

## APLICACIÓN DEL MÉTODO DE TREFFTZ A VISCOELASTICIDAD

**Berardi Sensale Cozzano\*, Berardi Sensale Rodríguez\*\***

\*Instituto de Estructuras y Transporte

\*\*Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Av. Julio Herrera y Reissig 565, (11300) Montevideo, Uruguay

e-mail: [sensale@fing.edu.uy](mailto:sensale@fing.edu.uy) , web <http://www.fing.edu.uy/iet>

**Palabras clave:** Viscoelasticidad, Método de Trefftz, Método de la solución particular.

**Resumen.** *En el presente trabajo se aplica el método de Trefftz para resolver problemas de viscoelasticidad lineal en el dominio del tiempo, utilizando la serie de Trefftz elástica y tratando las componentes viscoelásticas en cada paso de tiempo como fuerzas de volumen ficticias. La aplicación directa del método de Trefftz a problemas elásticos está restringida a aquellos casos en que la ecuación de Navier sea homogénea, en presencia de fuerzas de volumen debe utilizarse el método de la solución particular o el método de la solución particular aproximada, según si la densidad de fuerzas de volumen sea constante o no dentro del dominio considerado. De esta manera puede resolverse con gran generalidad problemas de viscoelasticidad con y sin envejecimiento utilizando la serie de Trefftz elástica. Para mostrar la validez de la formulación propuesta se resuelven varios ejemplos y se comparan los resultados obtenidos disponibles en la bibliografía*

## 1. INTRODUCCIÓN

Debido a su eficiencia computacional los métodos de contorno han ganado en popularidad durante los últimos años. Esto es consecuencia de que los mismos requieren sólo de la discretización de la frontera del problema.

El Método de Trefftz, fue presentado en 1926 [1], para analizar problemas de barras sometidas a torsión. En los últimos años, fue utilizado por diversos investigadores para resolver diversos problemas de ingeniería, es utilizado para resolver para problemas de elasticidad bidimensional en la referencia [2]; en este trabajo es usado para resolver problemas de viscoelasticidad lineal.

En Viscoelasticidad lineal, se pueden considerar dos tipos de comportamiento, el de los materiales viscoelásticos que presentan envejecimiento y el de los que no lo presentan [3]. En términos de aplicaciones estructurales los primeros corresponden al hormigón y los segundos a los polímeros (o materiales compuestos con matriz polimérica).

Para analizar problemas de materiales viscoelásticos sin envejecimiento por el Método de Trefftz podría resolverse el problema elástico asociado en el dominio transformado de Laplace y luego invertir numéricamente el resultado para obtener la solución en el dominio del tiempo, o directamente aplicar la transformada de Laplace a la serie de Trefftz elástica para obtener las viscoelásticas. Pero de esta manera no se podría trabajar con materiales viscoelásticos con envejecimiento. Para desarrollar una formulación lo suficientemente general como para poder resolver problemas de materiales viscoelásticos con o sin envejecimiento, en este trabajo se propone utilizar la analogía entre las fuerzas de volumen y el gradiente de deformaciones inelásticas [4].

La aplicación directa del Método de Trefftz a problemas de Elasticidad está restringida a aquellos casos en que la ecuación de Navier, que gobierna el problema, sea homogénea. En presencia de fuerzas de volumen debe utilizarse el Método de la Solución Particular [5].

Para una pseudo fuerza de volumen como la que aparece en problemas inelásticos de los que la viscoelasticidad es un ejemplo, la dificultad anterior de que la ecuación que gobierna el proceso, no es homogénea permanece y debe recurrirse a una generalización del Método de la Solución Particular para poder resolverlo.

En este contexto, un importante resultado dado en este trabajo es el caso de materiales viscoelásticos en los que el coeficiente de Poisson puede considerarse invariante en el tiempo, para estos materiales en ausencia de fuerzas regulares de volumen, la ecuación que gobierna el problema es homogénea lo que simplifica enormemente la resolución del problema.

El presente trabajo consta de seis secciones, de las cuales la primera es esta introducción. En la segunda se desarrollará la formulación del Método de Trefftz aplicado a Elasticidad con y sin fuerzas de volumen. En la tercera se presentarán los Fundamentos de la Viscoelasticidad. En la cuarta se mostrará como la analogía entre las fuerzas de volumen y el gradiente de deformaciones inelásticas permite utilizar el Método de Trefftz para resolver problemas de materiales viscoelásticos sin y con envejecimiento. En la quinta sección se analizarán ejemplos numéricos; y por último en la sexta sección se presentarán las conclusiones.

## 2. EL METODO DE TREFFTZ EN ELASTICIDAD.

El Método de Trefftz, es un método general, para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas, en derivadas parciales, donde la función solución es aproximada por una combinación lineal de funciones T-completas [6], cuyos coeficientes pueden ser determinados, entre otros métodos por el método de colocación [7].

Se construye un conjunto de funciones T-completas regulares de manera que satisfagan la ecuación que gobierna el problema de un cuerpo elástico lineal que no se encuentra sometido a fuerzas de volumen; y se demuestra que esta serie infinita de funciones de Trefftz es completa en el sentido que cualquier solución de la ecuación que gobierna el problema puede escribirse como combinación lineal de tales funciones. Según la bibliografía [8], verificar esta condición de completitud garantiza la convergencia del método.

### 2.1 Resolución en ausencia de fuerzas de volumen

Sea  $\Omega$  un recinto finito con su contorno  $\partial\Omega$  dado por  $\partial\Omega_u$  y  $\partial\Omega_f$ , de forma que  $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_f$ , en el que se propone resolver las ecuaciones de Navier para elasticidad [9] para los desplazamientos  $\vec{u}$  en un sólido isótropo en ausencia de fuerzas de volumen

$$\begin{aligned} \left( \frac{G}{1-2\nu} \right) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + G \nabla^2 \vec{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \vec{u} &= \vec{u}_d \quad \text{in } \partial\Omega_u \\ \mathbf{T} \vec{n} = \vec{f} &= \vec{f}_d \quad \text{in } \partial\Omega_f \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $\vec{n}$  el versor normal saliente al contorno  $\partial\Omega$ .

Trabajando en coordenadas polares los campos de desplazamientos y tracciones se pueden expresar de la forma:

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta \quad (2)$$

$$\vec{f} = \mathbf{T} \vec{n} \quad \text{with} \quad m(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \sigma_r & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_\theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

Una solución aproximada del problema de elasticidad se puede obtener por merdío de la serie truncada:

$$u_r = \sum_{i=1}^N \hat{u}_{ri} a_i = \hat{\mathbf{u}}_r \mathbf{a}^T, \quad u_\theta = \sum_{i=1}^N \hat{u}_{\theta i} a_i = \hat{\mathbf{u}}_\theta \mathbf{a}^T \quad (4)$$

$$\sigma_r = \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{ri} a_i = \hat{\mathbf{\sigma}}_r \mathbf{a}^T, \quad \sigma_\theta = \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{\theta i} a_i = \hat{\mathbf{\sigma}}_\theta \mathbf{a}^T, \quad \sigma_{r\theta} = \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{r\theta i} a_i = \hat{\mathbf{\sigma}}_{r\theta} \mathbf{a}^T \quad (5)$$

Donde  $a_i$  denota un conjunto de parámetros desconocidos y N en número total de funciones de Trefftz.

Todas las funciones  $\hat{u}_{ri}$  y  $\hat{u}_{\theta i}$  son soluciones de la ecuación homogénea (1), y  $\hat{\sigma}_{ri}$ ,  $\hat{\sigma}_{\theta i}$  y  $\hat{\sigma}_{r\theta i}$  son las tensiones correspondientes.

Si estas soluciones son tales que garantizan la completitud (funciones T-completa según la definición de Herrera [9]), la solución global del problema está garantizada. La exactitud de esta aproximación depende básicamente del número N de funciones T-completas elegida.

Para un dominio interior las funciones T-completas son [10]:

$$2G\hat{u}_r = -\cos\theta\alpha_o + \sin\theta\beta_o + \sum_{\mu=1}^N \left[ r^\mu(\kappa-\mu)C(\mu-1)\alpha_\mu - r^\mu(\kappa-\mu)S(\mu-1)\beta_\mu - r^\mu C(\mu+1)\gamma_\mu + r^\mu S(\mu+1)\delta_\mu \right] \quad (6)$$

$$2G\hat{u}_\theta = \sin\theta\alpha_o + \cos\theta\beta_o + \sum_{\mu=1}^N \left[ r^\mu(\kappa+\mu)S(\mu-1)\alpha_\mu + r^\mu(\kappa+\mu)C(\mu-1)\beta_\mu + r^\mu S(\mu+1)\gamma_\mu + r^\mu C(\mu+1)\delta_\mu \right] \quad (7)$$

$$\hat{\sigma}_r = \sum_{\mu=1}^N \left[ -\mu r^{\mu-1}(\mu-3)C(\mu-1)\alpha_\mu + \mu r^{\mu-1}(\mu-3)S(\mu-1)\beta_\mu - \mu r^{\mu-1}C(\mu+1)\gamma_\mu + \mu r^{\mu-1}S(\mu+1)\delta_\mu \right] \quad (8)$$

$$\hat{\sigma}_\theta = \sum_{\mu=1}^N \left[ \mu r^{\mu-1}(\mu+1)C(\mu-1)\alpha_\mu - \mu r^{\mu-1}(\mu+1)S(\mu-1)\beta_\mu + \mu r^{\mu-1}C(\mu+1)\gamma_\mu - \mu r^{\mu-1}S(\mu+1)\delta_\mu \right] \quad (9)$$

$$\hat{\sigma}_{r\theta} = \sum_{\mu=1}^N \left[ \mu r^{\mu-1}(\mu-1)S(\mu-1)\alpha_\mu + \mu r^{\mu-1}(\mu-1)C(\mu-1)\beta_\mu + \mu r^{\mu-1}S(\mu+1)\gamma_\mu + \mu r^{\mu-1}C(\mu+1)\delta_\mu \right] \quad (10)$$

donde:  $C(\mu) = \cos(\mu\theta)$  y  $S(\mu) = \sin(\mu\theta)$

### 2.1.1 Método de Colocación

La formulación débil del método de los residuos ponderados correspondiente a un problema elástico se puede expresar [8] como:

$$\int_{\partial\Omega_u} \varpi_u (\vec{u} - \vec{u}_d) d\Gamma + \int_{\partial\Omega_f} \varpi_f (\vec{f} - \vec{f}_d) d\Gamma = 0 \quad (12)$$

Las funciones de peso  $\varpi_u$  y  $\varpi_f$  se pueden elegir arbitrariamente, conduciendo a diferentes técnicas del método de Trefftz. Cuando se definen estas funciones por medio de la función Delta de Dirac, como:

$$\varpi_u = \varpi_f = \delta(P - P_i) \quad (13)$$

donde  $P_i$  es el punto de colocación ubicado en el contorno, se trabaja con la técnica de Colocación. De esta manera las ecuaciones (12) y (13), conducen a:

$$\begin{aligned}\vec{u}(P_i) &= \hat{\mathbf{u}} \mathbf{a}^T = \vec{u}_d(P_i) & \forall P_i \in \partial\Omega_u \\ \vec{f}(P_i) &= \hat{\mathbf{f}} \mathbf{a}^T = \vec{f}_d(P_i) & \forall P_i \in \partial\Omega_f\end{aligned}\quad (14)$$

Las ecuaciones anteriores (14), se pueden escribir de la forma:

$$K_{ij}a_j = b_i \Leftrightarrow \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (15)$$

donde las incógnitas  $a_j$  representan los coeficientes del  $j$ th término de la expansión, mientras que los términos  $b_i$  están dados por:

$$b_i = \vec{u}_d(P_i) \quad o \quad b_i = \vec{f}_d(P_i) \quad (16)$$

En el presente trabajo, los límites de las expansiones (4) y (5) son determinados por minimizar el funcional:

$$F = \sum_{i=1}^{M_u} \|\vec{u}(P_i) - \vec{u}_d(P_i)\| + \sum_{i=1}^{M_f} \|\vec{f}(P_i) - \vec{f}_d(P_i)\| \quad (17)$$

donde  $M_u$  y  $M_f$  son la cantidad de puntos de contorno ubicados en las regiones  $\partial\Omega_u$  y  $\partial\Omega_f$  respectivamente.

## 2.2- Resolución en presencia de fuerzas de volumen.

Consideremos ahora la solución de la ecuación de Navier pero con un término de fuerza de volumen  $\vec{b}$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{G}{1-2\nu}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + G\nabla^2 \vec{u} + \vec{b} &= 0 \quad in \Omega \\ \vec{u} &= \vec{u}_d \quad in \partial\Omega_u \\ \mathbf{T}\vec{n} &= \vec{f} = \vec{f}_d \quad in \partial\Omega_f\end{aligned}\quad (18)$$

Una forma directa de resolver la expresión (18) evitando el término no homogéneo es mediante un cambio de variables de forma tal que el término de dominio desaparezca. Esto puede hacerse sumando una solución particular a una nueva variable

$$\vec{u} = \vec{\tilde{u}} + \vec{u}^{(p)} \quad y \quad \vec{p} = \vec{\tilde{p}} + \vec{p}^{(p)} \quad (19)$$

donde la solución particular  $\vec{u}^{(p)}$  satisface (18), mientras que  $\vec{\tilde{u}}$  satisface (1) con condiciones de contorno derivadas de las expresiones (19):

$$\vec{\hat{u}} = \vec{u}_d - \vec{u}^{(p)} \text{ en } \partial\Omega_u \quad \text{y} \quad \vec{\hat{p}} = \vec{p}_d - \vec{p}^{(p)} \text{ en } \partial\Omega_f \quad (20)$$

En el caso de la aceleración gravitacional dirigida en la dirección del eje  $x_2$  el vector densidad de fuerzas de volumen esta dado por:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -\rho g \quad (21)$$

Donde  $\rho$  es la densidad de masa y  $g$  la aceleración de la gravedad, Sokolnikoff [5] presenta un conjunto de soluciones particulares correspondientes a este problema, dado por:

$$\begin{aligned} u_1^{(p)}(x) &= \frac{-\rho g \lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} (x_1 x_2) \\ u_2^{(p)}(x) &= \frac{\rho g}{8\mu(\lambda + \mu)} \left[ (\lambda + 2\mu)x_2^2 + \lambda x_1^2 \right] \\ p_1^{(p)}(x) &= 0, \quad p_2^{(p)}(x) = \rho g x_2 n_2 \end{aligned} \quad (22)$$

De igual forma existen soluciones particulares [11] que permiten aproximar términos correspondientes a fuerzas de volumen generales para las cuales no se puede determinar una formula analítica de su solución particular.

### 3. FUNDAMENTOS DE VISCOELASTICIDAD

La ecuación constitutiva de un material viscoelástico con envejecimiento puede escribirse [3], como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_{\tau_0}^t \mathbf{D}(t, \tau) d\boldsymbol{\sigma}(\tau) = \int_{\tau_0}^t \mathbf{D}(t, \tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau = \mathbf{D}(t, \tau) * \boldsymbol{\sigma}(\tau) \quad (23)$$

Donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformaciones infinitesimales,  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones de Cauchy,  $\mathbf{D}(t, \tau)$  es el tensor de cuarto orden de fluencia dependiente del tiempo, mientras que el último miembro presenta simplemente una notación operacional equivalente.

Para cada componente del tensor de cuarto orden, se pueden separar las partes elástica e inelástica, escribiendo:

$$\mathbf{D}(t, \tau) = \mathbf{E}^{-1}(t) + \mathbf{C}(t, \tau) \quad (24)$$

Donde  $\mathbf{E}(t)$  el tensor elástico, variable en el tiempo, y  $\mathbf{C}(t, \tau)$  el tensor de fluencia específico.

En el caso de un material con isotropía, se tiene dos funciones independientes para la parte

elástica y dos para la parte diferida.

Descomponiendo los tensores de tensiones y deformaciones en sus componentes esféricos y desviadores se tiene:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{s} + \sigma_o \mathbf{I}_d, & \sigma_o &= \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{e} + \varepsilon_o \mathbf{I}_d, & \varepsilon_o &= \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\end{aligned}\quad (25)$$

Para las partes elásticas, se puede escribir que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_o^{(e)}(t) &= \frac{1}{3} K^{-1}(t) \sigma_o(t) \\ \mathbf{e}^{(e)}(t) &= \frac{1}{2} \mu^{-1}(t) \mathbf{s}(t)\end{aligned}\quad (26)$$

Donde  $K(t)$  y  $\mu(t)$  son el módulo de elasticidad volumétrica y el módulo de elasticidad de corte respectivamente.

Para las partes diferidas se tiene que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_o^{(v)} &= \frac{1}{3} C_K * \sigma_o(t) \\ \mathbf{e}^{(v)} &= \frac{1}{2} C_\mu * \mathbf{s}(t)\end{aligned}\quad (27)$$

Donde  $C_K(t, \tau)$  y  $C_\mu(t, \tau)$  son las correspondientes funciones de fluencia específica volumétrica y de corte, respectivamente.

Dos casos particulares que son importantes en cuanto a sus aplicaciones, recibirán una atención especial en este trabajo:

- 1) El caso algunas veces referido como aproximación sincrónica, para el cual se verifica que

$$K C_K = \mu C_\mu = E C_E \quad (28)$$

Lo cual implica que el coeficiente de Poisson  $\nu$  es invariante en el tiempo, esta hipótesis es usual en el hormigón.

2) Para otros materiales como los polímeros la función de fluencia específica de corte, puede ser varios ordenes de magnitud mayor que la volumétrica, por lo cual puede admitirse que el material no tiene deformaciones volumétricas diferidas

El Método de las variables de estado [3], es un procedimiento eficiente para calcular numéricamente relaciones integrales de la forma (23), y es el que se aplicó en este trabajo.

#### 4.EL METODO DE TREFFTZ EN VISCOELASTICIDAD

En la sección 2 se analizó el Método de Trefftz en Elasticidad, para extenderlo a Viscoelasticidad se puede utilizar la analogía entre las fuerzas de volumen y el gradiente de deformaciones inelásticas [4], la cual permite analizar sólidos sometidos a deformaciones inelásticas por medio de los métodos usados para materiales elásticos.

Para un tiempo  $t$ , la ecuación que gobierna el problema viscoelástico toma la forma:

$$\left( \frac{3K + \mu}{3\mu} \right) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\mu} (\vec{b} + \vec{b}^{(v)}) = 0 \quad (29)$$

Con las condiciones de contorno:

$$\vec{u} = \vec{u}_d \text{ en } \partial\Omega_u \quad \text{y} \quad \vec{p} = \vec{p}_d - \vec{p}^{(v)} \text{ en } \partial\Omega_f \quad (30)$$

Donde:

$$\vec{b}^{(v)} = - \left( \frac{3K - 2\mu}{3} \nabla \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(v)}) + 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(v)} \right) \quad (31)$$

Es llamado densidad de fuerzas de volumen equivalente, mientras que el término

$$\vec{p}^{(v)} = \left( \frac{3K - 2\mu}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(v)}) \mathbf{I}_d + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^{(v)} \right) \vec{n} \quad (32)$$

Es llamado densidad de fuerzas de contacto equivalente.

Estos vectores son calculados, a partir del tensor de deformaciones viscoelástico por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(v)} &= \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}^{(v)} \\ \vec{p}^{(v)} &= \boldsymbol{\sigma}^{(v)} \vec{n} \\ \vec{b}^{(v)} &= -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(v)} \end{aligned} \quad (33)$$

Un importante resultado, es que las fuerzas de volumen equivalente y de contacto equivalente solamente dependen de las fuerzas de volumen y de contacto aplicadas y del primer invariante del tensor de tensiones y su gradiente en el tiempo  $t$ .

Para probar ésto, observemos que:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(v)} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}^{(v)} = 3K \boldsymbol{\varepsilon}_o^{(v)} \mathbf{I}_d + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^{(v)} = K (C_K * \sigma_o) \mathbf{I}_d + \mu (C_\mu * \mathbf{s}) \quad (34)$$

Reemplazando el tensor desviador de tensiones  $\mathbf{s}$ , por  $\boldsymbol{\sigma} - \sigma_o \mathbf{I}_d$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(v)} &= K (C_K * \sigma_o) \mathbf{I}_d + \mu (C_\mu * \boldsymbol{\sigma}) - \mu (C_\mu * \sigma_o) \mathbf{I}_d \\ \vec{p}^{(v)} &= \boldsymbol{\sigma}^{(v)} \vec{n} = K (C_K * \sigma_o) \vec{n} + \mu (C_\mu * \vec{p}) - \mu (C_\mu * \sigma_o) \vec{n} \\ \vec{b}^{(v)} &= -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(v)} = -K (C_K * \nabla \sigma_o) + \mu (C_\mu * \vec{b}) + \mu (C_\mu * \nabla \sigma_o) \end{aligned} \quad (35)$$

Del resultado anterior, también se concluye que para materiales con coeficiente de Poisson invariante en el tiempo el vector de fuerzas de volumen equivalente se anula en ausencia de fuerzas de volumen aplicadas, ya que si el coeficiente de Poisson es constante, se verifica que:

$$K C_K = \mu C_\mu = E C_E \quad (36)$$

Así sustituyendo en la última de las ecuaciones (35), se tiene:

$$\vec{b}^{(v)} = E (C_E * \vec{b}) \quad (37)$$

Y el vector de fuerzas de volumen equivalente vale cero, cuando las fuerzas de volumen aplicadas son nulas. Este resultado simplifica muchos problemas de aplicación en los cuales las fuerzas de volumen aplicadas (tales como el peso propio) pueden ser despreciadas o aproximadas como fuerzas de contacto, ya que la ecuación que gobierna el problema es homogénea y puede aplicarse el Método de Trefftz en forma directa sin necesidad de recurrir al Método de la Solución Particular.

Otro caso en que el vector de fuerzas de volumen equivalente se anula, cuando las fuerzas de volumen aplicadas son nulas, es cuando la distribución del primer invariante del tensor de tensiones es uniforme, en cuyo caso su gradiente vale cero y aunque el coeficiente de Poisson no sea constante, de acuerdo con la ecuación (37), vector de fuerzas de volumen equivalente vale cero. Si bien este caso es mucho menos frecuente que el anterior, si en el análisis elástico de la estructura, se detecta que la distribución del primer invariante del tensor de tensiones es uniforme, también puede aplicarse.

#### 4.1 Método de la Solución Particular Aproximada.

Aplicando el Método de Trefftz, en cada tiempo  $t$ , es posible calcular el primer invariante del tensor de tensiones y su gradiente en todo punto del dominio, mediante las expresiones, válidas para estado plano de tensiones, para estado plano de deformaciones, deben ser multiplicadas por el factor correspondiente:

$$\begin{aligned} \sigma_o(P) &\cong \tilde{\sigma}_o(a, P) = \sum_{j=1}^N a_j \sigma_o^*(P) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma}^*(P) \\ \nabla \sigma_o(P) &= \sum_{j=1}^N a_j \nabla \sigma_o^*(P) = \mathbf{a}^T \nabla \boldsymbol{\sigma}^*(P) \end{aligned} \quad (38)$$

A partir de estas expresiones y por medio de los operadores viscoelásticos se pueden determinar los vectores fuerza de volumen equivalente y fuerza de contacto equivalente, en el caso en que el vector fuerza de volumen equivalente sea nulo, una aplicación directa del Método de Trefftz Elástico permite resolver el problema, en el caso en que el vector fuerza de volumen equivalente no se anule, la ecuación que gobierna el problema no es homogénea y se debe recurrir al Método de la Solución Particular Aproximada [11].

Para ello, se puede escribir el vector fuerza de volumen equivalente de la forma:

$$\vec{b}^{(v)}(P) = \sum_{j=1}^{N_p} \tilde{f}^{(j)}(P, Q_j) \alpha^{(j)} \quad (39)$$

Donde  $P$  es el punto del dominio a estudiar, donde se evalúa el vector fuerza de volumen equivalente,  $Q_j$  es un conjunto de  $N_t$  puntos no alineados,  $N_a$ , es el número de términos adicionados,  $N_p = N_t + N_a$ ,  $\vec{f}$  es la función de aproximación vectorial, la cual debe ser elegida siguiendo ciertos criterios en este trabajo se adoptaron las funciones ATPS [12], y  $\alpha$  es un conjunto de,  $N_p$  escalares desconocidos.

La ecuación anterior, puede escribirse en forma matricial, como:

$$\mathbf{b}^{(v)} = \mathbf{F} \mathbf{A} \quad (40)$$

De donde se puede determinar las incógnitas  $\alpha$ , resolviendo el sistema:

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{b}^{(v)} \quad (41)$$

Escribiendo la ecuación de Navier, cuando se aplica un vector de fuerzas de volumen igual a  $\vec{f}$ , se tiene:

$$\left( \frac{1}{1-2\nu} \right) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\mu} \vec{f} = 0 \quad (42)$$

Si se pueden determinar las expresiones analíticas de los vectores desplazamiento  $\vec{u}$  y tensión  $\vec{p}$  para cada una de las funciones de aproximación  $\vec{f}$  adoptadas, se tiene una solución particular aproximada para los vectores desplazamiento y tensión cuando actúa el vector de fuerzas de volumen equivalente  $\vec{b}^{(v)}$ , dada por las formulas:

$$\begin{aligned} \vec{u}^{(P)}(P) &= \sum_{j=1}^{N_p} \vec{u}^{(j)}(P, Q_j) \alpha^{(j)} \\ \vec{p}^{(P)}(P) &= \sum_{j=1}^{N_p} \vec{p}^{(j)}(P, Q_j) \alpha^{(j)} \end{aligned} \quad (43)$$

Con lo cual se procede como fue indicado en la sección 2.2, las funciones de aproximación  $\vec{f}$  utilizadas en este trabajo fueron las “augmented thin plate splines” (ATPS), las expresiones analíticas de sus funciones  $\vec{u}$ , y  $\vec{p}$  se encuentran desarrolladas en la referencia[12]

## 5. EJEMPLOS

### 5.1 Memoria desvanescente

Se consideran las tres historias de carga representadas en la figura 1, las cuales se aplican a una placa cuadrada, de 2 m de lado de un material viscoelástico representado en la figura 2.

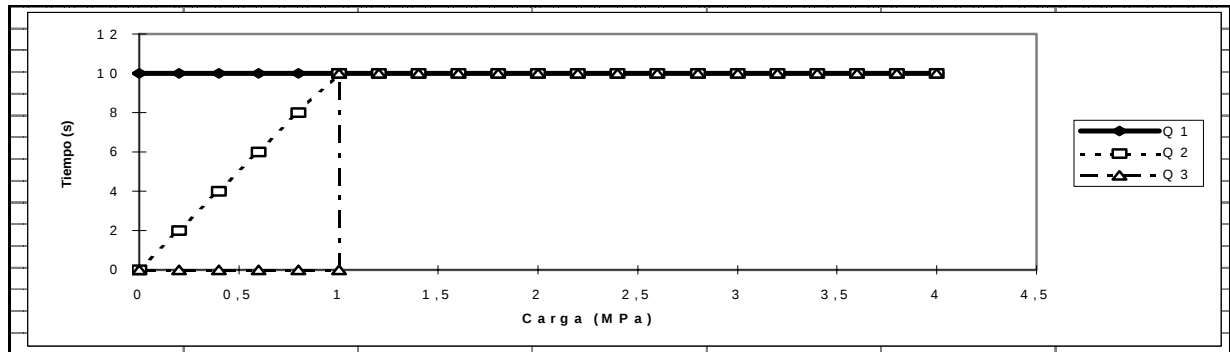


Figura 1 – Historias de carga

Se modeló la placa con 12 nodos, tomándose nodos dobles en las esquinas, se aplicó el método de colocación, trabajando con 16 términos en la serie de Trefftz.

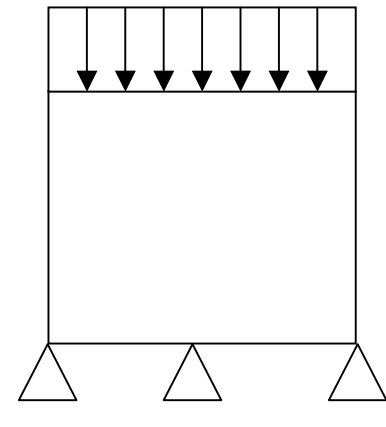


Figura 2 – Placa cuadrada de material viscoelástico

En primer lugar se trabajó con un material viscoelástico que responde a un modelo de Maxwell en su modo longitudinal con  $E_1 = 500 \text{ Mpa}$ ,  $\eta_1 = 50 \text{ Mpa/s}$  representado en la figura

3, y con un coeficiente de Poisson invariante en el tiempo e igual a 0,25.

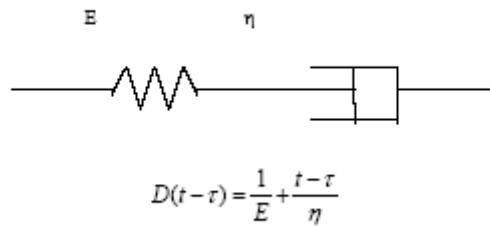


Figura 3 – Modelo de Maxwell

En la figura 4 se comparan los resultados obtenidos para las tres historias de carga con la solución analítica.

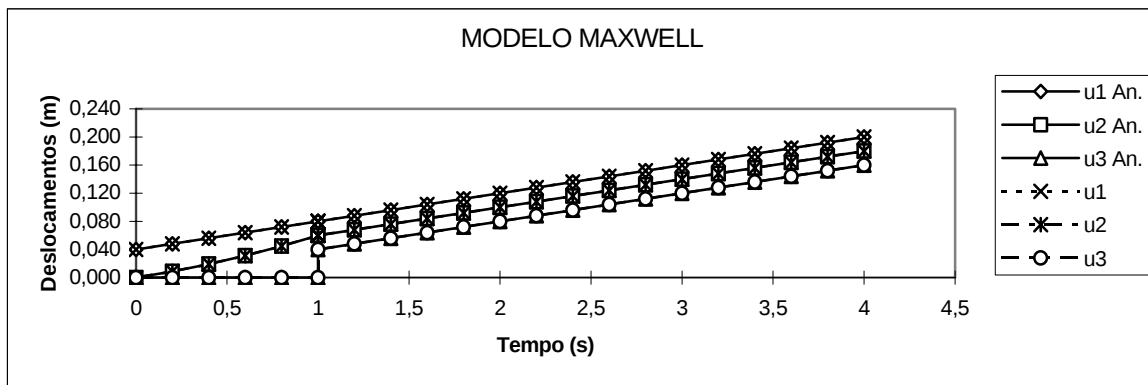


Figura 4 – Resultados obtenidos para un material viscoelástico que responde a un modelo de Maxwell en su modo longitudinal

Luego se aplican las mismas cargas a un modelo Boltzman con  $E_1 = 500$  Mpa ,  $E_2 = 1000$  Mpa ,  $\eta_2 = 100$  Mpa/s representado en la figura 5, coeficiente de Poisson 0,25.

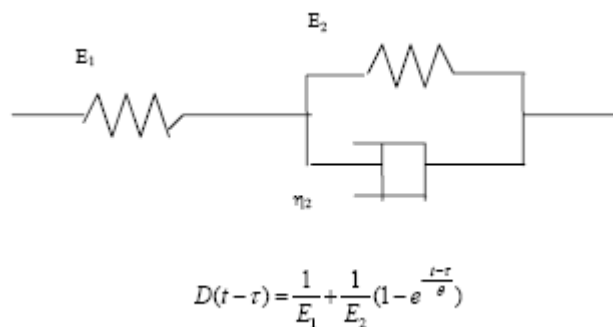


Figura 5 – Modelo de Boltzman

En la figura 6 se comparan los resultados obtenidos con la solución analítica.

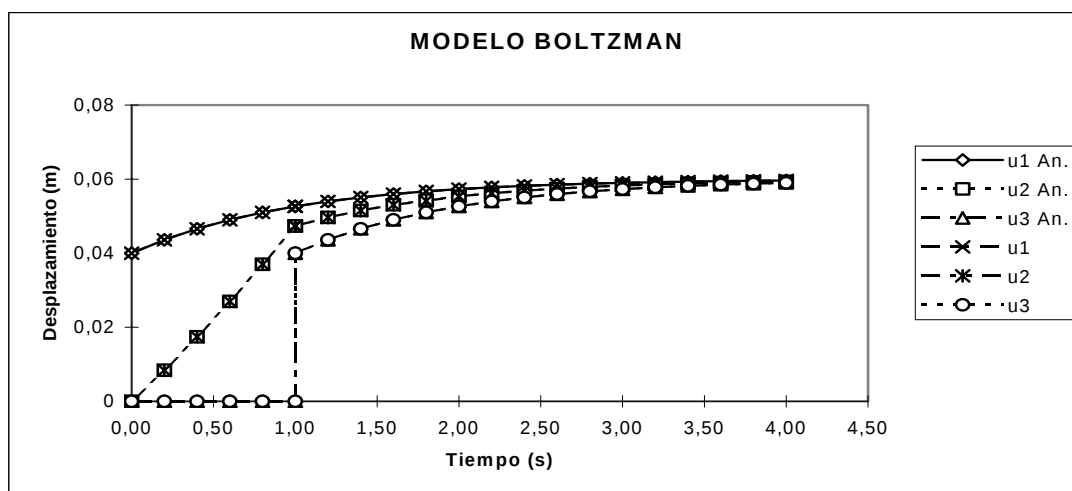


Figura 6 - Resultados obtenidos para un material viscoelástico que responde a un modelo de Boltzman

En ambos modelos se tomó un paso de tiempo igual a 0,01 s.

Se puede observar que cuando el tiempo crece en el modelo de Maxwell las historias de deformación son diferentes, mientras que el modelo de Boltzman olvida los detalles del proceso de carga. Esta es una característica de los materiales viscoelásticos estables, sin envejecimiento, como el modelo de Boltzman, y está relacionado con el concepto de memoria desvaneciente.

## 5.2. Tubo de pared gruesa sometido a presión interna

Este ejemplo consiste en un cilindro de pared gruesa de radio interior  $a=10$  cm y radio exterior  $b=20$  cm sometido a una presión interna radial  $P(t)=P_0 H(t)$ , con  $P_0=10$  MPa, siendo  $H(t)$  la función de Heaviside. Debido a la simetría del problema sólo se discretizó un cuarto de anillo con una malla de 126 nodos aplicándose el método de colocación con 132 términos en la serie de Trefftz, un paso de tiempo de 1s.

El material viscoelástico corresponde a un modelo de Boltzman en su modo distorsional con  $G_1=480$  MPa;  $G_2=160$  MPa;  $\eta_2=1600$  Mpa/s; y elástico en su modo dilatacional con  $K=1280$  MPa.

En la figura 7 se representa la cuarta parte del anillo modelada con una malla de 126 nodos.

En la figura 8 se muestran los desplazamientos radiales de los puntos del anillo ubicados en radios de 20 cm, 17,5cm, 15 cm, 12,5 cm, y 10 cm obtenidos, comparados con la solución exacta.

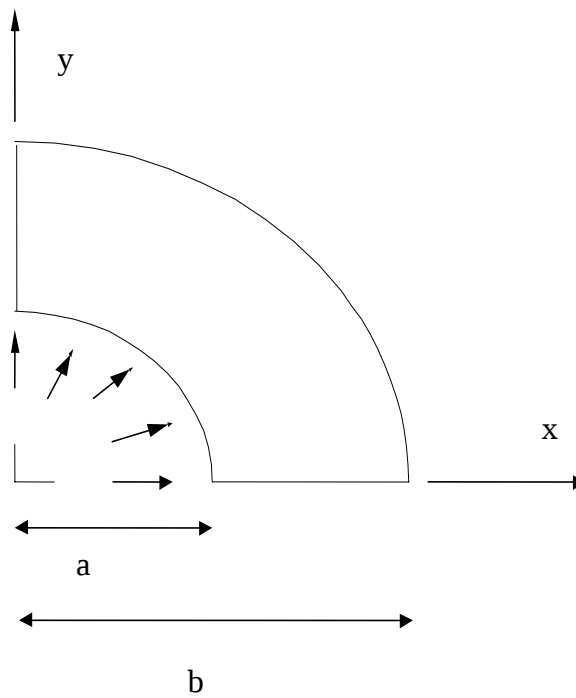


Figura 7- Tubo de pared gruesa sometido a presión interna (cuarta parte)

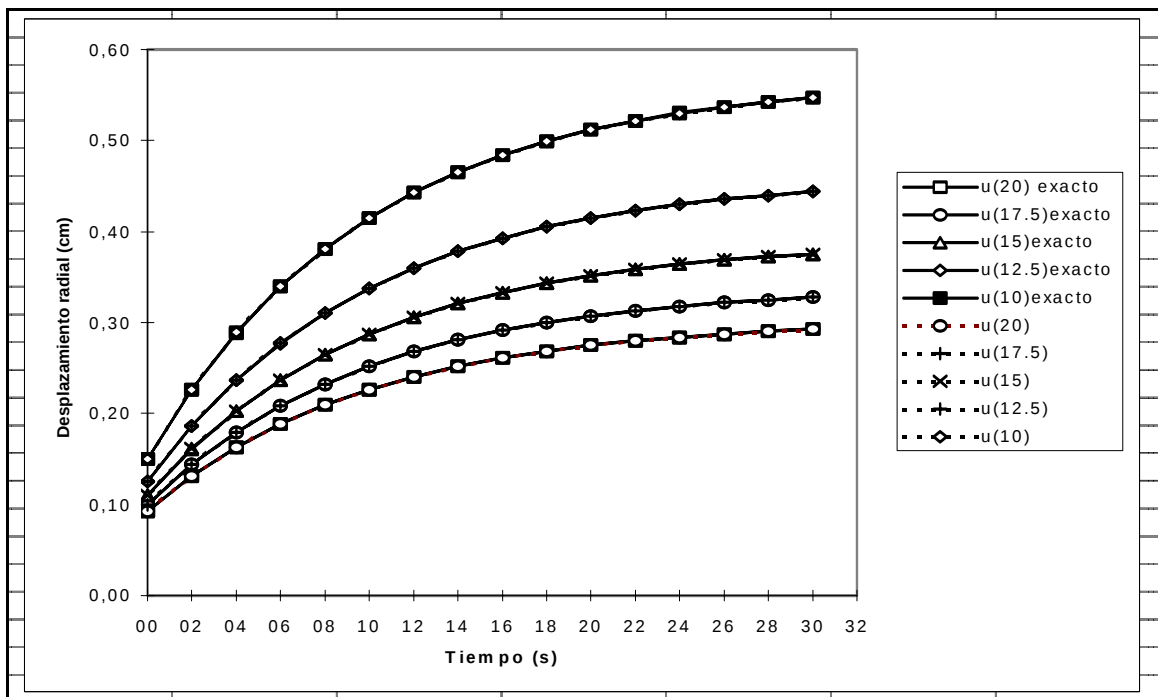


Figura 8 - Desplazamientos radiales de los puntos

### 5.3. Placa sometida a desplazamientos prescriptos.

A la placa rectangular de 80 cm de largo y 40 cm de alto representada en la figura 9 se le aplican los desplazamientos con variación lineal indicados con un desplazamiento máximo de 0,02 cm los que son mantenidos a lo largo del tiempo.

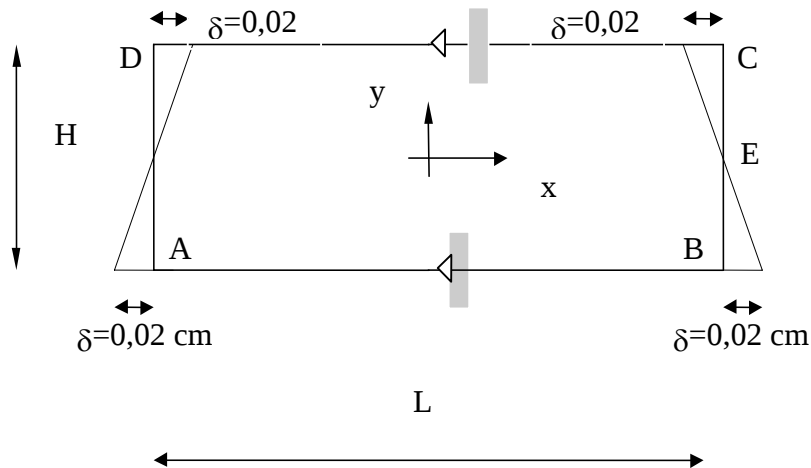


Figura 9 - Placa rectangular sometida a desplazamientos prescriptos

Dicha placa se discretizó con 24 nodos, utilizándose el método de colocación con 36 términos en la serie de Trefftz, se trabajó con pasos de tiempo de 2 s y 0,02 s.

Se consideró un material viscoelástico de Dischinger, representado en la figura 11 en el modo distorsional con constantes  $\mu(t) = 83333 \text{ Mpa}$ ,  $\gamma = 0,026 \text{ dias}^{-1}$ ,  $\gamma\eta_0 = 35667 \text{ Mpa}$ , y elástico de constante  $K = 10000 \text{ Mpa}$  en su modo dilatacional.

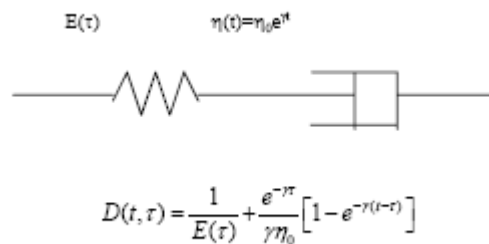


Figura 11 – Modelo de Dischinger

En la figura 12 se comparan las tensiones normales  $\sigma_x$  en los vértices inferiores de la placa y el desplazamiento  $u_y$  en el punto medio de las caras verticales para los pasos de tiempo 2 s y 0,02 s con la solución analítica del problema.

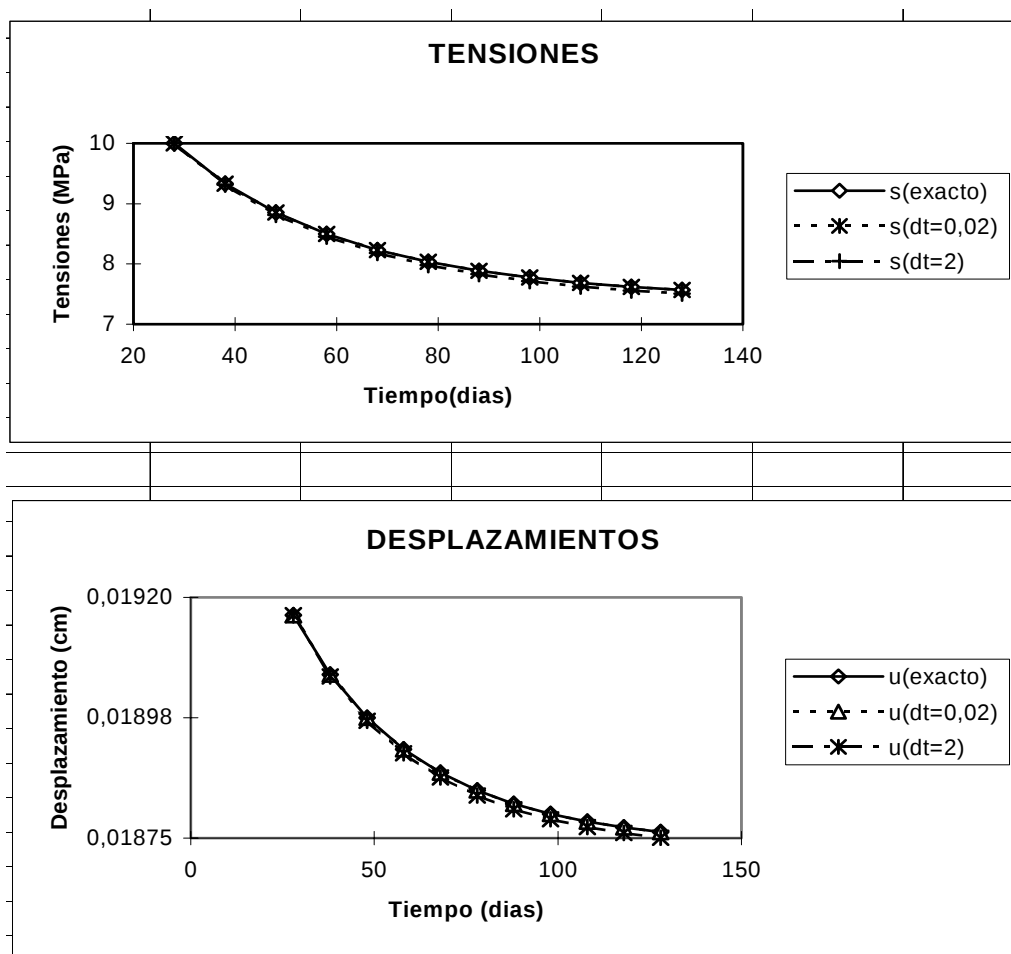


Figura 12 – Tensiones normales y desplazamientos obtenidos

## 6. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una generalización del método de Treffz para analizar problemas de materiales viscoelásticos con o sin envejecimiento.

Se probó que para problemas sincrónicos en los cuales el coeficiente de Poisson es constante la ecuación que gobierna el problema es homogénea en ausencia de fuerzas de volumen y el método de Treffz elástico permite resolver el problema. Mediante la analogía entre las pseudofuerzas de volumen y el gradiente de deformaciones inelásticas se extendió el método de la solución particular a la solución de problemas viscoelásticos generales en los

---

que el coeficiente de Poisson no se mantiene invariante en el tiempo. Los resultados obtenidos por los autores en una amplia gama de problemas viscoelásticos muestran el buen desempeño del método.

## 7. REFERENCIAS

- [1] Trefftz, E Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. In : *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Cong. on Applied Mechanics*, Zürich , pp. 131-137, (1926).
- [2] Portela, A., Charafi, A. trefftz boundary element: multi-region formulations. *Int. J. for Num. Methods in Engineering*, Vol.45(7), pp. 821-846 (1999) .
- [3] Creus, G.J. *Viscoelasticity. Basic Theory and Applications to Concrete Structures*, Springer-Verlag, Berlin, (1986)
- [4] Lin, T.H. *Theory of Inelastic Structures*, John Wiley and Sons Inc, New York, (1968)
- [5] Sokolnikof I. *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, (1956)
- [6] Kita E and Kamiya N. Trefftz method: an overview. *Advances in Engineering Software*, 24, pp. 3-12, (1995).
- [7] Herrera I. Trefftz Method. In: Brebbia CA, editor. *Topics in boundary element research*, vol. 1: basic principles and applications, Chap. 10. New York: Springer-Verlag, pp. 225-253, (1984).
- [8] Qinq-Hua Qin. *The Trefftz finite and boundary element method*. WIT Press. Southampton, (2000).
- [9] Issam Doghri. *Mechanics of Deformable Solids*. Springer- Verlag. Berlin Heidelberg, (2000).
- [10] B. Sensale, B. Sensale Rodríguez, J. Herskovits – “Shape sensitivity analysis in planar elasticity using the element-free Trefftz method ” In: *6<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, 10 pages. (2005 )
- [11] Partridge, P.W., Brebbia, C.A. & Wrobel, L.C. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. C M P and Elsevier, Southampton, (1992).
- [12] Bridges, T.R. & Wrobel, L.C. A dual reciprocity formulation for elasticity problems with body forces using augmented thin plate splines, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol.12, pp.209-220, (1996).