (\text{xvi})$$

Portanto, considerando-se todos os ne casos de excitação elétrica e todos os np pontos de medição, a expressão para o cálculo da derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} \left(-\phi_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \phi_{ij}^n \right) \quad (\text{xvii})$$

Calculando-se os gradientes da função objetivo com o procedimento descrito acima obtém-se uma grande economia de tempo computacional.